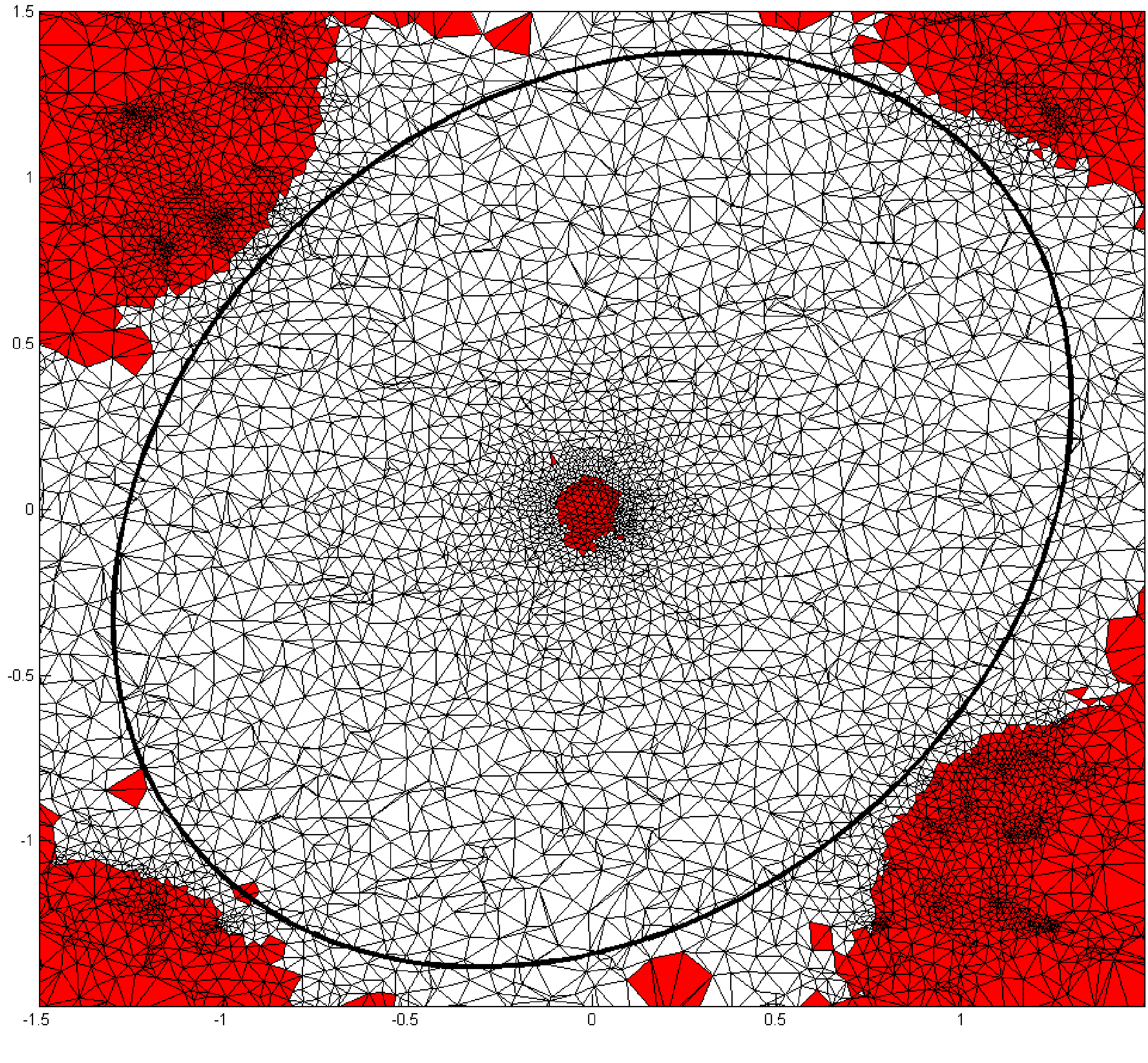
Kennslubók í stærðfræðigreiningu

Hlynur Arnórsson

Ingunn Gunnarsdóttir

Sigurður Freyr Hafstein



ISBN 978-9935-24-309-6

Prentun: Háskólaprent

Fyrsta prentun, desember 2017

Formáli

Þessi bók varð til uppúr fyrirlestranótum sem stuðst var við í kennslu á fyrsta námskeiði í stærðfræðigreiningu fyrir verkfræði- og tæknifræðinemendur við Háskólann í Reykjavík.

Við viljum þakka nemendum í HR sem í gegnum tíðina hafa komið með margar góðar ábendingar um það sem betur mætti fara. Við viljum þakka stærðfræðingunum Jóhanni Sigursteini Björnssyni og Hirti Björnssyni fyrir margt gott innlegg. Að auki viljum við þakka Helga Hlynssyni fyrir myndvinnslu.

Myndin á forsíðunni er tekin úr greininni *Lyapunov Function Verification: MATLAB Implementation* eftir Skúla Guðmundsson og Sigurð F. Hafstein sem birt var í ráðstefnuriti *Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON)* 2015.

Efnisyfirlit

1. hluti.

1. Inngangur

1.1 Mengi og tákn

Skilgreining 1.1.1 — Óformleg. **Mengi** er samsafn af hlutum eða stökum sem hafa *ótvíræða* auðkenningu (lýsingu) en hægt er að greina stökin hvert frá öðru. Mengi eru oftast táknuð með hástöfum $A, B, C, D, \ldots$ en stök mengis með lágstöfum $a, b, c, d, \ldots$.

Með öðrum orðum, er mengi *vel skilgreint* (*e. well-defined*) eða *ótvírætt* samsafn af stökum. Ef endanlega mörg stök eru í mengi þá er hægt að telja öll stökin upp; ef A er látið tákna mengi allra tölustafa í tvíundakerfinu þá er $A = \{0, 1\}$. Mengi náttúrlegu talnanna, talnanna sem notum oftast til telja hluti, er svo dæmi um óendanlegt mengi $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Tölurnar í tvisvar sinnum töflunni (sléttu tölurnar) mynda einnig mengi, af því að enginn vafi leikur á því hvort gefin tala er í tvisvar sinnum töflunni eður ei. *Allt skemmtilegt fólk* er hins vegar ekki mengi; það er ekki *ótvírætt* hver er skemmtilegur og hver er það ekki.

Táknmál

Látum A og B vera mengi:

x er (stak) í menginu A	$x \in A$
x er ekki (stak) í menginu A	$x \notin A$
A er hlutmengi í B	$A \subseteq B$
Sammengi A og B	$A \cup B$
Sniðmengi A og B	$A \cap B$
Faldmengi A og B	$A \times B$
Mengi allra staka x þannig að $P(x)$ gildir þar sem $P(x)$ er einhver fullyrðing um x	$\{x \mid P(x)\}$

■ **Dæmi 1.1** $\{2n-1 \mid n = 1, 2, 3, \ldots\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ er mengi oddatalnanna. ■

Fullyrðing er setning sem er annað hvort sönn eða ósönn. Látum P og Q vera fullyrðingar:

Ef P þá Q (Af P leiðir Q)	$P \Longrightarrow Q$
Q ef P (Q leiðir af P)	$Q \Longleftarrow P$
P þá og því aðeins að Q (P jafngildir Q)	$P \Longleftrightarrow Q$
fyrir öll x	$\forall x$
til er x	$\exists x$

Jákvæðar tölur eru allar tölur sem eru stærri en núll, en **neikvæðar tölur** eru allar tölur minni en núll. Talan núll er hvorki jákvæð (viðlæg) né neikvæð (frádræg). Tala sem er stærri eða jöfn núlli (*e. non-negative*), $a \geq 0$, er sögð vera **ekki neikvæð**, *frekar jákvæð* eða *ófrádræg*. Tala sem er minni eða jöfn núlli (*e. non-positive*), $b \leq 0$, er sögð vera **ekki jákvæð**, *frekar neikvæð*, eða *óviðlæg*.[1]

Algeng talnamengi eða talnakerfi hafa frátekin tákn

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ er **mengi náttúrlegra talna**, tölurnar sem við notum venjulega til að telja hluti. Þær kallast einnig **jákvæðar heiltölur**.

> Hversu hátt sem við teljum, má alltaf telja hærra. Náttúrlegu tölurnar eru því sagðar vera teljanlega óendanlega margar; táknað $\#\mathbb{N} = \infty$. Táknið ∞ stendur fyrir **óendanlegan fjölda**.

$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ er mengið sem inniheldur núll og náttúrlegar tölur. [2]
$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ er mengi **heiltalna** (*e. integers*)[3]
$\mathbb{Z}_+$ er mengi **jákvæðra heiltalna**[4]
$\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ táknar **neikvæðar heiltölur**.
$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ er mengi **almennra brota** (*e. common fractions*).[5]

Sum almenn brot er hægt að skrifa sem endanleg **tugabrot** (*e. terminating decimal fraction*):[6] Til dæmis er $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0.4$, þannig að almenna brotið $2/5$ er sama talan og tugabrotið 0.4. Með deilingu fæst t.d. að $\dfrac{31}{20} = 1.55$ og $\dfrac{21}{8} = 2.625$ eru endanleg tugabrot.

MATLAB
```
» format short
» [31/20 21/8]
ans =
   1.5500 2.6250
```

[1]Hér er stuðst við Orðaskrá Íslenska stærðfræðafélagsins á síðunni `http://www.stae.is`

[2]Sumir taka $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sem mengi náttúrlegra talna og tákna með $\mathbb{N}$.

[3] (*þ. Zahlen*).

[4]Sumir skrifa $\mathbb{Z}_+$ í staðinn fyrir $\mathbb{N}$.

[5] Takið eftir að $b \neq 0$ af því að deiling með núlli er óskilgreind. Til að sjá betur af hverju, skulum við láta sem svo að auk þess að núll sinnum hvaða tala sem vera skal sé núll, að þá sé deiling með núlli skilgreind. Setjum t.d. $\frac{1}{0} = k$. Margföldum í gegn með 0 og fáum $1 = k \cdot 0$, og þar sem $k \cdot 0 = 0$ þá er $1 = 0$. Alveg eins hefði mátt prófa $\frac{2}{0} = k$, sem gefur að $2 = 0$. Við sjáum núna að ef deiling með núlli er leyfð í einhverju gefnu talnamengi þá er núll eina talan í því mengi.

[6]Í þessari bók er notaður punktur en ekki komma í tugabrotum til þess að gæta samræmis á milli texta og forrita.

Þegar deilingin gengur ekki upp fáum við óendanleg tugabrot en þau eru **lotubundin**.

$$\frac{2}{3} = 0.\overline{6}, \quad \frac{15}{13} = 1.\overline{153846}, \text{ og } \frac{19}{37} = 0.\overline{513}$$

MATLAB
```
» format long
» [2/3 15/13 19/37]
ans =
   0.666666666666667 1.153846153846154 0.513513513513513
```

Við rifjum upp að sérhvert almennt brot er einnig hægt að skrifa sem tugabrot, annað hvort sem endanlegt tugabrot eða (óendanlegt) lotubundið tugabrot. Ennfremur er hægt að skrifa endanleg tugabrot, t.d. 0.2, sem óendanlegt tugabrot með því að bæta við lotunni núll (óendanlegri runu af núllum aftan við síðasta aukastaf), t.d. $0.2 = 0.2000\ldots = 0.2\overline{0}$. Þá sést að

$\mathbb{Q}$ er mengi allra lotubundinna tugabrota.

Við köllum almenn brot og lotubundin (óendanleg) tugabrot einu nafni **ræðar tölur** (*e. rational numbers*).

■ **Dæmi 1.2** Talan $0.333\ldots = 0.\overline{3}$ er lotubundin tala og því *ræð*. Sýnum að hún hefur líka framsetningu sem almennt brot. Setjum $x = 0.\overline{3}$. Tíföldum og fáum $10x = 3.\overline{3}$.

Leysum jöfnurnar saman (drögum fyrri jöfnuna frá þeirri seinni) og fáum

$$10x - x = 3.\overline{3} - 0.\overline{3} \text{ sem jafngildir } 9x = 3. \text{ Þá er } x = \frac{1}{3} \text{ sem er almennt brot.}$$

■

Við getum fengið meira úr dæminu; þreföldun jöfnunnar $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$ hefur í för með sér að $0.\overline{9} = 1$. Nú sést að sérhverja heiltölu er hægt að rita sem lotubundið tugabrot; t.d. $4 = 3.\overline{9}$. Þetta þýðir þá sér í lagi að heiltölur eru hlutmengi í mengi ræðra talna.

Hugsum okkur nú 10 hliða tening og hliðar númeraðar með tölustöfunum $0, 1, \ldots, 9$ og einn tölustafur á hverri hlið. Við ætlum að búa til tölu með því að kasta teningnum. Fyrstu þrjú köstin gefa, segjum, 5, 2, 3 sem gefur tugabrotið 5.23. Ef við hættum einhvern tímann að kasta teningnum þá er talan sem við mynduðum tugabrot sem hægt er að skrifa sem almennt brot t.d. $5.23457014 = \frac{523457014}{100000000}$ og fullstytt $\frac{261728507}{50000000}$. Ef teningnum er hinsvegar kastað óendanlega oft þá verður að teljast ólíklegt að það verði regla (lota) í uppröðun aukastafanna eins og gildir um óendanleg lotubundin tugabrot. Ef við ímyndum okkur að sérhver rauntala sé mynduð með svona óendanlegu teningakasti þá sér maður fyrir sér að almenn brot eru hverfandi lítill hluti allra rauntalna.

Skilgreining 1.1.2 Tölur sem ekki er hægt að rita sem almenn brot kallast **óræðar tölur** (*e. irrational numbers*).

Dæmi um óræðar tölur eru

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.41421356\ldots, \quad & \pi &= 3.14159265\ldots, \\ e &= 2.71828182\ldots, \quad & \log_2(3) &= 1.58496250\ldots \end{aligned}$$

MATLAB
```
» [sqrt(2) pi; exp(1) log(3)/log(2)]
ans =
   1.414213562373095 3.141592653589793
   2.718281828459046 1.584962500721156
```

■ **Dæmi 1.3** Lausn á jöfnunni $2^x = 3$ er ekki hægt að rita sem almennt brot; m.ö.o. er $x = \log_2 3$ óræð tala[7].

Sönnun. Hér eru nákvæmlega tveir möguleikar og annar útilokar hinn; annað hvort er $\log_2 3$ ræð eða óræð tala. Við sýnum að ef gert er ráð fyrir að talan $\log_2 3$ sé ræð þá leiði það til mótsagnar.[8]

Gerum ráð fyrir $\log_2 3$ sé ræð tala. Þá eru til náttúrlegar[9] tölur a og b þannig að $\frac{a}{b} = \log_2 3$ sem er jafngilt

$$2^a = 3^b. \tag{1.1}$$

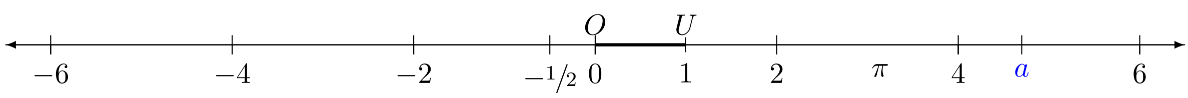
Þegar við setjum jákvæðar heiltölur í staðinn fyrir a og b kemur í ljós að vinstri hliðin í þessari jöfnu er slétt tala, $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \ldots$ en hægri hliðin er oddatala, $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, \ldots$. Jafnan (1.1) er því ómöguleg og við ályktum því að *forsendan*, að $\log_2 3$ sé ræð tala, geti ekki staðist. Því er $\log_2 3$ óræð tala. ■

■

Skilgreining 1.1.3 Við táknum sammengi ræðra og óræðra talna með $\mathbb{R}$ og tölum þá um mengi allra rauntalna; allra talna á rauntalnalínunni.

Rauntalnalínan

Á láréttri línu veljum við punkt O ásamt tölunni 0. Við segjum að O sé **upphafspunktur** og hafi hnitið 0. Veljum annan punkt U til hægri við O og gefum honum hnitið 1. Fjarlægðin á milli O og U kallast **einingarlengd** eða einfaldlega **eining**. Punktur sem er $a > 0$ einingar til hægri við O fær hnitið a; punktur sem er a einingar til vinstri við O fær hnitið $-a$. Svona setjum við fram gagntæka samsvörun á milli punkta á línu og rauntalnanna. Jákvæðar tölur eru til hægri við 0, neikvæðar tölur eru til vinstri við 0. Við tölum jöfnum höndum um rauntölurnar og **rauntalnalínuna**. Við lítum svo á að $\mathbb{R}$ myndi **einvítt hnitakerfi**. Rauntalnalínan er óendanleg í báðar áttir, og stefnir á $+\infty$ til hægri og $-\infty$ til vinstri. Engin tala er þó óendanlega stór; ef $x \in \mathbb{R}$ þá er $-\infty < x < +\infty$.



[7] Lograreglur eru rifjaðar upp á bls. 152.

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Reductio_ad_absurdum

[9] Við megum velja náttúrlegar tölur a og b því ljóst er af jöfnunni $2^x = 3$ að $1 < x < 2$.

Æfingar 1.1

Æfing 1.1.1 Skrifið ræðu tölurnar sem lotubundin tugabrot. Setjið upp deilinguna eins og við lærðum í grunnskóla og sannreynið útkomuna með MATLAB .

(i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{7}$ (iii) $\frac{3}{25}$

■

Æfing 1.1.2 Það að frumþátta náttúrlega tölu er að skrifa hana sem margfeldi frumtalna: $147 = 3 \cdot 7^2$ er frumþáttun tölunnar 147 (3 og 7 eru frumtölur). MATLAB skipunin `factor` gefur frumþætti náttúrlegrar tölu; `factor(147) = [3 7 7]`.
Notið MATLAB til að frumþátta 3025 og 322959. Notið síðan frumþáttunina til að rökstyðja að almenna brotið $\frac{3025}{322959}$ er fullstytt. En hvað fæst ef maður skrifar

```
» format rat
» 3025/322959
```

í Skipanagluggann (Command Window) í MATLAB ? ■

Æfing 1.1.3 Skrifið tugabrotin sem almenn brot og fullstyttið þegar það er hægt. Dæmi 1.2 gæti komið að gagni.

(i) 0.11 (ii) 0.12 (iii) $0.\overline{11}$ (iv) $0.\overline{12}$ (v) $0.4\overline{9}$

■

Æfing 1.1.4 Lítum á jöfnuna

$$5^x = 10 \tag{1.2}$$

(i) Finnum nálgunarlausn $p \approx x$ á jöfnu (1.2) þannig að $0 < 5^p - 10 < 10^{-4} = 0.0001$.
Rétt gildi x liggur á milli 1 og 2 af því að $5 = 5^1 < 5^x = 10 < 5^2 = 25$. Prófa fyrst $p_1 = 1.5$.

p	5^p	$10 - 5^p$	Athugasemd
$p_1 = 1.5$	$5^{1.5} \approx 11.18$	$10 - 5^{p_1} \approx -1.18 < 0$	Utan skekkjumarka, p_1 of stór
$p_2 = 1.4$	$5^{1.4} \approx 9.52$	$10 - 5^{p_2} \approx 0.48 > 10^{-6}$	Utan skekkjumarka, p_2 of lítil
$p_3 = 1.45$	$5^{1.45} \approx 10.316$	$10 - 5^{p_3} \approx -0.316 < 0$	p_3 of stór ...

Prófið ykkur áfram. Bætið við aukastöfum í öðrum dálki þegar þeim fjölgar í fyrsta dálki. Ljúkið við töfluna.

(ii) Sýnið að lausn á jöfnu (1.2) er óræð tala.
(iii) Skoðið Skilgreiningu 5.3.1 á bls. 152. Notið reiknireglurnar bls. 152 og finnið x með 5 réttum aukastöfum í MATLAB .

■

1.2 Aðgerðir á mengi

Talnamengi má oft lýsa á nokkra vegu. Lítum á mengið

$$A \equiv \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \right\}.$$

Við lesum á íslensku: *A er mengi allra rauntalna sem hafa þann eiginleika að fullyrðingin $x^2 - 3x + 2 = 0$ gildi um þær*. Þetta er reyndar óþarflega löng lýsing á menginu, og maður segir kannski frekar: A er mengi allra rauntalna sem uppfylla jöfnuna $x^2 - 3x + 2 = 0$, eða jafnvel enn einfaldar, mengið A inniheldur allar rauntölulausnir á jöfnunni $x^2 - 3x + 2 = 0$. Við getum reyndar einfaldlega talið upp hvaða tölur eru í menginu A. Það er til dæmis alveg rétt að skrifa $A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 2 \}$ (lesið: A er mengi allra heiltalna sem eru stærri en núll og minni eða jafnar 2). En við hljótum að leita að eins einfaldri lýsingu á A og hægt er, nefnilega:

$$A = \{ 1, 2 \} \text{ eða } A = \{ 2, 1 \}.$$

Mengið A hefur nákvæmlega tvö stök, táknað $\#A = 2$. Það er líka eðlilegt að hugsa sem svo að sérhverjir tveir aðgreinanlegir hlutir myndi mengi; tveggja staka mengi.

Skilgreining 1.2.1
Ef mengi S hefur endanlega mörg stök, þá segjum við að S sé **endanlegt mengi** (*e. finite set*) .
Ef mengi S hefur n mörg stök er það táknað $\#S = n$. Við segjum þá eins að **fjöldatala** mengisins S sé n .
Ef mengið S hefur óendanlega mörg stök, þá segjum við að S sé **óendanlegt mengi** (*e. infinite set*), táknað $\#S = \infty$.
Mengið sem inniheldur engin stök er **tóma mengið**,táknað $\{ \ \}$ eða $\emptyset$. Fjöldatala tóma mengisins er núll, táknað $\#\emptyset = 0$. Við segjum stundum að tóma mengið sé tómt.

ATH Mengið $\{\emptyset\}$ er ekki tómt. Það inniheldur eitt stak; stakið $\emptyset$ sem er tóma mengið. Við gerum greinarmun á *stakinu* a og *menginu* $\{a\}$.

Skilgreining 1.2.2 Látum A og B vera tvö mengi. Ef sérhvert stak í menginu A er einnig stak í menginu B, þá er A **hlutmengi** í B. Þetta ritum við $A \subseteq B$.

■ **Dæmi 1.4** $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Öll þessi mengi eru óendanleg. ■

Skilgreining 1.2.3 Ef A er hlutmengi í B, en A er ekki mengið B (þ.e. til er að minnsta kosti eitt stak í B sem er ekki stak í A), þá er A **eiginlegt hlutmengi** (*e. proper subset*) í B. Ef við viljum sérstaklega taka fram að A er eiginlegt hlutmengi í B, þá getum við skrifað $A \subsetneq B$. ,

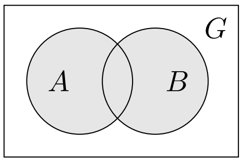
■ **Dæmi 1.5** Mengið $\{2, 3\}$ er eiginlegt hlutmengi í $\{1, 2, 3\}$. Sérhvert mengi er hlutmengi í sjálfu sér, en er ekki eiginlegt hlutmengi. Tóma mengið er hlutmengi í sérhverju mengi, og jafnframt eiginlegt hlutmengi í öllum mengjum nema sjálfu sér. Auðvitað er $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ en yfirleitt er látið nægja að skrifa $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. ■

Við höfum séð að *Allt skemmtilegt fólk* skilgreinir ekki mengi, en *Allt skemmtilegt fólk* er auðvitað hluti af mengi *Alls fólks*, þ.e. allra manna. Er þá allt skemmtilegt fólk hlutmengi í mengi *Alls fólks*? Brýtur þetta í bága við Skilgreiningu 1.2.2 ?

Látum **grunnmengið** G vera gefið og látum A og B vera gefin hlutmengi í G.

Skilgreining 1.2.4 Mengi þeirra staka sem eru annað hvort í A eða B eða í þeim báðum er táknað með $A \cup B$ og kallast **sammengi** A og B. Táknað

$$A \cup B \equiv \{x \in G \mid x \in A \text{ eða } x \in B\}.$$



Mynd 1.1: $A \cup B$

Hér er samtengingin *eða* í skilgreiningunni ekki *útilokandi* (*e. exclusive*) heldur *innihaldandi* (*e. inclusive*).

■ **Dæmi 1.6**

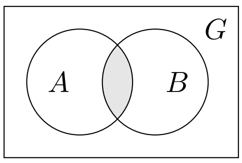
- „Annað hvort stenst nemandi próf *eða* hann fellur á prófinu“. Þetta er útilokandi *eða*. Ekki er bæði hægt að falla á prófi og ná því í senn.
- „Hægt er að fá nánari upplýsingar í síma *eða* á vefsíðu fyrirtækisins“. Þetta er innihaldandi *eða*. Enda er hægt að gera hvort í senn, að hringja eða skoða vefsíðuna, til að fá upplýsingar.

■

■ **Dæmi 1.7** Fyrir $A = \{16, 17\}$ og $B = \{17, 18\}$ fæst $A \cup B = \{16, 17, 18\}$. ■

Skilgreining 1.2.5 Mengi þeirra staka sem eru sameiginleg mengjunum A og B er táknað með $A \cap B$ og kallast **sniðmengi** A og B. Við höfum

$$A \cap B \equiv \{\, x \in G \mid x \in A \;\text{ og }\; x \in B \,\}\,.$$



Mynd 1.2: $A \cap B$

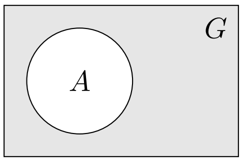
■ **Dæmi 1.8** Ef $A = \{\,16,\ 17\,\}$ og $B = \{\,17,\ 18\,\}$ þá er $A \cap B = \{\,17\,\}$. ■

ATH Í dæminu hér á undan væri ekki rétt að skrifa $A \cap B = 17$ því $A \cap B$ er mengi en ekki tala; nefnilega mengið $\{\,17\,\}$ sem inniheldur töluna 17.

Skilgreining 1.2.6 Látum G vera grunnmengi og $A \subseteq G$. Mengi þeirra staka í G sem eru ekki í A er kallað **fyllimengi** (*e. complementary subset*) A í G. Fyllimengi A í G er táknað

$$G \setminus A \equiv \{ x \in G \mid x \notin A \}$$

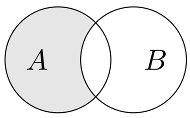
og einfaldlega með A^C ef augljóst er hvert grunnmengið G er.



Mynd 1.3: $A^C = G \setminus A$

■ **Dæmi 1.9** Saman mynda ræðar og óræðar tölur rauntalnamengið $\mathbb{R}$. Engin tala er í senn ræð og óræð og því mynda óræðu tölurnar fyllimengi ræðu talnanna í $\mathbb{R}$, táknað $\mathbb{Q}^C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ■

Skilgreining 1.2.7 Við skilgreinum $A \cap B^C$ sem mengjamismun A og B; táknum hann með $A \setminus B$.



Mynd 1.4: $A \setminus B$

■ **Dæmi 1.10** Ef $A = \{16, 17\}$ og $B = \{17, 18\}$ þá er $A \setminus B = \{16\}$ og $B \setminus A = \{18\}$. ■

Skilgreining 1.2.8 Mengi eru **sundurlæg** ef þau eiga ekkert sameiginlegt stak. A og B eru sundurlæg ef $A \cap B = \emptyset$.

Regla 1.2.1 Um öll mengi A og B gildir

(i) $A \subseteq A \cup B$ og $B \subseteq A \cup B$ (ii) $A \cap B \subseteq A$ og $A \cap B \subseteq B$

ATH Séu nákvæmlega sömu stök í A og B, þá gildir hvort tveggja $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$ og því $A = B$. Þetta er sú leið sem oft er farin til að sýna að tvö mengi séu sama mengið; sýna að A sé hlutmengi í B og líka að B sé hlutmengi í A.

Skilgreining 1.2.9 **Faldmengi** mengja A og B er mengið $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ og } b \in B \}$.

■ **Dæmi 1.11** Ef $A = \{ 1, 2, 3 \}$ og $B = \{ 4, 5 \}$ þá er faldmengi A við B mengið

$$A \times B = \{ (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5) \}$$

. ■

Almennt gildir ekki að $A \times B = B \times A$.

Faldmengið $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, einnig skrifað $\mathbb{R}^2$, köllum við **rauntalnasléttuna** og hún myndar **tvívítt hnitakerfi**.

Seinna í námskeiðinu lærum við um enn eitt talnamengið til viðbótar, **tvinntölur**, táknað með $\mathbb{C}$. Tvinntölur hafa stefnu og lengd rétt eins og vigrar í $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tvinntalan $z = 3 + 4i$ hefur sömu myndrænu framsetningu og vigurinn $\overline{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Þegar maður hefur vanist tvinntölunum er oft auðveldara og gagnlegra að vinna í $\mathbb{C}$ heldur en í $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Æfingar 1.2

Æfing 1.2.1 Hakið við réttar fullyrðingar.

(i) ☐ $\frac{5}{2} \in \mathbb{Z}_+$
(ii) ☐ $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$
(iii) ☐ $+\infty \in \mathbb{N}$
(iv) ☐ $\pi \subseteq \mathbb{R}$
(v) ☐ $\{\pi\} \subseteq \mathbb{R}$
(vi) ☐ $\pi \in \mathbb{Q}$
(vii) ☐ $\pi \in \mathbb{R}$
(viii) ☐ $\emptyset \in \mathbb{R}$
(ix) ☐ $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$

■

Æfing 1.2.2 (i) Gefið er mengið $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = \frac{1}{4}\}$. Finnið einfaldari framsetningu á menginu A (finnið allar tölur x sem eru í A).
(ii) Gefið er mengið $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = \frac{1}{4}\}$. Finnið einfaldari framsetningu á menginu B.

■

Æfing 1.2.3 Látum A, B, D, E vera eftirfarandi mengi: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{\pi, \sqrt{2}, e\}$; $D = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $E = \{1, 3, 5\}$. Finnið mengin

(i) $A \cup B$
(ii) $A \cap D$
(iii) $A \setminus E$
(iv) $D \setminus A$
(v) $A \times E$
(vi) D^C þegar grunnmengið er $\mathbb{Z}$.

■

Æfing 1.2.4 $\{1, a^2\} \subseteq \{1, 3\}$ ef og aðeins ef

(i) ☐ $a = \sqrt{3}$
(ii) ☐ $a \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
(iii) ☐ $a \in \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$
(iv) ☐ $a \in \{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$

■

Æfing 1.2.5 Látum $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{4, 5\}$ vera mengi. Skrifið upp faldmengi B við A, mengið $B \times A$. ■

Æfing 1.2.6 Ef $A \cup B = A$ og $A \cap B = A$, Sýnið að þá er $A = B$.
Ábending: Notið Reglu 1.2.1 á bls. 18 og athugasemd sem fylgir reglunni. ■

1.3 Röðun rauntalna

Látum a, b og c vera rauntölur.

(i) Nákvæmlega eitt af þrennu gildir: $a < b,\ b < a$ eða $a = b$
(ii) Ef $a < b$ og $b < c$, þá er $a < c$.
(iii) Ef $a < b$ og $0 < c$, þá er $ac < bc$
(iv) Ef $a < b$ og $c < 0$, þá er $bc < ac$.

Engin göt eru á rauntalnalínunni.

Á milli sérhverra tveggja rauntalna a og b er rauntala, t.d. er $\frac{a+b}{2}$ á milli a og b. Þessi einfalda athugun leiðir af sér að óendanlega margar rauntölur eru á milli sérhverra tveggja rauntalna. Það er hins vegar ekki jafnaugljóst að á milli sérhverra tveggja rauntalna er alltaf til almennt brot, en það er ekki erfitt að sanna það.

Af þessu sést líka að ekki er til nein jákvæð rauntala sem er minnst allra. *Til að sjá það, skulum við gera ráð fyrir $a > 0$ sé minnsta jákvæða rauntalan. En meðaltal 0 og a, sem er $a/2$ eða helmingurinn af a, væri þá jákvæð rauntala minni en a. Forsendan, að til sé minnsta jákvæða rauntalan, stenst því ekki.*

Tölugildi

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ef } a \geq 0 \\ -a & \text{ef } a < 0 \end{cases} \qquad \text{eða} \qquad |a| = \sqrt{a^2} \tag{1.3}$$

önnur auðkenning: $|a| = \max\{a, -a\}$
rúmfræðileg túlkun: $|a|$ er fjarlægðin á milli a og 0.

Almennar er $|a - c|$ tölugildið af $a - c$, stundum er þá talað um **fjarlægðina** á milli a og c eða **lengd bilsins** sem hefur endapunkta a og c.

■ **Dæmi 1.12** Ef $a = -3$, þá er

$$|a| = |-3| = 3 \text{ af því að } a < 0.$$
$$|a| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Einnig er hægt að auðkenna tölugildi sem þá töluna sem stærri er þegar tala er borin við samlagningarandhverfu sína

$$|a| = \max\{-3, -(-3)\} = 3.$$

Loks: Fjarlægðin frá -3 að 0 er 3.
MATLAB

```
>> format rat
>> X=[-1 7 3+4i], abs(X)
X =
-1  + 0i           7  +  0i           3   +  4i
ans =
1             7             5
>>
```

Fallið `abs(X)` skilar tölugildi talnanna -1 og 7. Eins og í smiðsþríhyrningnum er talan 5 lengd tvinntölunnar $3+4i$, táknað $|3+4i| = 5$ ■

Tölugildisreglur - lengdarmælingar

Regla 1.3.1 — Um lengdir. Ef $a, b \in \mathbb{R}$ þá höfum við eftirfarandi reglur

(i) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
(ii) $|-a| = |a|$
(iii) $|ab| = |a||b|$
(iv) $|a+b| \leq |a| + |b|$ Þríhyrningsójafna
(v) $|a-b| \leq |a| + |b|$ Þríhyrningsójafna
(vi) $|a| - |b| \leq |a-b|$
(vii) $|a|^2 = |a^2| = a^2$

Segjum að (i), (ii) og (vii) séu augljósar út frá eiginleikum rauntalna. Til að sjá að (iii) er rétt, er hægt að skoða alla möguleika á margfeldi a og b. Látum nægja að skoða tilvikið þegar $a < 0$ og $b > 0$: Þá er talan $ab < 0$ svo að samkvæmt skilgreiningu á tölugildi er $|ab| = -ab$. Athugum svo að $|a| = -a$ af því að a er neikvæð og $|b| = b$ af því að b er jákvæð. Þá er $ab < 0$ svo að $|ab| = -ab = -a \cdot b = |a| \cdot |b| = |a||b|$.

Sönnum (iv), að ójafnan $|a+b| \leq |a| + |b|$ gildi fyrir allar rauntölur a og b.

Sönnun. Í skilgreiningu á tölugildi felst að $ab \leq |ab| = |a||b|$. Þá fæst

$$
\begin{aligned}
|a+b|^2 \overset{\text{skv. (vii)}}{=} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\
&= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.
\end{aligned}
$$

Stærðirnar $|a|, |b|$ og $|a+b|$ eru aldrei neikvæðar, svo að röðunin $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ helst óbreytt þegar ferningsrót er dregin af báðum hliðum, þ.e.

$$
|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2 \iff |a+b| \leq |a| + |b|.
$$

■

Skilgreining 1.3.1 **Rauntalnabil**, eða bil, er rauntalnamengi með þeim eiginleikum að sérhver tala sem liggur á milli tveggja talna sem eru í menginu er einnig í menginu.

Ef gefið er að 1 og 2 eru á gefnu bili þá vitum við jafnframt að allar tölur á milli þeirra eru líka á bilinu. Rauntalnabil sem ekki er $\emptyset$ getur innihaldið báða endapunkta sína, annan endapunktinn eða hvorugan.

Opin og lokuð rauntalnabil.

Látum a og b vera rauntölur þannig að $-\infty < a < b < +\infty$. Rauntalnabil af gerðinni $]\,a\,,b\,[\, \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\,\}$ sem inniheldur hvorugan endapunktanna a og b er sagt vera **opið bil**. Rauntalnabil $[\,a\,,b\,] \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\,\}$ sem inniheldur báða endapunkta sína a og b er sagt vera **lokað bil**. Við segjum að $\mathbb{R} = \,]-\infty\,,+\infty\,[$ sé rauntalnalinan. Við fáum síðan 10 gerðir rauntalnabila á rauntalnalínunni

$$\begin{array}{ll}
[\,a\,,a\,] \equiv \{\,a\,\} & \text{eins punkts bil} \\
]\,a\,,b\,[\, \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\,\} & \text{opið bil} \\
[\,a\,,b\,[\, \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\,\} & \text{hálfopið bil, opið að ofan} \\
]\,a\,,b\,] \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\,\} & \text{hálfopið bil, opið að neðan} \\
[\,a\,,b\,] \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\,\} & \text{lokað bil} \\
]-\infty\,,b\,[\, \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < b\,\} & \text{opin hálflína} \\
]-\infty\,,b\,] \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le b\,\} & \text{lokuð hálflína} \\
]\,a\,,+\infty\,[\, \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > a\,\} & \text{opin hálflína} \\
[\,a\,,+\infty\,[\, \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\,\} & \text{lokuð hálflína} \\
\emptyset & \text{tóma bilið}
\end{array} \tag{1.4}$$

Opnu hálflínurnar $]a,+\infty[\,,\,]-\infty,b[$ eru opin bil. Lokuðu hálflínurnar $[a,+\infty[\,,\,]-\infty,b]$ eru skilgreindar sem lokuð bil.

■ **Dæmi 1.13**

Lokaða bilið $[\,0,1\,]$ inniheldur allar rauntölur á milli 0 og 1 og endapunktana 0 og 1.
Allar rauntölur á milli 0 og 1 liggja á opna bilinu $U = \,]\,0\,,1\,[$ en endapunktarnir 0 og 1 eru ekki á bilinu; með öðrum orðum er sérhver tala x þannig að $0 < x < 1$ á bilinu U.
Um hálfopna bilið $I = [\,0,1\,[$ gildir að $0 \in I$ en $1 \notin I$; með öðrum orðum er sérhver tala x þannig að $0 \le x < 1$ á bilinu I.

■

■ **Dæmi 1.14** Mengið $[\,0\,,1\,] \cup [\,3\,,4\,]$ er **sammengi tveggja bila**, en er sjálft ekki bil samkvæmt skilgreiningunni. Við sjáum að 0 og 4 eru í menginu en það inniheldur ekki allar tölur á milli 0 og 4.

Mengið $[0,1] \cap [3,4]$ er **sniðmengi tveggja sundurlægra bila** og er því tómt. ■

Takmörkuð mengi

Skilgreining 1.3.2 Rauntalnamengi S er sagt:
(i) **Takmarkað að ofan** ef til er rauntala M þannig að $x \le M$ fyrir öll $x \in S$. Talan M kallast **efri mörk** eða **yfirtala** fyrir S.
(ii) **Takmarkað að neðan** ef til er rauntala m þannig að $x \ge m$ fyrir öll $x \in S$. Talan m kallast **neðri mörk** eða **undirtala** fyrir S.
(iii) **Takmarkað** ef það er takmarkað að ofan og takmarkað að neðan.

■ **Dæmi 1.15** Rauntalnabilin $[a,b]$ og $]a,b[$ eru takmörkuð. ■

■ **Dæmi 1.16** Látum $x_1 = 2$ og skilgreinum talnarunu með endurkvæmri formúlu $x_{k+1} = \sqrt{6x_k - 5}$ fyrir $k \in \mathbb{N}$.

(i) Skrifið út tíu fyrstu liði rununnar (x_k), þ.e. tölurnar

$$(x_k)_{k=1}^{10} \equiv (\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\,).$$

(ii) Hvaða heiltala virðist góð nálgun á x_n þegar n er stór náttúrleg tala?

(iii) Tölurnar í rununni $(x_k)_{k=1}^{10}$ mynda talnamengið

$$S_{10} \equiv \{\, x_k \mid k = 1, 2, \ldots, 10\,\} = \{\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\,\}\,.$$

Sýnið að mengið S_{10} er takmarkað með því að finna neðri mörk og efri mörk fyrir S_{10} (finnið t.d. minnsta og stærsta stak rununnar $(x_k)_{k=1}^{10}$).

Lausn

(i) Opnum `m` skrá í MATLAB og vistum hana sem `runa.m`. Þessi skrá á að skrifa út 10 fyrstu liði rununnar (x_k).

■ Keyrsluskrá 1

```
format long
n=10;               % fjöldi staka í vigri
x = zeros(1,n) ;    % linuvigur með n-mörgum núllum
x(1) = 2;           % Fyrsta stakid i x er 2

for k = 2:n
  x(k) = sqrt(6*x(k-1)-5);
end
S = x'
```

Keyrum út og fáum vaxandi runu af tölum :
MATLAB

```
S =

2.000000000000000
2.645751311064591
3.297651871618280
3.845245275624128
4.251055357642943
4.528391783609017
4.708540187962093
4.821954077733690
4.892006180127140
4.934778321339556

>>
```

(ii) Breytum nú skránni `runa.m` þannig að við setjum `n=100000` og í staðinn fyrir að skrifa alla talnarununa `x'` látum við nægja að skrifa út síðasta stakið `x(n)` í rununni. Bætum líka við línunni `skekkja = 5 - x(n)` neðst í keyrsluskrána. Þegar við keyrum skrána út núna fæst að hundrað þúsundasta talan í S er `x(n) = 4.999999999999999` og einnig sést að munurinn á 5 og x_n er jákvæð tala af stærðargráðunni 10^{-16} (sannreynið þetta). Við getum því fullyrt að ef n er tekið nógu stórt þá sé heiltalan 5 góð nálgun á x_n fyrir allflest verkefni.

(iii) Minnsta talan í S er 2, svo að 2 er undirtala fyrir S (og allar tölur minni en 2 eru þá einnig undirtölur fyrir S).
Staðhæfing: *5 er yfirtala fyrir S.*
Ef $x_n \leq 5$ þá er $6 \cdot x_n \leq 30$, og $6 \cdot x_n - 5 \leq 25$ og þegar ferningsrót er dregin af tölu sem er í mesta lagi 25 fæst tala sem er í mesta lagi 5. Semsagt ef $x_n \leq 5$ þá er $x_{n+1} = \sqrt{6x_n - 5} \leq 5$, með öðrum orðum, liðir rununnar virðast nálgast 5 en geta aldrei tekið hærra gildi en 5.
Hugsum okkur að liður með númer N í rununni taki gildið $x_N = 5$; setjum hann inn í endurkvæmu formúluna $x_{N+1} = \sqrt{6x_N - 5}$, þá fæst $x_{N+1} = \sqrt{6 \cdot 5 - 5} = 5$, þ.e. $x_n = 5$ fyrir öll $n \geq N$.

Nú er fengið fram: Þar sem $x_0 < 5$ þá er $x_n \leq 5$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ svo að 5 er yfirtala fyrir S, og þar sem talnarunan er vaxandi er 2 er undirtala fyrir S. Þá er mengið S takmarkað.

Hvernig runa skyldi fást ef $x_1 = 7$?

■

ATH Ef M er yfirtala fyrir talnamengi S, þá er sérhver tala stærri en M einnig yfirtala fyrir S, og ef m er undirtala fyrir S þá er sérhver tala sem er minni en m einnig undirtala fyrir S. Ef ekki er til nein yfirtala fyrir S þá er S sagt vera **ótakmarkað að ofan** eða að það hafi **engin efri mörk**, og ef ekki er til nein undirtala fyrir S, þá er S sagt vera **ótakmarkað að neðan** eða hafi **engin neðri mörk**.

■ **Dæmi 1.17** Bilin $]-\infty, 10]$ og $]-\infty, 10[$ hafa bæði yfirtölu 10 og er því takmörkuð af ofan (af 10 og sérhverri tölu stærri en 10), en þau eru bæði ótakmörkuð að neðan. Mengi jákvæðra heiltalna $\mathbb{N}$ er ótakmarkað að ofan, þ.e. hefur *engin efri mörk* af því að ekki er til nein tala M sem er stærri en allar aðrar náttúrlegar tölur. $\mathbb{N}$ er takmarkað að neðan af 1 (og öllum tölum minni en 1). Öll endanleg mengi eru takmörkuð, takmörkuð að ofan af stærsta staki mengisins og takmörkuð að neðan af minnsta staki. Mengið $\mathbb{Z}$ er ótakmarkað bæði að ofan og neðan. ■

Æfingar 1.3

Æfing 1.3.1 (i) Notið skilgreiningu á tölugildi til að sýna fram á að að hægri hlið jöfnunnar $\max\{a, b\} = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|a-b|}{2}$ gefi a ef $a \geq b$ en gefi b ef $a < b$. Athugið að $\frac{a+b}{2}$ er meðaltal a og b en $\frac{1}{2}|a-b|$ er hálf lengd bilsins sem hefur endapunkta a og b. Jafnan gefur því til kynna, að ef farið er hálft bilið á milli tveggja talna til hægri frá meðaltali talnanna þá fáist stærri talan.
(ii) Finnið áþekka jöfnu fyrir $\min\{a, b\}$ sem skilar a ef $a < b$ en gefur b ef $a \geq b$. ■

Æfing 1.3.2 Látum $x_0 = \frac{19}{4}$ og skilgreinum talnarunu með endurkvæmri formúlu $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$ fyrir $n = 1, 2, 3, \ldots$

(i) Skrifið út 100 fyrstu stökin í rununni sem myndar mengið S, þ.e. $S_{100} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{99}\}$. (*Ábending: Fylgið keyrsluskrá í Dæmi 1.16.*)

(ii) Hvaða heiltala er góð nálgun á x_n þegar n er stór náttúrleg tala?

(iii) Sýnið að mengið S er takmarkað með því að finna neðri mörk og efri mörk fyrir S.

■

1.4 Nokkrar algebrureglur

Aðfeldi

Látum n vera jákvæða heiltölu. Aðfeldi tölunnar n, táknað $n!$, er margfeldi allra jákvæðra heiltalna frá og með n að 1, og við skilgreinum $0! = 1$.

$$
\begin{aligned}
&n! = n \cdot (n-1)! \text{ eða} \\
&n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1.
\end{aligned}
$$

Sér í lagi er $1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3! = 24,$ og svo framvegis

Veldi og rætur

a rauntala, p jákvæð heiltala	$a^1 = a, \quad a^p = \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{p \text{ sinnum}}$
	$a \neq 0: \quad a^0 = 1, \quad a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$
veldisvísareglur	$a^{p+q} = a^p a^q, \quad a^{p-q} = \dfrac{a^p}{a^q}, \quad (a^q)^p = a^{pq}$
a rauntala, q oddatala	$a^{1/q}$ kallast q-ta rótin af a, og er rauntalan b þannig að $b^q = a$.
a ófrádræg, q slétt	$a^{1/q}$ er ófrádræga talan b þannig að $b^q = a$.
tvennskonar ritháttur fyrir rætur	$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$, sér í lagi er $a^{1/2} = \sqrt{a}$.
ræð veldi	$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p$.

■ **Dæmi 1.18**

$$
\begin{aligned}
&10^1 = 10, \quad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100, \quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \\
&10^0 = 1, \quad 10^{-1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \\
&2^{3+5} = 2^3 \cdot 2^5 = 8 \cdot 32 = 256, \quad 2^{5-3} = 2^2 = 4, \quad 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \\
&(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729 \\
&27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3, \quad 9^{\frac{1}{2}} = 3, \quad 81^{\frac{3}{4}} = (81^{\frac{1}{4}})^3 = 3^3 = 27.
\end{aligned}
$$

MATLAB

```
>> [10^1   10^2    10^3]
ans =
         10         100        1000
>> [10^0   10^-1   10^-2]
ans =
    1.0000    0.1000    0.0100
>> (3^2)^3
ans =
   729
[27^(1/3)   9^(1/2)    81^(3/4)]
ans =
   3    3   27
```

■

■ **Dæmi 1.19** Við þurfum þó að vera á varðbergi þegar við drögum teningsrætur af neikvæðum tölum með reiknivélum, og almennt þegar rætur eru dregnar af neikvæðum tölum. Hingað til höfum við óhikað skrifað $\sqrt[3]{-27} = -3$ af því að $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$ en MATLAB gefur

```
>> (-27)^(1/3)
ans =
    1.500000000000000 + 2.598076211353316i
```

og það er rétt svar, af því að þessi tala hafin í þriðja veldi er -27. *Þegar við tölum um tvinntölurnar þá fáum við skýringu á þessu. Sjá Reglu 9.5.2 í Viðauka.* ■

1.4.1 Samlagningarreglur

$$\begin{aligned}
\text{Ferningsregla summu} \quad & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 && (1.5)\\
\text{ferningsregla mismunar} \quad & (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 && (1.6)\\
\text{teningssregla summu} \quad & (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 && (1.7)\\
\text{teningsregla mismunar} \quad & (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 && (1.8)\\
\text{mismunur ferninga (samokaregla)} \quad & a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) && (1.9)\\
\text{mismunur teninga} \quad & a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) && (1.10)\\
\text{summa teninga} \quad & a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) && (1.11)\\
& a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) && (1.12)
\end{aligned}$$

Fyrir $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Til að *þátta* liðastærð má prófa að nota MATLAB skipunina `factor`

```
>> syms a b
>> factor(a^5-b^5)
ans =
(a - b)*(a^4 + a^3*b + a^2*b^2 + a*b^3 + b^4)
```

Til að *liða* er hægt að nota MATLAB skipunina `expand`

```
>> syms a b
>> expand((a - b)*(a^4 + a^3*b + a^2*b^2 + a*b^3 + b^4))
ans =
a^5-b^5
```

Rætur annars stigs margliðu

■ **Dæmi 1.20** Það að finna rætur margliðu eins og farið er að í þessu dæmi, kallast **núllþáttun**:
Finnum rætur (lausnir) annars stigs jöfnunnar $x^2 = 25$. Umritum jöfnuna yfir á formið $x^2 - 5^2 = 0$ og þáttum vinstri hlið skv. samokareglu:

$$(x-5)(x+5) = 0.$$

Þessi síðasta jafna er uppfyllt ef $x = 5$, því að þá fæst $(5-5)(5+5) = 0 \cdot 10 = 0$, og jafnan er líka uppfyllt ef $x = -5$, því að þá fæst $(5-(-5))(5+(-5)) = 10 \cdot 0 = 0$. Annars stigs jöfnur hafa í mesta lagi tvær rauntalnarætur. Jafnan $x^2 = 25$ hefur því nákvæmlega tvær rætur $r_1 = 5$ og $r_2 = -5$. ■

Stundum er **fyllt út í ferninginn** við þáttun ferningsstærða. Útskýrum þetta með dæmi.

■ **Dæmi 1.21** Finnum rætur jöfnunnar $x^2 + 6x = 1$. Stillum upp fyrir **ferningsreglu** (sjá hér á undan), og leggjum við helminginn af stuðlinum við línulega liðinn í öðru veldi beggja vegna jafnaðarmerkisins (þessi aðgerð er kölluð **að fylla út í ferninginn**). Línulegi liðurinn er $6x$, stuðullinn við línulega liðinn er 6. Helmingurinn af 6 er 3.

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 1 + 3^2$$

Þáttum vinstri hlið (skv. 1.5) og einföldum hægri hlið

$$(x+3)^2 = 10,$$

umritum, til að núllþátta

$$(x+3)^2 - 10 = 0$$

og notum samokareglu

$$((x+3) + \sqrt{10})((x+3) - \sqrt{10}) = 0.$$

Síðasta jafnan er uppfyllt ef $x+3+\sqrt{10} = 0$ eða $(x+3) - \sqrt{10} = 0$. Lausn á upphaflegu jöfnunni er því $r_1 = -3 - \sqrt{10}$ og $r_2 = -3 + \sqrt{10}$. Sannreynum það í MATLAB :

```
>> rot1 = -3 -sqrt(10); rot2 = -3 + sqrt(10);
>> jafna1 = rot1^2 + 6*rot1

jafna1 =
     1
>> jafna2 = rot2^2 + 6*rot2

jafna2 =
   1
```

Passar. ■

Rætur annars stigs jöfnunnar $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$, eru gefnar með formúlunni

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

ef $b^2 - 4ac > 0$ þá hefur jafnan tvær rauntalnarætur, ef $b^2 - 4ac = 0$ þá hefur jafnan eina (tvöfalda) rauntalnarót, ef $b^2 - 4ac < 0$ þá eru engar rauntalnarætur en tvær rætur í $\mathbb{C}$ gefnar á forminu

$$r = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{þar sem } i = \sqrt{-1}.$$

Talan a sem stendur við x^2 er **forystustuðull** annars stigs jöfnunnar. Almennar, $n-$ta stigs margliðan

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

hefur forystustuðul a_n, talan a_2 er stuðull ferningsliðarins, a_1 er stuðull línulega liðarins og a_0 er fastaliður margliðunnar.

■ **Dæmi 1.22** Víkjum aftur að Dæmi 1.19. Þáttum jöfnuna $x^3 + 27$ skv. reglunni um summu teninga, og fáum

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

Svo að $x = -3$ er rót. Einnig fást rætur þegar $x^2 - 3x + 9 = 0$. Aðgreinir $x^2 - 3x + 9$ er $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -27 < 0$ svo að $x^2 - 3x + 9$ hefur tvær rætur í $\mathbb{C}$, önnur þeirra er einmitt tvinntalan $\dfrac{-3 + i\sqrt{27}}{2} \approx 1.500 + 2.598i$ sem MATLAB gaf. ■

MATLAB
Fallið `roots` gefur rætur margliðu. Stuðlum margliðunnar

$$p(x) = x^3 - 6x^2 - 72x - 27$$

er raðað upp í línuvigur;

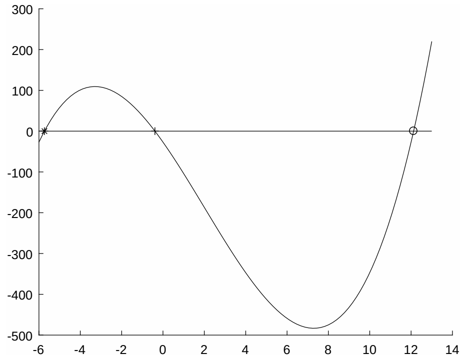
```
>> p = [1 -6 -72 -27]
```

forystustuðullinn (stuðull við hæsta veldi margliðu) kemur fyrstur, fastaliðurinn aftastur. Til að sjá þetta betur skrifum við *keyrsluskrá* sem reiknar út ræturnar og dregur upp graf margliðunnar.

Keyrsluskrá 2

```
  clc, clear all              % hreinsa glugga og breytur
      p = [1 -6  -72  -27];   % Stuðlum margliðunnar er raðað upp í línuvigur
      r = roots(p);           % Reikna út ræturnar, köllum r
      raetur = r.'            % Skrifar út ræturnar sem línuvigurinn "raetur"
                              % mjög lúmsk "villa" hér væri að skrifa
                              %   raetur = r'
                              % því í Matlab er r' samokavektor r, þ.e.
                              % vektornum er bylt og tölunum skipt út fyrir
                              % samokatölur sínar (sjá Viðauka um
                              % tvinntölur).  Svo lengi sem stuðlar p eru
                              % rauntölur gefur r' réttar lausnir, en ef
                              % einhverjir stuðlar p eru tvinntölur þá er
                              % það ekki öruggt.

%% Teikna upp margliðuna
% Vel endapunkta bils út frá minnstu og stærstu rót
% linspace gefur jafnt bil a milli 100 staka i vigrinum x.  Sjá frekar:
% >> help linspace
      x = linspace(-6,13);
% Skilgreini jöfnu margliðunnar
      f = x.^3 - 6*x.^2 - 72*x-27;
% Teikna upp x-ásinn med line skipun;
% frá -6 til 13 fyrir lárétta færslu og frá 0 til 0 fyrir lóðrétta færslu
  line([-6,13],[0,0])
      hold on % til að hafa línuna með næsta fallriti
% Fallrit margliðunnar dregið upp
  plot(x,f)
% Merki ræturnar inn á ferilinn
      plot(r(1),0,'+', r(2),0,'+', r(3),0,'+')
          hold off
% Prenta út mynd sem eps skrá: kalla myndina polnom1
      print -deps polnom1.eps
```

```
raetur =
   12.122893784632391   -5.734509942225072   -0.388383842407320
```



Mynd 1.5: Ferill $p(x) = x^3 - 6x^2 - 72x - 27$ og rætur merktar inn — þ.e. skurðpunktar við $x-$ás.

Æfingar 1.4

Æfing 1.4.1 Reiknið aðfeldið:

(i) $0!$
(ii) $1!$
(iii) $2!$
(iv) $3!$
(v) $4!$
(vi) $5!$
(vii) $6!$
(viii) Er $10!$ stærra en milljón?

■

Æfing 1.4.2 Notið samlagningarreglur 1.4.1 bls. 26 til að þátta (og einfalda). Sýnið útreikninga, notið svo MATLAB skipunina `factor` til að sannreyna niðurstöður.

(i) $x^2 - y^2$
(ii) $x^3 - y^3$
(iii) $x^2 - 2xy + y^2$
(iv) $x^2 + 2xy + y^2$
(v) $\dfrac{(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)}{x^3 - y^3}$

■

Æfing 1.4.3 Notið samlagningarreglur 1.4.1 bls. 26 til að liða (og einfalda). Sýnið útreikninga, notið svo MATLAB skipunina `expand` til að sannreyna niðurstöður.

(i) $(x + y)^2$
(ii) $(x + h)^3$
(iii) $\dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$
(iv) $\dfrac{1.1^2 - 1}{0.1} = \dfrac{(1 + 0.1)^2 - 1^2}{0.1}$
(v) $\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$
(vi) $\dfrac{1.1^3 - 1}{0.1}$
(vii) $\dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h}$

■

Æfing 1.4.4 Notið MATLAB til að reikna út rætur margliðunnar $2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 26x - 12$ og dragið svo upp fallið. *Fylgið MATLAB keyrsluskránni bls. 29. Ekki þarf að láta kóða fylgja skilum en skilið útprentaðri mynd svipaðri Mynd 1.5 á bls. 30.* ■

Æfing 1.4.5 Sækið ykkur forritið `GeoGebra` sem er dreift frítt á netinu. Sláið inn (input): `CompleteSquare`$[2x^2 + 6x + 1]$ og fáið $f(x) = 2(x + 1.5)^2 - 3.5$. Skoðið nú feril fallsins og takið eftir að lægsta gildi ferilsins er tekið í punktinum $x = -1.5$ og lægsta gildið er $f(-1.5) = -3.5$. Sláið inn (input): $A = (-1.5, f(-1.5))$ og fáið A sem botnpunkt ferilsins.

Fyllið í ferninginn og finnið hæsta eða lægsta gildi eftir því sem við á, og sannreynið svörin ykkar í (i) og (ii) með `Geogebra`:

(i) $f(x) = 2x^2 + 6x + 1$ (ii) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ (iii) $f(x) = ax^2 + bx + c$

■

1.5 Ójöfnur

Nú höfum við talað um helstu talnamengin, rifjað upp reglur um röðun rauntalnanna og hvernig á að finna núllstöðvar margliðufalla. Nú snúum við okkur að því að leysa ójöfnur. Lausn á ójöfnu er eitthvert talnamengi; $x > 3$ er t.d. ójafna og í **lausnarmengi** hennar eru allar tölur sem eru stærri en 3, það er opna hálflínan $]3, +\infty]$. Síðarmeir sjáum ennfremur að lausn á ójöfnu getur líka verið svæði í $\mathbb{R}^2$. T.d. er lausnarmengi ójöfnunnar $x + y > 0$ öll pör $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sem uppfylla það að summa x og y er einhver jákvæð tala.

Við einbeitum okkur hér að jöfnum sem eru algengar í stærðfræðigreiningu af einni raunbreytu. Það að leysa ójöfnu fyrir breytuna x þýðir nákvæmlega að tilgreina þarf *allar* rauntölur x sem uppfylla ójöfnuna. Þau x sem það gera mynda mengi sem við köllum **lausnarmengi ójöfnunnar**.

Öfugsnúna goggareglan

Byrjum á nokkrum einföldum athugunum: Röðunin $1 < 2$ ákvarðar einnig röðun á tilsvarandi samlagningarandhverfum $-1 > -2$. Almennar fæst með Reglu 1.3 lið (iv) um röðun rauntalna: *Ef* $a < b$ *og* $c < 0$ *þá er* $bc < ac$. Ef við veljum $c = -1$, fæst að ef $a < b$ þá er $-b < -a$, og ef við margföldum þessa síðustu ójöfnu með -1 þá höfum við auðvitað að

$$a < b \Longleftrightarrow -a > -b.$$

ATH

(a) Óformlega er því stundum sagt um ójöfnur að *goggurinn snúist við* þegar margfaldað er í gegn með -1.
(b) Um ójöfnuna $a < b$ segjum við að a sé á vinstri hlið ójöfnunnar eða a sé vinstri hlið ójöfnunnar, eða a sé vinstra megin. Eins segjum við að b sé á hægri hlið ójöfnunnar $a < b$ eða b sé hægri hlið ójöfnunnar, eða sé hægra megin.

■ **Dæmi 1.23**

(i) Leysum ójöfnuna $x - 4 > 5$. Þetta þýðir að finna á nákvæmlega þau $x \in \mathbb{R}$ sem uppfylla ójöfnuna. Við bætum 4 við hægra megin og 4 við vinstra megin, og köllum það að leggja 4 við báðar hliðar. Þá sést að ójafnan hefur lausnarmengið $x > 9$. Þetta þýðir, að aðeins ef $x > 9$ þá er gefin ójafna uppfyllt og annars ekki. Við getum alltaf sannreynt niðurstöðurnar: Aðeins ef $x > 9$ þá er

$$x - 4 > 9 - 4 = 5. \quad \checkmark$$

Lausnarmengið er oft gefið sem rauntalnabil eða sammengi bila, $x \in]\,9\,, +\infty\,[$. Stundum er gripið í við bókstafinn L til að tákna *Lausnarbil ójöfnunnar*. Svo að þegar skrifað er $L \equiv]\,9\,, +\infty\,[$ þá getur maður t.d. lesið upphátt *lausnarmengi gefinnar ójöfnu er nákvæmlega; allar rauntölur stærri en níu.*

(ii) Ójafnan $2 + x < 1$ hefur lausnarmengið $x < -1$. Við getum allt eins talað um lausnarbilið $]-\infty, -1[$.

(iii) Ójafnan $-2x \geq 1$ hefur lausnarmengið $x \leq -\frac{1}{2}$. Þetta er kannski auðveldara að sjá ef við notum öfugsnúnu goggaregluna $-2x \geq 1 \iff 2x \leq -1$, og deilum í gegn með 2.

(iv) Leysum ójöfnuna $-2(1 - 2x) \leq 3$.

■ **Lausn**

$$\begin{aligned} -2(1-2x) &\leq 3, && \text{Deilum í gegn með } -2 \text{ og goggurinn snýst þá við} \\ 1 - 2x &\geq -\frac{3}{2}, && \text{söfnum næst tölum saman hægra megin} \\ -2x &\geq -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, && \text{deilum svo í gegn með } -2 \text{ og goggurinn snýst þá við} \\ x &\leq \frac{5}{4} && \text{er lausnarmengið.} \end{aligned}$$

Svo að $L =]\,-\infty\,, \frac{5}{4}\,]$.

■

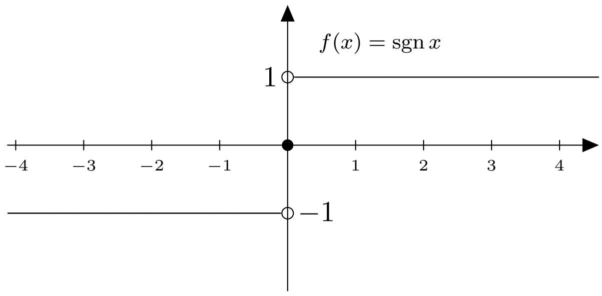
1.5.1 Formerkisfallið sgn.

Formerkisfallið eða *signum* fallið $\operatorname{sgn} x$ gefur formerki x.

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} +1 & \text{ef } x > 0 \\ 0 & \text{ef } x = 0 \\ -1 & \text{ef } x < 0 \end{cases}$$

Jafngilt er að skrifa $x > 0$ og $\operatorname{sgn} x = +1$, eins er jafngilt $x < 0$ og $\operatorname{sgn} x = -1$. Ef $x = 0$ þá er $\operatorname{sgn} x = 0$, og öfugt ef $\operatorname{sgn} x = 0$ þá er x hvorki jákvæð né neikvæð tala og eina rauntalan sem er hvorki jákvæð né neikvæð er $x = 0$ [10].

[10] Sumir skilgreina *signum* fallið með jöfnunni $\operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x}$ en með þeirri framsetningu er það óskilgreint í $x = 0$.



MATLAB fallið `sign` tekur þrjú gildi: $-1, 0, +1$.

```
>> x = [3  -4   0];  sign(x)
ans =
     1    -1     0
```

Skoðum nú $x = 4$ og $y = -2$, þá er hægt að reikna út formerki xy á tvo vegu $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(-8) = -1$, eða $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn}(4) \cdot \operatorname{sgn}(-2) = +1 \cdot (-1) = -1$. MATLAB

```
>> x = 4; y = -2; sign(x*y)
ans =
    -1
```

Regla 1.5.1 — Um formerkisfallið. $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$$

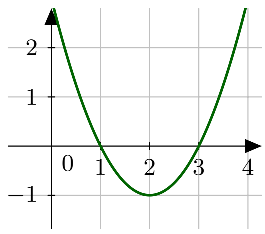
■ **Dæmi 1.24** Leysum ójöfnuna $x^2 - 4x + 3 > 0$.

LAUSN 1
Oft er smíðuð til formerkjatafla fyrir þætti margliðu $f(x) = ax^2 + bx + c$ til að finna lausnarmengi ójöfnu á forminu $ax^2 + bx + c > 0, \geq 0, < 0, \leq 0$. Stundum sér maður út þáttun margliðunnar og skrifar beint $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ og fær þá núllstöðvarnar (ræturnar) r_1 og r_2 beint; ef ekki þá reiknar maður út núllstöðvarnar r_1 og r_2 með formúlunum

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ og } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

og þáttar svo.

Þáttunin $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ gefur að $r_1 = 3$ og $r_1 = 1$ eru núllstöðvar (rætur) margliðunnar $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Hér er gefið að $f(x) > 0$ svo að núllstöðvarnar eru ekki í lausnarmengi ójöfnunnar. Núllstöðvarnar eru tvær og ákvarða því þrjú sundurlæg bil.



$$]-\infty, 1[, \quad]1, 3[, \quad]3, +\infty[$$

og formerki $f(x)$ er fast á sérhverju ofangreindra bila.

(i) Ef $x \in\,]-\infty\,, 1\,[$ þá er formerkið $f(x)$ jákvætt $(+)$ af því að þættirnir $(x - 1)$ og $(x - 3)$ eru báðir neikvæðir, þ.e.a.s.

$$\operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3) = \operatorname{sgn}(x - 1)(x - 3) = \operatorname{sgn}(x - 1) \cdot \operatorname{sgn}(x - 3) = (-1)(-1) = +1$$

sem þýðir að ef x er á bilinu $]-\infty, 1[$ þá er $x^2 - 4x + 3 > 0$.

(ii) Ef $x \in\,]\,1\,, 3\,[$ þá er

$$\operatorname{sgn}(x - 1)(x - 3) = \operatorname{sgn}(x - 1) \cdot \operatorname{sgn}(x - 3) = (+1)(-1) = -1,$$

sem þýðir að ef x er á bilinu $]1, 3[$ þá er $x^2 - 4x + 3 < 0$.

(iii) Ef $x \in\,]\,3\,, +\infty\,[$ þá er

$$\operatorname{sgn}(x - 1)(x - 3) = \operatorname{sgn}(x - 1) \cdot \operatorname{sgn}(x - 3) = (+1)(+1) = +1,$$

sem þýðir að ef $x \in\,]\,3\,, +\infty\,[$ þá er $x^2 - 4x + 3 > 0$.

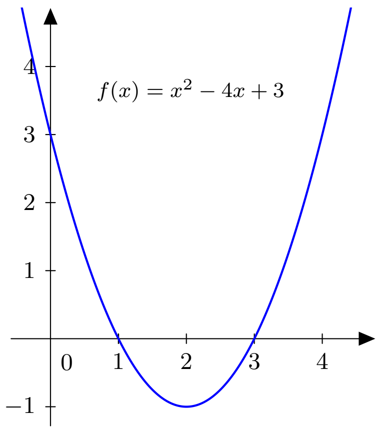
Samantekið höfum við þá að lausnarmengi ójöfnunnar $x^2 - 4x + 3 > 0$ er sammengið $]\,-\infty\,, 1\,[\, \cup\,]\,3\,, +\infty\,[$.

LAUSN 2. $\quad x^2 - 4x + 3 > 0 \iff (x - 1)(x - 3) > 0.$

Við lesum úr neðstu línu formerkjatöflunnar að lausnarmengið er $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.

		1		3	
$x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x + 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

LAUSN 3. $\quad$ Drögum upp fallrit fleygbogans $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.



Við sjáum á fallritinu og af því að rætur f eru $r_1 = 3$ og $r_2 = 1$ að $f(x) > 0$ ef

$$x \in \mathbb{R} \setminus [1, 3].$$

■

■ **Dæmi 1.25** Leysum ójöfnuna $\dfrac{2}{x-1} < \dfrac{3}{x}$

■ **Lausn** Það er algeng villa að byrja á því að margfalda í gegn með samnefnara $x(x-1)$, eins og um jöfnu væri að ræða; fá $2x < 3(x-1) \Longrightarrow x > 3$ sem er <u>ekki</u> rétt svar. Af hverju gengur þetta ekki? Af því að án athugunar vitum við ekki hvort $x(x-1)$ er jákvæð eða neikvæð stærð (auk þess sést ekki á seinni ójöfnunni að upphaflega ójafnan er óskilgreind í 0 og 1). Þessu má þó bjarga við. Ef við viljum fara þá leið að margfalda í gegn með samnefnaranum, þá þarf *fyrst* að skoða formerki þess sem maður ætlar að margfalda með í gegn; þ.e. maður skoðar $\operatorname{sgn}(x(x-1)) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn}(x-1)$ á þremur bilum: þegar $(i)\; x < 0$, þegar $(ii)\; 0 < x < 1$ og þegar $(iii)\; x > 1$ og goggurinn í ójöfnunni snýst við þegar margfaldað er í gegn með $x(x-1)$ ef $\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn}(x-1) < 0$.

Önnur lausnaraðferð væri að koma ójöfnunni á formið $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ (eða > 0) og freista þess að þátta $f(x)$ og $g(x)$ (vonandi í línulega þætti) eins og í dæminu hér á undan:

$$
\begin{array}{lll}
 & \dfrac{2}{x-1} < \dfrac{3}{x} & \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{x} < 0 & \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{2x-3(x-1)}{(x-1)x} < 0 & \text{Einföldum teljarann og fáum} \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{-x+3}{(x-1)x} < 0 & \text{Vinstri hlið er komin á formið } f(x)/g(x) < 0 \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{-(x-3)}{(x-1)x} < 0 & \text{Margföldum næst í gegn með } -1 \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{x-3}{(x-1)x} > 0 & \text{og goggurinn hverfist við.}
\end{array}
$$

Setjum upp formerkjatöflu. Núllstöðvar teljara og nefnara koma í efstu línu og tilsvarandi (línulegir) þættir í fyrsta dálk:

		0		1		3	
x	–	0	+	+	+	+	+
$x-1$	–	–	–	0	+	+	+
$x-3$	–	–	–	–	–	0	+
$\dfrac{x-3}{(x-1)x}$	–	⋮	+	⋮	–	0	+

Við lesum úr neðstu línu töflunnar að lausnarmengið er $]0,1[\,\cup\,]3,+\infty[$.

■

1.5.2 Tölugildisójöfnur

Jafnan $|x| = 3$ hefur tvær lausnir $x = 3$ og $x = -3$. (Rúmfræðileg túlkun á rauntalnalínu, teiknið mynd.)

$|x-1| = 3 \iff x-1 = 3$ eða $x-1 = -3 \iff x = 4$ eða $x = -2$. (Teiknið mynd)
Ójafnan $|x| < 3$ hefur lausnarbilið $-3 < x < 3$.
Lausnarmengi ójöfnunnar $|x| > 3$ er sammengi sundurlægra bila $x < -3$ eða $x > 3$.
$|x-1| < 3 \iff -3 < x-1 < 3 \iff -2 < x < 4$.
$|x-1| > 3 \iff x-1 < -3$ eða $x-1 > 3 \iff x < -2$ eða $x > 4$.

Regla 1.5.2 Látum c vera rauntölu og $d > 0$. Þá er lausnarmengi ójöfnunnar
(A) $|x-c| < d$ bilið $c-d < x < c+d$.
(B) $|x-c| > d$ sammengið $x < c-d$ *eða* $x > c+d$.

Sönnun. Við sýnum aðeins (A) og mælumst til þess að lesandi æfi sig með því að sanna (B) sjálfur.

Samkvæmt skilgreiningu á tölugildi er $|x-c| = \begin{cases} x-c & \text{ef } x-c \geq 0 \\ -(x-c) & \text{ef } x-c < 0 \end{cases}$. Notum þetta til að sjá að í tilvikinu $x-c<0$ verður ójafnan á forminu $-(x-c) < d \iff -d < x-c$ og í hinu tilvikinu $x-c \geq 0$ þá verður ójafnan á forminu $x-c<d$. Samantekið fæst:

$$|x-c| < d \iff -d < x-c < d \iff c-d < x < c+d.$$

■

■ **Dæmi 1.26** Finnið lausnarmengi ójöfnunnar $|1-x| \geq 1-x$.

■ **Lausn** Ef $1 \geq x$ er $|1-x| = 1-x$ og því fæst $1-x \geq 1-x$ sem gildir alltaf. Því er $]-\infty, 1]$ í lausnarmenginu. Ef $1 < x$ er $|1-x| = -(1-x)$ og þá fæst $-(1-x) \geq 1-x \iff 2x \geq 2 \iff x \geq 1$ svo $]1, +\infty[$ er í lausnarmenginu. Þessi ójafna hefur því lausnarmengið $]-\infty, 1] \cup]1, +\infty[= \mathbb{R}$ eða með öðrum orðum gildir hún fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

■

■ **Dæmi 1.27** Finnið lausnarmengi ójöfnunnar $\left|4 - \frac{2}{x}\right| > 6$.

■ **Lausn** Almennt gildir að $|a-b| = |b-a|$. Samkvæmt Reglu 1.5.2 er

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{x} - 4\right| > 6 &\iff \left\{\frac{2}{x} - 4 > 6 \text{ eða } \frac{2}{x} - 4 < -6\right\} \iff \left\{\frac{2}{x} > 10 \text{ eða } \frac{2}{x} < -2\right\} \\ &\iff \left\{\frac{1}{x} > 5 \text{ eða } \frac{1}{x} < -1\right\}.\end{aligned}$$

(1) Í ójöfnunni $\frac{1}{x} > 5$ er ljóst að x getur ekki verið neikvæð (af því að teljarinn er jákvæður og vinstri hliðin á að vera stærri en hægri hliðin sem er jákvæð) svo að við margföldum í gegnum ójöfnuna með jákvæðri tölu $x > 0$ og fáum $1 > 5x \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}$; svo $0 < x < \frac{1}{5}$.
(2) Í ójöfnunni $\frac{1}{x} < -1$ er ljóst að x getur ekki verið jákvæð tala, svo að við margföldum í gegnum ójöfnuna með neikvæðri tölu $x < 0$ og fáum $1 > -x \Leftrightarrow x > -1$; svo að $-1 < x < 0$.

Nú sjáum við að $]-1, 0[\cup]0, 1/5[$ er lausnarmengi gefinnar ójöfnu.

■

Æfingar 1.5

,

Æfing 1.5.1 Leysið ójöfnuna $\dfrac{3-x}{2} \geq \dfrac{3x-4}{3}$ og gefið lausnina sem rauntalnabil eða sammengi (rauntalna)bila. *Sannreynið niðurstöður með* `Geogebra`*: Farið í* `View` $\rightarrow$ `CAS` *og sláið inn* `Solve`$[(3-x)/2 >= (3x-4)/3]$. ■

Æfing 1.5.2 Leysið ójöfnuna $\dfrac{1}{x} < 2$. ■

Æfing 1.5.3 Leysið ójöfnuna $\dfrac{x}{x+1} \geq 3$ og gefið lausnina sem rauntalnabil eða sammengi (rauntalna)bila. ■

Æfing 1.5.4 Leysið ójöfnuna $x^2 - 5x + 6 < 0$ ■

Æfing 1.5.5 Leysið ójöfnuna $|x+1| > 3$ ■

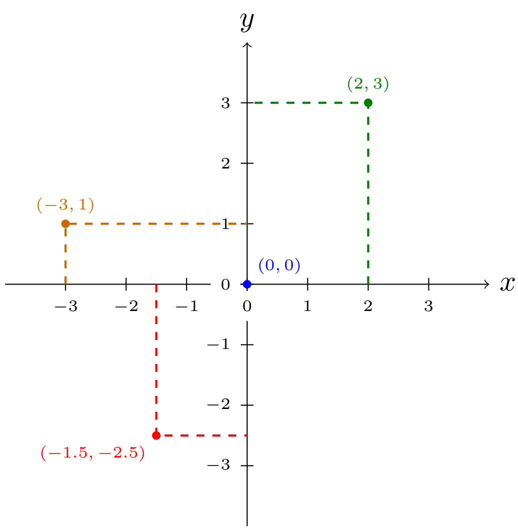
Æfing 1.5.6 Leysið ójöfnuna $|1 + \frac{1}{x}| > 3$ ■

II

2. hluti.

2. Rétthyrnt hnitakerfi

2.1 Sléttan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Á 17. öld lýstu René Descartes og Pierre de Fermat sambandi rúmfræði og algebru í rétthyrndu hnitakerfi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eða $\mathbb{R}^2$. Sú venja er að setja lóðréttan $y-$ás og lárétt-an $x-$ás. Hugmynd Descartes fólst í því að lýsa atburði y sem *falli* f af tíma x; að á gefnum tíma x á tímabili I mætti setja $y = f(x)$ og þannig útskýra *atburðarás* með **fallriti**, eða **grafi falls**.

$$\Gamma(f) := \{\, (x, y) \mid x \in I \subset \mathbb{R}\,,\ y = f(x) \,\}\,.$$

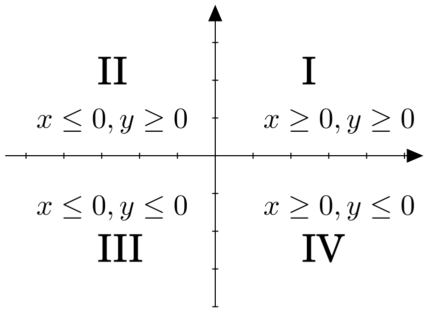
Í rétthyrndu hnitakerfi er ákvarðaður fastur upphafspunktur O. Í *sléttunni* $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eru ásarnir innbyrðis hornréttir.
Í tvívíðu hornréttu hnitakerfi er upphafspunkturinn $O = (0,0)$. Látum P vera punkt í $\mathbb{R}^2$. Ef **raðtvenndin** (x, y) lýsir staðsetningu punktsins P í sléttunni, þ.e. $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, þá köllum við (x, y) **hnit** punktsins P. Fyrra hnitið x táknar þá *lárétta færslu* frá fasta viðmiðunarpunktinum O og seinna hnitið y táknar *lóðrétta færslu* frá O. Við gætum því allt eins gefið staðsetninguna sem *vigur* $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Í $\mathbb{R}^3$ getum við hugsað okkur $z-$ás sem stendur hornrétt á hina tvo, með upphafspunkt $O = (0,0,0)$. Erfiðara er að sjá fyrir sér hornrétta vigra í $\mathbb{R}^4$, þó þeir séu vissulega til.

Tvenndin (x, y) nefnist *raðtvennd* vegna þess að máli skiptir í hvaða röð tölur koma fyrir innan svigans. Þannig er t.d. $(2,3) \neq (3,2)$.

Fjórðungar sléttunnar

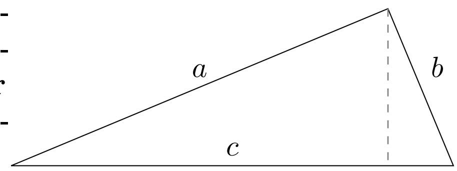
Hnitaásarnir marka af fjórðunga sléttunnar:

I Fyrsti fjórðungur $x \geq 0, y \geq 0$.
II Annar fjórðungur $x \leq 0, y \geq 0$.
III Þriðji fjórðungur $x \leq 0, y \leq 0$
IV Fjórði fjórðungur $x \geq 0, y \leq 0$



2.1.1 Rétthyrndur þríhyrningur

Þríhyrningur er sagður vera *rétthyrndur* ef hann hefur $90°$ horn, eða *rétt horn*, sem er þá stærsta hornið í þríhyrningnum þar eð hornasumma þríhyrnings er $180°$, og lengsta hlið rétthyrnds þríhyrnings c veit á móti rétta horninu. Hinar tvær hliðarnar a og b eru einu nafni kallaðar skammhliðar



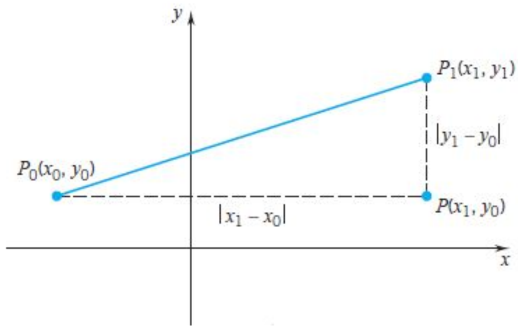
Ferningur tölu, eða ferningstala einhverrar tölu er talan í öðru veldi.

> **Regla 2.1.1 — Regla Pýþagórasar.** Í rétthyrndum þríhyrningi eru samanlagðar ferningstölur skammhliðanna jafnar ferningstölu langhliðarinnar, $a^2 + b^2 = c^2$.

Sönnun. Æfing 2.1.1 ■

Fjarlægðarformúlan

Látum $P_0 = (x_0, y_0)$ og $P_1 = (x_1, y_1)$ vera punkta í sléttunni Formúla fyrir fjarlægðina



Mynd 2.1

$d(P_0, P_1)$ á milli punktanna P_0 og P_1 leiðir beint af reglu Pýþagórasar:

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{|x_1 - x_0|^2 + |y_1 - y_0|^2} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \tag{2.1}$$

Við getum líka gefið staðsetningu punktanna sem vigrana $\overline{OP}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ og $\overline{OP}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, og myndað vigurinn $\overline{P_0P_1} = \overline{OP}_1 - \overline{OP}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$. Lengd vigursins $\overline{P_0P_1}$ er jákvæða rauntalan

$$|\overline{P_0P_1}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \tag{2.2}$$

Dæmi 2.1

(i) Fjarlægðin frá upphafspunkti $O = (0, 0)$ að punktinum $P = (x, y)$ er $d(O, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

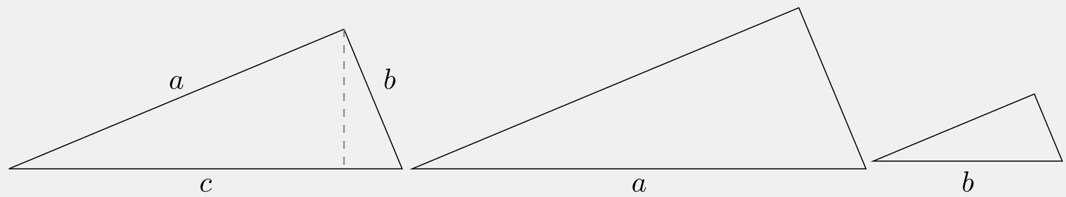
(ii) Lengd vigursins $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ er $|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

■

Æfingar 2.1

Æfing 2.1.1 *Rifjið upp hugtakið einslaga þríhyrningar (e. similar triangles). Sjá t.d.* http://www.mathopenref.com/similartriangles.html

Látum a, b vera skammhliðar rétthyrnds þríhyrnings og c vera langhliðina, þá segir í reglu Pýþagórasar að $a^2 + b^2 = c^2$. Notið ykkur að þríhyrningarnir hér að neðan eru einslaga til að sanna reglu Pýþagórasar.



■

Æfing 2.1.2 Látum $A = (0, 3)$ til $B = (4, 0)$ vera gefna punkta í sléttunni.

(i) Finnið stefnuvigurinn $\overline{AB}$.

(ii) Finnið fjarlægðina frá A til B.

■

Æfing 2.1.3 Ögn leggur af stað í punktinum $A = (-2, 3)$ og ferðast um fjarlægðina $\Delta x = 4$ til hægri og $\Delta y = -7$ niður. Finnið punktinn B sem uppfyllir jöfnuna $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ ■

Æfing 2.1.4 Rétthyrndur þríhyrningur hefur hornpunkta $A = (k, 0), B = (0, 4)$ og $C = (0, 0)$ og langhlið hans er $|AB| = \sqrt{41}$. Finnið k. ■

Æfing 2.1.5 Leysið Æfingu 2.1.2 með `GeoGebra` (`http://www.geogebra.org/`): Til að sjá vigurinn $\overline{AB}$, sláið þið fyrst inn punktana A og B, skilgreinið vigur á milli punktanna og reiknið svo lengd vigursins. Fylgið eftirfarandi skrefum:

(a) `A = (0,3)` [Enter]
(b) `B = (3,0)` [Enter]
(c) `AB = Vector[A,B]` [Enter]
(d) `lengd = Length[AB]` [Enter]

■

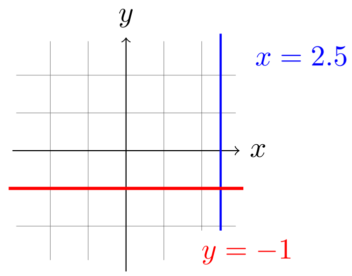
2.2 Jafna beinnar línu

Þegar talað er um *línu* í sléttunni er auðvitað átt við *beina línu*.

1. Látum ℓ vera línu sem ákvarðast af $P_0 = (x_0, y_0)$ og $P_1 = (x_1, y_1)$. Ef l er ekki lóðrétt lína þá er $x_0 \neq x_1$ og **hallatala línunnar** l er gefinn með formúlunni

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.3}$$

Við getum líka myndað **stefnuvigur** línunnar ℓ sem liggur í gegnum punktana P_0 og P_1. Það væri t.d. vigurinn $\overline{P_0P_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ eða $\overline{P_1P_0} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}$. Stefnuvigur línu ℓ hefur auðvitað sömu hallatölu og línan sem ákvarðar stefnuvigurinn. Línan $y = -x$ hefur t.d. stefnuvigur $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ í IV. fjórðungi, það sést með því að velja $x = 1$ sem gefur $y = -x = -1$; en ef þessum stefnuvigri er snúið um hornið π eða $180°$ þá fáum við stefnuvigur $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ í II. fjórðungi.
Fyrir umfjöllun um **stefnuhorn línu** skulum við alltaf velja stefnuvigur fyrir línu í I. fjórðungi sléttunnar ef hallatalan línunnar er jákvæð, en stefnuvigur í II. fjórðungi ef hallatalan línunnar er neikvæð.
Lóðréttri línu má lýsa með jöfnunni $x = a$, þar sem a er fasti sem segir til um hvar línan sker x-ásinn. Lóðrétt lína hefur ekki hallatölu en hún hefur **stefnuhorn** $\theta = \pi/2$.
Láréttri línu má lýsa með jöfnunni $y = b$, þar sem b er fasti sem segir til um hvar línan sker y-ásinn. Lárétt lína hefur hallatölu $m = 0$ og stefnuhorn $\theta = 0$.



Ef lína ℓ er ekki lóðrétt þá má reikna stefnuhorn línunnar, θ, út frá jöfnunni.

$$\tan\theta = m = \text{ hallatala línunnar } \ell \tag{2.4}$$

þar sem θ er mælt rangsælis fráláréttum ás. Til þess að stefnuhorn línu ákvarðist ótvírætt af hallatölu línunnar þá leyfum við aðeins $\theta \in [0, \pi[$, eða í gráðum talið $\theta° \in [0, 180°[$:
(a) Ef $m = 0$ þá tökum við $\theta = 0$ (en ekki t.d. $\theta = \pi$ eða $\theta = 2\pi$),
(b) Ef $0 < m < +\infty$ þá tökum við $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (Stefnuvigur í I. fjórðungi)

(c) Ef $-\infty < m < 0$ þá tökum við $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. (Stefnuvigur í II. fjórðungi)

■ **Dæmi 2.2** Hallatala línunnar $y = x$ er $m = 1$ þá er augljóst að stefnuhorn línunnar er $\pi/4$, en hallatala línunnar $y = -x$ er $m = -1$ og stefnuhorn hennar er $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Athugið að $\tan(3\pi/4) = -1$ en einnig er $\tan(-\pi/4) = -1$. Reiknivél gefur $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ þ.e. horn í III. fjórðungi. Við þurfum því að muna eftir að bæta π við það sem reiknivél gefur ef hallatala línu er neikvæð tala.

■

■ **Dæmi 2.3** Lína sem liggur í gegnum punktana $(1,2)$ og $(0,4)$ hefur hallatöluna

$$m = \frac{2-4}{1-0} = \frac{-2}{1} = -2$$

(teiknið mynd) og stefnuhorn línunnar er $\theta = \arctan(-2) + \pi \approx 2.0344$. Rifjum þá upp í leiðinni að til að fá stefnuhornið mælt gráðum þá margföldum við með hlutfallinu $\frac{180°}{\pi}$ og fáum $\approx 116.6°$.
MATLAB

```
>> theta = pi+atan(-2)
theta =
    2.0344
>> theta*180/pi
ans =
  116.5651
```

■

2. Ef lína sker $x-$ ásinn, þá gerir hún það í einhverju hniti af gerðinni $(a,0)$, sem er skurðhnit línunnar við $x-$ ásinn. Við köllum töluna a **skurðpunkt línunnar við $x-$ás**.
3. Ef lína sker $y-$ ásinn, þá gerir hún það í einhverju hniti $(0,b)$. Við köllum töluna b **skurðpunkt línunnar við $y-$ás**.

ATH Strangt til tekið ættum við að tala um (x,y) sem hnit punkts í sléttunni; en punkturinn sjálfur heitir, segjum, P; þ.e. $P = (x,y)$ en það er málvenja að tala um (x,y) sem punkt. Við sjáum yfirleitt af samhenginu hvort verið er að tala um punkt x í $\mathbb{R}$ eða punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Skilgreining 2.2.1 Látum m vera hallatölu línu ℓ, (x_0, y_0) vera gefinn punkt á línunni og (x,y) vera hinn almenna punkt á línunnar. Þá er svonefnd *punkthalla-framsetning* línunnar gefin með formúlunni:

$$\ell: \qquad y = m(x - x_0) + y_0 \tag{2.5}$$

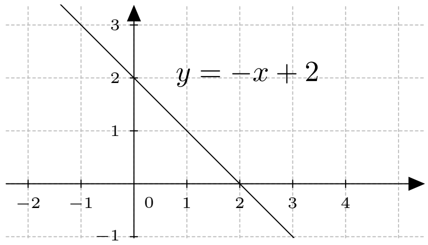
Skurðhalla framsetning línu: Þegar og hallatala línu er þekkt og skurðpunktur við $y-$ ás, þá er fljótlegt að skrifa jöfnu línunnar á *skurðhalla* forminu

$$\ell: \qquad y = mx + b \tag{2.6}$$

einnig er hægt reikna út skurðinn b við $y-$ás ef einhver punktur (x_0, y_0) á línunni þekktur, nefnilega er $b = y_0 - mx_0$.

■ **Dæmi 2.4** Lína sem liggur í gegnum punktana $(4,-2)$ og $(1,1)$ hefur hallatöluna $m=-1$. Annar punktanna nægir til að reikna út jöfnu línunnar *með punkt-halla* framsetningu. Tökum t.d. $P_1=(x_1,y_1)=(1,1)$. Fáum

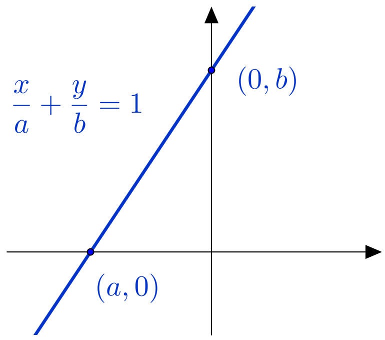
$$\begin{aligned} y &= m(x-x_1)+y_1 = -1(x-1)+1 \\ &= -x+2. \end{aligned}$$



■

Skurðhnita framsetning: Lína ℓ sem liggur í gegnum punktana $(a,0)$ og $(0,b)$, $a\neq 0$, hefur
hallatölu $m=\dfrac{b-0}{0-a}=-\dfrac{b}{a}$. Jafna línunnar er
þá

$$\ell: \quad y=-\frac{b}{a}(x-a)=-\frac{b}{a}x+b.$$



Ef $b\neq 0$ þá getum við deilt í gegnum jöfnuna með b, og skrifað jöfnu línunnar á svokölluðu *skurðhnita-formi*

$$\ell: \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

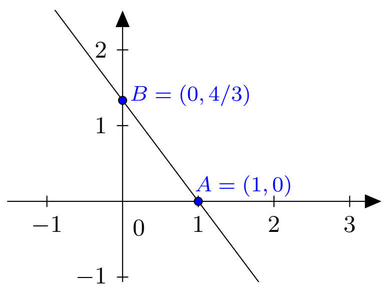
■ **Dæmi 2.5** Lína hefur skurðhnit $P=(2,0)$ og $Q=(0,1)$. Jafna línunnar er $\dfrac{x}{2}+y=1$.
■

Almenn jafna línu er á forminu

$$ax+by=c$$

þar sem ekki bæði $a=0$ og $b=0$.

■ **Dæmi 2.6** Línan $4x+3y=4$ er gefin á *almennu formi*. Með umrituninni $4x+3y=4 \iff y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ fæst línan á *skurðhalla* formi. Af síðustu jöfnunni sést að hallatala línunnar er $m=-\frac{4}{3}$, skurðhnit við $y-$ás er $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ og skurðpunktur við $y-$ ás er $b=\frac{4}{3}$. Ef við hinsvegar deilum í gegnum almennu jöfnuna $4x+3y=4$ með 4 þá fæst jafna línunnar á *skurðhnitaforminu* $x+\frac{3}{4}y=1$. Maður les úr þessari síðustu jöfnu að $\frac{1}{a}=1 \Rightarrow a=1$ og $\frac{1}{b}=\frac{3}{4} \Rightarrow b=\frac{4}{3}$, og getur þá dregið beina línu í gegnum punktana $(1,0)$ og $(0,\frac{4}{3})$.



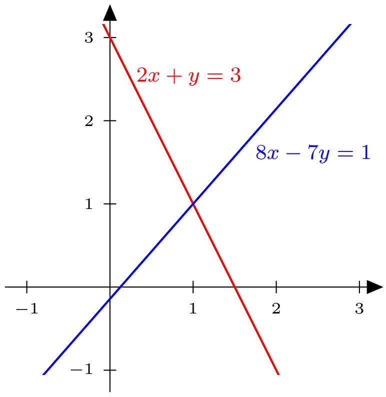
■

■ **Dæmi 2.7** Teiknið upp línurnar $\ell_1 : 2x + y = 3$ og $\ell_2 : 8x - 7y = 1$ í einni mynd. Leysið jöfnurnar saman og finnið í hvaða punkti línurnar skerast.

■ **Lausn** Einangrum y úr ℓ_1 og fáum $y = 3 - 2x$; setjum svo $3 - 2x$ inn fyrir y í ℓ_2 og fáum

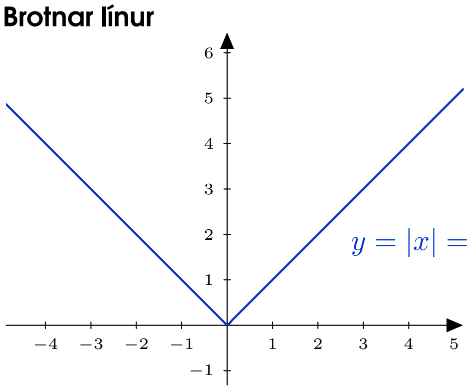
$$8x - 7y = 1 \Leftrightarrow 8x - 7(3 - 2x) = 1 \Leftrightarrow 8x - 21 + 14x = 1 \Leftrightarrow 22x = 22 \Leftrightarrow x = 1.$$

Þá fæst $y = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot 1 = 1$. Skurðpunktur línanna er þá (1,1).



■

Brotnar línur



Jafnan $y = |x|$ gefur tvær hálflínur, $y = x$ ef $x \geq 0$ og $y = -x$ ef $x < 0$.

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{ef } x \geq 0 \\ -x, & \text{ef } x < 0 \end{cases}.$$

Æfingar 2.2

Æfing 2.2.1 Finndu jöfnu línu í gegnum punktana

(i) $A = (-1, 1), B = (2, 4)$.
(ii) $A = (1, 0), B = (0, 1/2)$.
(iii) Sannreynið að rétt sé reiknað með

GeoGebra:
(a) `A = (-1,1)`
(b) `B = (2,4)`
(c) `linaA = Line[A,B]`

■

Æfing 2.2.2 Finndu jöfnu línu í gegnum punktinn $P = (-1, 1)$ sem hefur hallatölu

(i) $m_1 = 1$ (ii) $m_2 = -1$ (iii) $m_3 = 2.$ (iv) $m_4 = -\frac{1}{2}$

■

Æfing 2.2.3 Notið `GeoGebra` til að teikna allar línurnar í Æfingu 2.2.2 í einni mynd og látið jöfnur línanna koma fram á myndinni. ■

Æfing 2.2.4 Gefin er lína $\ell:\ 2x + 4y = 12$ á almennu formi.

(i) Finnið skurðpunkta línunnar ℓ við hnitaásana.

(ii) Finnið hallatölu línunnar ℓ.

■

Æfing 2.2.5 Fahrenheit (1688 - 1736) kvarðaði kvikasilfurmæli þannig að hann lét núll gráður á Fahrenheit, $T_F = 0°F$, svara til frostmarks tiltekinnar saltlausnar og út frá hæð kvikasilfurssúlunnar festi hann $T_F = 32°F$ sem frostmark vatns. Sjálfkrafa verður þá $T_F = 212°F$ suðumark vatns. Línulegt samband er á milli hitastigs mælt á Fahrehheitkvarða og hitastigs mælt í Selsius gráðum. Anders Celsius (1701 - 1744) skilgreindi núll gráður á Selsíus sem frostmark vatns, $T_C = 0°C$, og skilgreindi $T_C = 100°C$ sem suðumark vatns.

(i) Finnið línulega jöfnu $T_F = mT_C + b$, þar sem m er hallatala og b er skurðpunktur við T_F- ás. Dragið upp lóðréttan T_F- ás og láréttan T_C-ás og teiknið inn línuna.

(ii) Hvað eru núllgráður á Fahrenheitkvarða margar gráður á Selsíus ?

(iii) Hvað eru $T_C = -40°C$ margar gráður á Fahrenheit ?

■

Æfing 2.2.6 Finnið stefnuhorn línu sem liggur í gegnum punktana $O = (0, 0)$ og

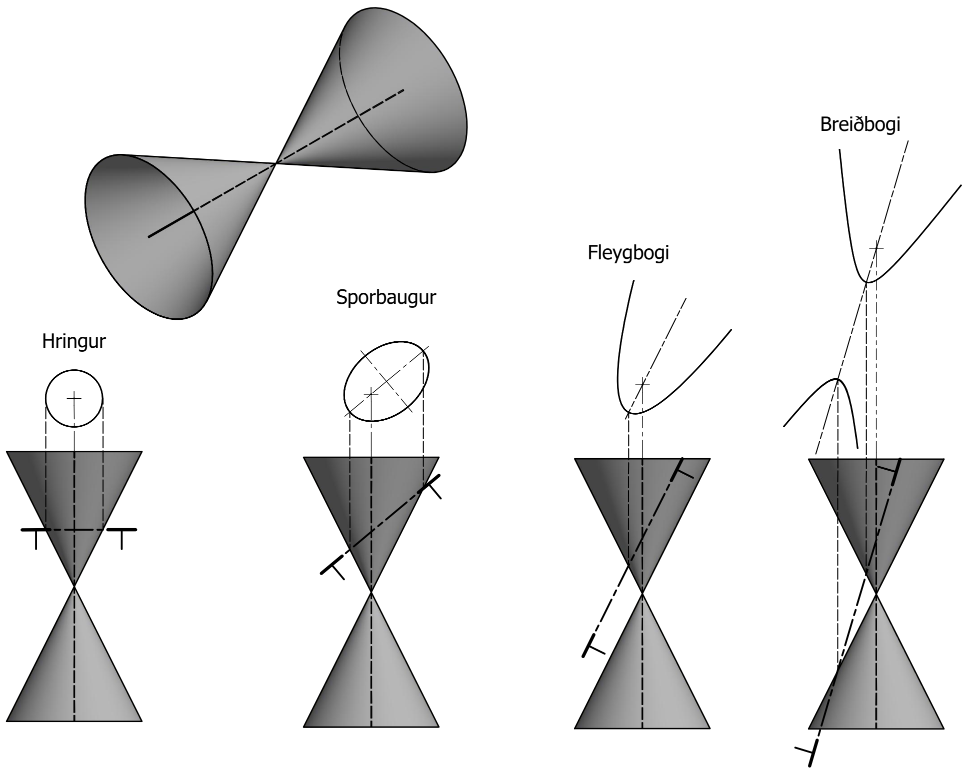
(A) $A = (0, 1)$ (B) $B = (-1, 0)$ (C) $C = (1, 1)$ (D) $D = (1, -1)$

■

Æfing 2.2.7 Teiknið upp línurnar $2x + y = 8$ og $5x - 7y = 1$ í einni mynd. Leysið jöfnunar saman og finnið í hvaða punkti línurnar skerast. Í `GeoGebra` er fljótlegt að fá línurnar fram í einu grafi; sláið t.d. inn `L1:2x+y = 8` og `L2:5x-7y = 1`; eða einfaldar `2x+y = 8` og `5x-7y = 1`. ■

Æfing 2.2.8 Jafnan $y = |x - 1|$ lýsir tveimur hálflínum. Teiknið mynd. Sannreynið í `GeoGebra` með `y = abs(x-1)`. ■

2.3 Keilusnið



Við skoðum jöfnur fyrir hringi, sporbauga, fleygboga og breiðboga í þessum kaflahluta. Þessi form eru einu nafni kölluð *ferningsjöfnur* eða *keilusnið*.
Almenna keilusniðsjafnan fyrir þau öll er

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.7}$$

þar sem A, B og C eru ekki öll núll.

2.3.1 Hringur

Skilgreining 2.3.1 Almenn jafna hrings með miðju $C = (x_0, y_0)$ og geisla r er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{2.8}$$

Þegar $A = C$ og $B = 0$ í jöfnu (2.7) þá höfum við jöfnu hrings (ef F er ekki of stór tala).

■ **Dæmi 2.8**

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$$

er jafna hrings. Við getum notað hina almennu keilusniðsjöfnu (2.7) til að sjá það, með $A = C = 1$ og $B = 0$. Til að finna miðju og geisla hringsins þurfum við að koma ferningsjöfnunni á formið $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Við þurfum að finna réttu tölurnar í eyðurnar

$$x^2 + 4x + \_\_\_ + y^2 + 6y + \_\_\_ = -3 + \_\_\_ + \_\_\_$$

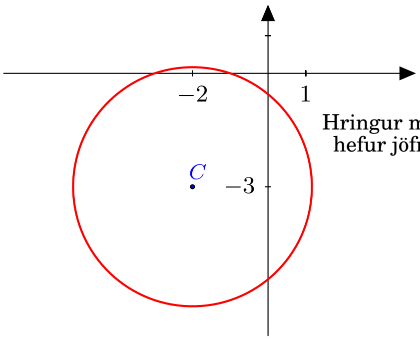
til að geta þáttað skv. ferningsreglunum, m.ö.o. *fyllt út í ferningana*. Notum regluna $x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$, þar sem $2a$ er línulegi stuðullinn og helmingurinn af $2a$ í öðru veldi er a^2. Helmingurinn af línulega stuðlinum við $4x$ er 2, og helmingurinn af línulega stuðlinum við $6y$ er 3. Fáum

$$x^2 + 4x + \underline{2^2} + y^2 + 6y + \underline{3^2} = -3 + \underline{4} + \underline{9}$$

og nú er eftirleikurinn auðveldur; þáttunin gefur

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$$

og nú sést að miðja hringsins er $C = (-2, -3)$ og geislinn er $r = \sqrt{10} \approx 3.162$.



Hringur með geisla $r = \sqrt{10}$ og miðju $(-2, -3)$ hefur jöfnu $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$.

■

Regla 2.3.1 Ef A, B og C eru ekki öll núll, þá gildir um

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

að þegar $A = C$ og $B = 0$ þá höfum við jöfnu hrings (ef F er ekki of stór tala).

Til að flokka hin keilusniðin höfum við **aðgreininn** $B^2 - 4AC$.

(i) $B^2 - 4AC < 0$
$\Rightarrow$ Sporbaugur (*e. ellipse*)

(ii) $B^2 - 4AC = 0$
$\Rightarrow$ Fleygbogi (*e. parabola*)
(eða tvær línur ef $D = E = 0, F < 0$.)

(iii) $B^2 - 4AC > 0$
$\Rightarrow$ Breiðbogi (*e. hyperbola*)

2.3.2 Sporbaugur

Skilgreining 2.3.2 Almenn jafna fyrir sporbaug sem hefur **meginása** (*e. principal axes*) samsíða hnitaásunum er

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{2.9}$$

þar sem $C = (x_0, y_0)$ er miðja sporbaugsins, lengdir meginásanna eru a og b, $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$.

Lengri meginásinn er kallaður **langás** (e. major axis) og sá styttri **skammás** (e. minor axis).

■ **Dæmi 2.9** Hvaða keilusniði lýsir jafnan $2x^2 + 3y^2 + y - 11/12 = 0$?

■ **Lausn** Berum þessa jöfnu við almennu keilusniðsjöfnuna (2.7) og sjáum að $A = 2, B = 0$ og $C = 3$. Þar sem *aðgreinirinn* $B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -24 < 0$ þá er þetta jafna fyrir sporbaug. Við þurfum að skrifa jöfnuna á forminu (2.9) til að finna miðju og meginása. Skoðum fyrst:

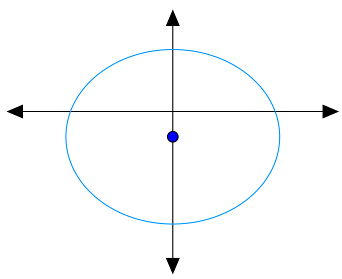
$$
\begin{aligned}
3y^2 + y &= 3\left(y^2 + \tfrac{y}{3} + \_\_\_\_ - \_\_\_\_\right) && \text{Viljum hafa forystustuðul 1 þegar fyllt er í ferninginn.}\\
&= 3\left(y^2 + \tfrac{1}{3}y + \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 - \tfrac{1}{36}\right) && \text{Helmingur af } 1/3 \text{ er 1/6.}\\
&= 3\left((y + \tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{1}{36}\right) && \text{Hér höfum við þáttað þrjá fyrstu liðina innan (ytri) sviganna skv. ferningsreglu.}\\
&= 3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{3}{36} && \text{Fellum (ytri) sviga.}\\
&= \frac{(y + \frac{1}{6})^2}{1/3} - \frac{1}{12} && \text{Notum hér að } 3 = \frac{1}{1/3}.
\end{aligned}
$$

Með umrituninni

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 3y^2 + y - 11/12 &= 0 && \Leftrightarrow\\
2x^2 + \frac{(y + \frac{1}{6})^2}{1/3} - \frac{1}{12} &= \frac{11}{12} && \Leftrightarrow\\
\frac{x^2}{1/2} + \frac{(y + \frac{1}{6})^2}{1/3} &= 1
\end{aligned}
$$

sést, að jafnan $2x^2 + 3y^2 + y - 11/12 = 0$ rituð á forminu

$$
\frac{(x-0)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y - (-\frac{1}{6})\right)^2}{\frac{1}{3}} = 1
$$

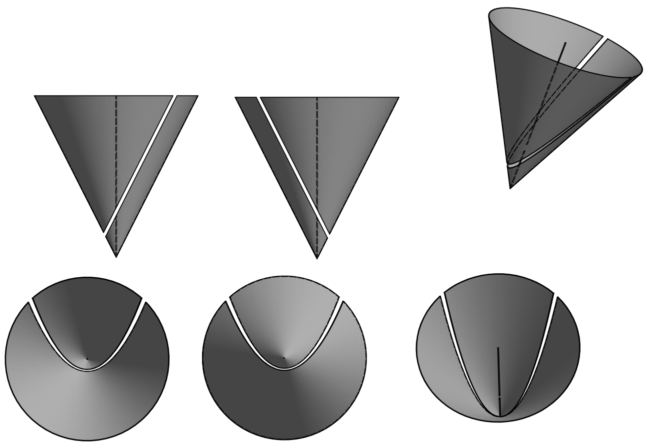


lýsir sporbaug með miðju í $C = (0, -1/6)$, hefur láréttan langás $a = \sqrt{1/2} \approx 0.707$ og lóðréttan skammás $b = \sqrt{1/3} \approx 0.577$.

GeoGebra:
Maður slær inn jöfnunni á forminu $\mathbf{2x^2 + 3y^2 + y - 11/12 = 0}$ og GeoGebra umritar hana á formið $\mathbf{x^2/0.5 + (y + 0.17)^2/0.33 = 1}$, sem er jafna á forminu $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Þá sést að þetta er jafna sporbaugs með miðju í $C = (0, -0.17)$ og meginása $a = \sqrt{0.5} \approx 0.707$ og $b = \sqrt{0.33} \approx 0.574$. [1] ■

[1] Hér er þriðji aukastafur er ekki réttur - það fer eftir verkefninu hverju sinni hversu mikil nákvæmni þarf að vera.

2.3.3 Fleygbogi



Mynd 2.3: Fleygbogasnið á keilu, breytilegt sjónarhorn

Skilgreining 2.3.3 Almenn jafna fleygboga (e. parabola) með **útgildispunkt** (*e. extremum point*) $D = (x_0, y_0)$ er

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0 \tag{2.10}$$

og ef

(i) $a > 0$ þá er (x_0, y_0) *botnpunktur* (*e. vertex*) fleygbogans og y_0 er *lægsta gildi* (*e. extreme minimum*),

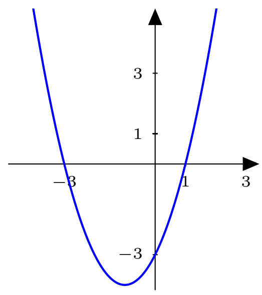
(ii) $a < 0$ þá er (x_0, y_0) *topppunktur* (*e. vertex*) fleygbogans og y_0 er *hæsta gildi* (*e. extreme maximum*).

■ **Dæmi 2.10** Hvaða keilusniði lýsir ferningsjafna

$$x^2 + 2x - y - 3 = 0\ ?$$

■ **Lausn** Berum þessa jöfnu við almennu keilusniðsjöfnuna $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; sjáum að $A = 1, B = 0$ og $C = 0$. Þar sem aðgreinir keilusniða $B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ og þar sem $D, E \neq 0$ þá er ferill ferningsjöfnunnar fleygbogi. Af umrituninni $y = x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 4 = (x + 1)^2 - 4$, þ.e.

$$y = (x + 1)^2 - 4$$



sést að fleygboginn hefur botnpunkt í $(-1, -4)$ og samokareglan gefur svo $y = (x+1)^2 - 4 = (x+1)^2 - 2^2 = (x+1-2)(x+1+2) = (x - 1)(x + 3)$, þ.e. umritunin

$$y = (x - 1)(x + 3)$$

gefur að skurðpunktar fleygbogans við x–ás eru $(1, 0)$ og $(-3, 0)$.

■

■ **Dæmi 2.11** Lítum á jöfnuna $x^2 + 2xy + y^2 - 2 = 0$. Hér er $B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

svo að samkvæmt reglunni ættum við að fá fleygboga, en þetta er tilvikið sem gefur tvær samsíða línur; nefnilega eru engir línulegir liðir, þ.e. $D = E = 0$ og $F < 0$ í keilusniðsjöfnunni $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Þá fæst:

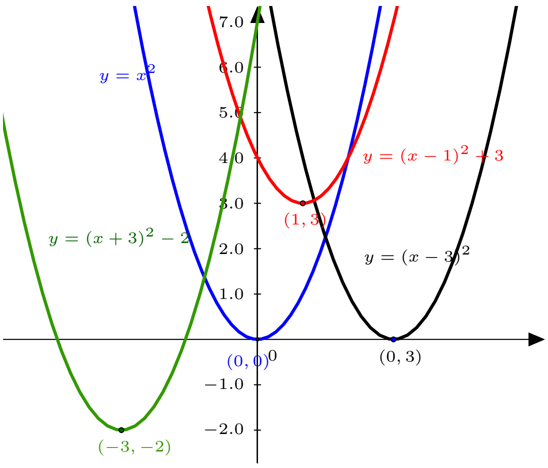
$$x^2+2xy+y^2-2 = 0 \iff (x+y)^2 = 2 \iff |x+y| = \sqrt{2} \iff x+y = \sqrt{2} \text{ eða } x+y = -\sqrt{2}.$$

Línurnar $y = -x + \sqrt{2}$ og $y = -x - \sqrt{2}$ hafa báðar hallatölu -1 og eru því samsíða.

■

Hliðrun og stríkkun grunnfleygbogans

Fleygboginn $y = x^2$ sem hefur botnpunkt í $(x_0, y_0) = (0, 0)$ og forystustuðul $a = 1$ verður eftirleiðis kallaður **grunnfleygboginn**. Almenn jafna fleygboga fæst með því að *hliðra* grunnfleygboganum úr $(0, 0)$ í (x_0, y_0) og *stríkka* forystustuðulinn með a. *Speglun* grunnfleygbogans um $x-$ásinn er stríkkun með $a = -1$.



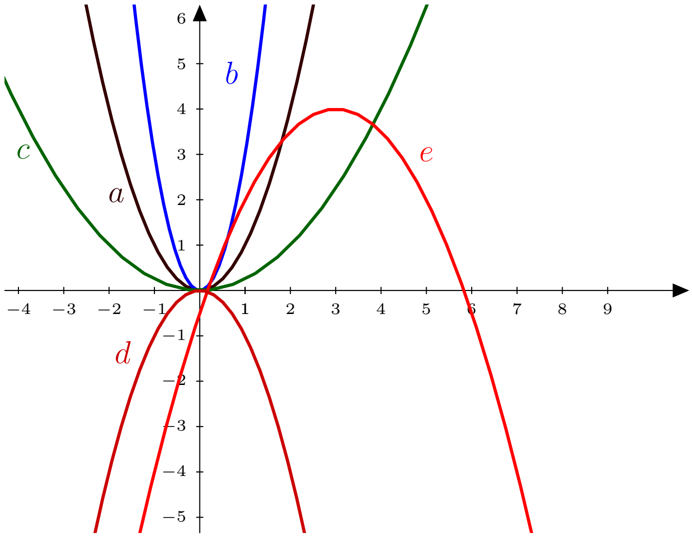
Mynd 2.4: Hliðrun fleygboga

Hliðrun

Á Mynd 2.4 getur maður litið svo á að grunnfleygboganum $y = x^2$ með botnpunkt $(0, 0)$ hafi verið hliðrað til um punktinn (x_0, y_0) samkvæmt formúlunni $x^2 \mapsto (x - x_0)^2 + y_0$, fyrir nokkur mismunandi (x_0, y_0). Ef x_0 er neikvæð tala er hliðrun lárétt til vinstri um $|x_0|$ skref; ef x_0 er jákvæð þá er hliðrunin til hægri. Ef y_0 er neikvæð tala þá er hliðrunin lóðrétt niður en lóðrétt upp ef y_0 er jákvæð tala.

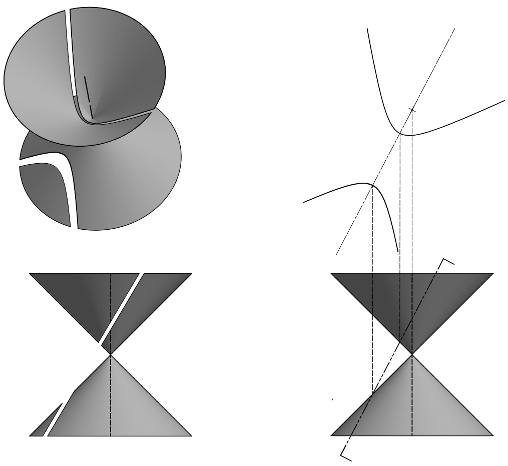
Stríkkun grunnfleygbogans

Allir fleygbogarnir á Mynd 2.5 nema $e(x)$ eru allir af gerðinni $y = cx^2$, þar sem grunnfleygboginn $a(x)$ hefur $c = 1$. Við sjáum að $b(x) = 2x^2$ vex hraðar en grunnfleygboginn en greinar $c(x) = \frac{1}{4}x^2$ eru gleiðari. Speglun um grunnfleygbogans um $x-$ásinn fæst með að setja $c = -1$ eins og í $d(x)$, og að lokum, $e(x) = -2(x - 3)^2 + 4$ er grunnfleygboginn $a(x) = x^2$ speglaður, stríkkaður með 2, hliðrað til hægri um 3 og hliðrað upp um 4.



Mynd 2.5: $a(x) = x^2, b(x) = 2x^2, c(x) = 0.25x^2, d(x) = -x^2, e(x) = 0.5(x-3)^2 + 4$

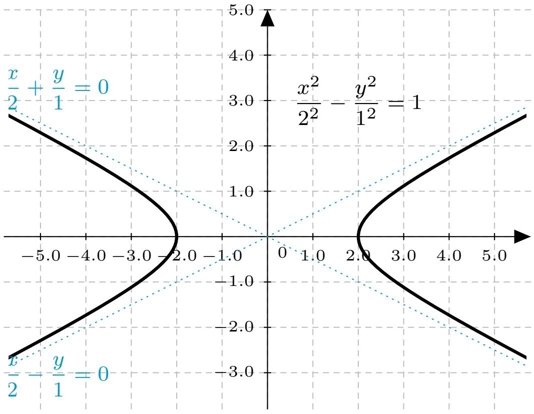
2.3.4 Breiðbogi



Almenn jafna breiðboga sem speglast um hnitaásana er á forminu

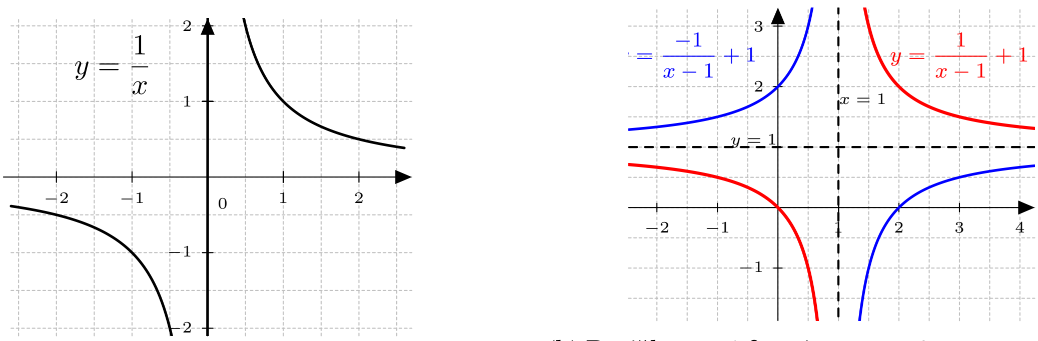
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{2.11}$$

þar sem $a = 2$ er skurður við $x-$ás og línurnar $y = \pm\frac{b}{a}(x-x_0) + y_0$ eru aðfellur breiðbogans.



Mynd 2.6: Breiðboginn $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ hefur aðfellur $\frac{x}{2} - \frac{y}{1} = 0$ og $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 0$.

Við sjáum líka út frá almenna formi keilusniða (2.7) að jafnan $xy = 1$ þ.e. $y = \dfrac{1}{x}$ lýsir breiðboga:



(a) Aðfellur breiðbogans $xy = 1$ eru hnitaásarnir, eða lárétta línan $y = 0$ og lóðrétta línan $x = 0$.

(b) Breiðbogar á forminu $y = \frac{c}{x-1} + 1$, með $c = 1$ og $c = -1$, hafa báðir lóðfellu í $x = 1$ og láfellu í $y = 1$

.

Mynd 2.7

Almenn formúla fyrir þessa gerð breiðboga með lóðfellu $x = x_0$ og láfellu $y = y_0$ er

$$(x - x_0)(y - y_0) = c \tag{2.12}$$

þar sem halli greinanna er neikvæður ef $c > 0$, en ef $c < 0$ er halli greinanna jákvæður. Jöfnu (2.12) má umrita á formið

$$y = \frac{c}{x - x_0} + y_0 \tag{2.13}$$

■ **Dæmi 2.12** Ferill $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ er breiðbogi. Til að sjá það notum við margliðudeilingu eða eftirfarandi umritun

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-1-1}{x+1} = 1 + \frac{-2}{x+1},$$

sem gefur að

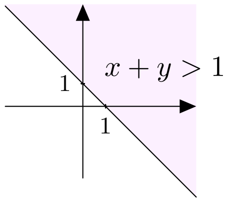
$$y = \frac{-2}{x+1} + 1.$$

Berum þessa síðustu jöfnu við jöfnu (2.13). Jafnan lýsir breiðboga með lóðfellu í $x = -1$, láfellu í $y = 1$ og halli breiðboga-greinanna er jákvæður. ■

2.3.5 Svæði og ójöfnur

Sérhver lína skiptir sléttunni $\mathbb{R}^2$ í tvær sundurlægar **hálfsléttur** (e. half-planes). Myndræn framsetning línulegrar ójöfnu er svæði sem kallast hálfslétta.

Mynd 2.8: Lausnarmengið er hálfslétta, táknað með skyggingu.



Mengi allra punkta *innan í* hring er kallað **innmengi** (*e. interior*) hringsins eða **opin hringskífa**. Opin hringskífa ásamt hringnum sjálfum kallast **lokuð hringskífa** (*e. closed disk*). Því er stundum talað um hring sem **jaðar hringskífu** (*e. boundary of a disc*). Mengi allra punkta *utan við* hring er kallað **útsvæði** (*e. exterior*) hringsins eða **útmengi** hringsins.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$	hringur
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<a^2$	opin hringskífa
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq a^2$	lokuð hringskífa
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>a^2$	opið útsvæði hrings
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\geq a^2$	lokað útsvæði hrings

■ **Dæmi 2.13** Ójöfnurnar $x^2+y^2-4x+2y<4$ og $x+y>1$ afmarka svæði í $\mathbb{R}^2$; lausnarmengið er sniðmengi opinnar hringskífu, með geisla $r=3$ og miðpunkt í $C=(2,-1)$, og hálfsléttunnar sem liggur ofan við línuna $y=1-x$. (Sannreynið með `Geogebra`). Stundum lætur maður einfaldlega nægja að lýsa svæði í orðum. ■

Æfingar 2.3

Æfing 2.3.1 Reiknið út *aðgreininn* B^2-4AC fyrir keilusnið til þess að flokka ferningsjöfnurnar. Notið Reglu 2.3.1. (Sjá t.d. lausn á Dæmi 2.10)

(i) $x^2+y^2-1=0$	(iii) $-x^2+xy+y^2+1=0$	(v) $x+y-xy=1$
(ii) $x^2-y^2-1=0$	(iv) $x^2+2xy+y^2-4=0$	(vi) $x(y-1)=-1$

■

Sannreynið svörin ykkar með `GeoGebra`.

Æfing 2.3.2 Ferningsjafnan

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 6 = 0$$

lýsir hring með geisla $r = \sqrt{7}$ og miðju $C = (1, -3)$. Við getum notað hina almennu keilusniðsjöfnu (2.7) til að sjá að jafnan lýsir hring: $A = C = 2$ og $B = 0$. Til að finna miðju og geisla hringsins þarf að koma ferningsjöfnunni á formið $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$; sem er *almenn jafna hrings*, þar sem $C = (x_0, y_0)$ er miðja hringsins og r er geislinn. Farið að eins og í dæmi 2.8) og sannreynið fullyrðinguna um staðsetningu hringsins. ■

Æfing 2.3.3 Gefin er ferningsjafnan

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + y - 5 = 0. \tag{2.14}$$

(i) Hvaða keilusniði lýsir jafna (2.14) (Notið setningu 2.3.1)
(ii) Skrifið upp almenna jöfnu á keilusniðsins skv. skilgreiningu. (Skrifið upp skilgreininguna).
(iii) Komið jöfnu (2.14) á form almennu jöfnunnar fyrir keilusniðið.

■

Æfing 2.3.4 Einangrið y úr jöfnunni $(x-1)(y+2) = 1$ og rissið upp mynd (án forrits) Hvaða keilusniði lýsir jafnan? (Sannreynið með `GeoGebra`) ■

Æfing 2.3.5 Hliðrið grunnfleygboganum $y = x^2$ um 3 einingar til hægri og 2 einingar niður. Gefið jöfnu fleygbogans eftir hliðrun. ■

Æfing 2.3.6 Til að finna graf $|x| + |y| = 1$, notum við skilgreiningu á tölugildi og skoðum hvernig línurnar líta í öllum fjórðungum sléttunnar
I: Ef $x \geq 0, y \geq 0$ þá fæst jafnan $x + y = 1$.
II: Ef $x < 0, y \geq 0$ þá fæst jafnan $-x + y = 1$
III: Ef $x < 0, y < 0$ þá fæst jafnan $-x - y = 1$
IV: Ef $x \geq 0, y < 0$ þá fæst jafna $x - y = 1$
Þessar fjögur línustrik mynda tígul (teiknið fallritið). ■

Æfing 2.3.7 Sýnið að ójafnan $|x| + |y| \leq 1$ loki af tígullaga svæði í $\mathbb{R}^2$. Teiknið mynd. ■

Æfing 2.3.8 Lýsið svæðinu sem ákvarðast af ójöfnunum $x^2 + y^2 - 2x - 1 < 0$ og $x < \frac{1}{2}$. Teiknið mynd í `Geogebra`. ■

2.4 Föll og fallrit

Skilgreining 2.4.1 Látum A og B vera mengi.
(i) **Fall** (*e. function*) eða **vörpun** (*e. mapping*) f frá A til B, táknað $f : A \to B$, er forskrift sem úthlutar sérhverju staki $x \in A$ nákvæmlega einu staki $y \in B$,

ritað $x \mapsto y$. Oft skrifar maður $f(x)$ í stað y eða þá beint einhverja formúlu sem tiltekur hvernig $y = f(x)$ er smíðað.

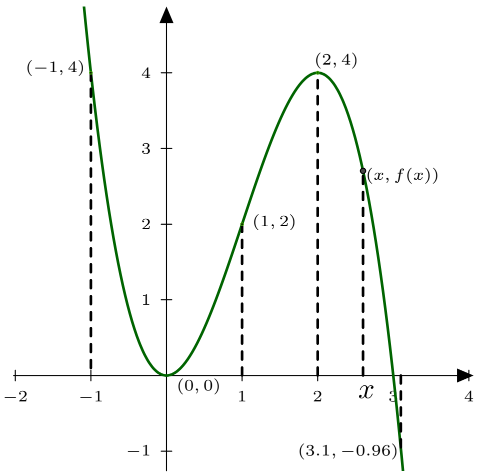
(ii) Mengið A er kallað **formengi** (*e. domain*) fallsins f og mengið B er kallað **bakmengi** eða **varpmengi** (*e. codomain*) fallsins f.

(iii) **Fallrit** eða **graf** (*e. graph*) fallsins $f : A \to B$ er mengið

$$\Gamma(f) \equiv \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\}.$$

Ljóst er að $\Gamma(f) \subseteq A \times B$.

Ef punktur $(x, y) \in \Gamma(f)$ þá er gildið $y = f(x)$ hæð ferilsins ofan við punktinn x (eða neðan við x ef $f(x) < 0$).



Mynd 2.9: Á myndinni sjáum við hluta af $\Gamma(x^2(3-x))$, þ.e. hluta af ferli fallsins $f(x) = x^2(3-x)$ og nokkra punkta $(x, y) \in \Gamma(f)$.

■ **Dæmi 2.14** Gefið er fallið $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Þá er

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 3 \cdot 1 + 1 = 4 \\ f(f(1)) &= f(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13 \\ f(-a) &= 3(-a) + 1 = -3a + 1 \\ f(x-1) &= 3(x-1) + 1 = 3x - 2 \\ f(f(x)) &= f(3x+1) = 3(3x+1) + 1 = 9x + 4 \end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 2.15** Dæmi um föll:

(i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$. Formengið er $\mathbb{R}$, bakmengið er $\mathbb{R}$.

(ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x-1}{x}$. Formengið er $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ og bakmengið er $\mathbb{R}$.

(iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} x, & \text{ef } x \geq 0, \\ -x, & \text{ef } x < 0. \end{cases}$

Formengi þessa falls er $\mathbb{R}$ og bakmengið er $\mathbb{R}$. Þetta fall er kallað **tölugildisfallið** eða **algildisfallið** og yfirleitt táknað með $|x|$.

■

ATH Til að skilgreina fall $f : A \longrightarrow B$ þarf strangt til tekið að taka fram þrennt. *Formengið* A, *bakmengið* B og *forskriftina* hvernig $f(x) \in B$ er smíðað úr $x \in A$.

Skilgreining 2.4.2 Látum $f : A \to B$ vera fall og $C \subseteq A$. Mengi þeirra $f(x)$ sem fallið f tekur fyrir $x \in C$ er kallað **mynd** mengisins C undir fallinu f og er táknað

$$f(C) \equiv \{\, f(x) \mid x \in C \,\}$$

Mengi þeirra gilda sem fallið tekur, þ.e. mengið

$$f(A) \equiv \{\, f(x) \mid x \in A \,\}$$

er kallað **myndmengi** eða **mynd** (*e. range*) fallsins f.

Ljóst er að mynd fallsins $f : A \longrightarrow B$ er hlutmengi í bakmenginu B. Athugið vel að við gerum greinarmun á föllunum $f : A \longrightarrow B$ og $g : A \longrightarrow f(A)$, $g(x) = f(x)$, þó svo að þau taki sömu gildin fyrir öll $x \in A$, því að þau eru ekki með sama bakmengið. Tvö föll eru sama fallið, þá og því aðeins að þau hafi sama formengi, sama bakmengi og taki sömu gildi fyrir öll stök í formenginu.

■ **Dæmi 2.16** Dæmi um föll:

(i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x$. Myndmengið er $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

(ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x-1}{x}$. Myndmengið er $f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Það sést t.d. með því að einangra x úr jöfnunni $y = \dfrac{x-1}{x}$ sem gefur $x = \dfrac{1}{1-y}$. Fyrir sérhvert $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 1$, er semsagt $f(1/(1-y)) = y$, sem sýnir að $f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(iii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} x, & \text{ef } x \geq 0, \\ -x, & \text{ef } x < 0. \end{cases}$ Myndmengið er $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

■

■ **Dæmi 2.17** Lítum aftur á fallið $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Þetta er fullyrðingin *sínus af rauntölu er rauntala* með öðrum orðum, sínus er raungilt (bakmengið) fall á mengi allra rauntalna (formengið): Fallið $\sin : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ er gefið með sömu formúlu og $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en þetta eru ekki sömu föllin því formengin eru ekki þau sömu. Stærsta formengi sem sínusfallið getur tekið er öll rauntalnalínan $\mathbb{R}$. Með þessu formengi verður myndmengi sínusfallsins $f(x) = \sin x$ mengið $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. ■

Skilgreining 2.4.3

(i) Við táknum **formengi** falls f með $\mathrm{Dom}(f)$, $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}_f$ eða einfaldlega $\mathcal{D}$ ef augljóst er hvert fallið er. Annar möguleiki er að gefum formenginu einfaldlega eitthvert heiti með hástaf eins og A.

(ii) Við táknum **myndmengi** falls f með $\mathcal{R}(f)$ eða $\mathcal{R}_f$. Einnig er stundum skrifað $f(A)$ ef formengið er kallað A. Við segjum líka að $f(A)$ sé **myndin** af A undir fallinu f.

Formengishefðin og Skilgreiningarmengið

Stundum er ekki tekið fram á hvaða bili (eða mengi) gefið fall er skilgreint, en einhver formúla er gefin, t.d. $f(x) = \sqrt{x}$. Í þessum tilfellum gildir **formengishefðin**: *Tekið er stærsta mögulega formengi fallsins*. Stærsta mögulega formengi falls f gefið með formúlu er gefið með **skilgreiningarmengi** formúlunnar. Með formengishefðinni ákvarðast formengi fallsins f af skilgreiningarmengi formúlunni sem gefin er fyrir fallinu. Þá gert er ráð fyrir að fallið sé skilgreint fyrir allar rauntölur x þannig að formúlan $f(x) \in \mathbb{R}$ sé leyfileg. Oft er auðveldast að spyrja spurningarinnar hvaða x má <u>ekki</u> setja inn í formúluna fyrir f til að finna **skilgreiningarmengi** formúlunnar. Í þessum tilfellum setjum við bakmengið sem $\mathbb{R}$.

Tekið saman: ef við skilgreinum fall f með því að gefa formúlu $f(x)$, t.d. $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 1/x$, $f(x) = \ln(\sin x)$, o.s.frv., og tökum ekki fram formengi eða bakmengi fallsins, þá er átt við að formengi f ráðist af skilgreiningarmengi formúlunnar í $\mathbb{R}$, þ.e. fyrir hvaða $x \in \mathbb{R}$ er hægt að setja x inn í formúluna, og bakmengið er $\mathbb{R}$.

Fullyrðingin: Skilgreiningarmengi raungilda fallsins $f(x) = \sqrt{x}$ er allar rauntölur $x \geq 0$, þýðir nákvæmlega það sama og

$$\mathrm{Dom}(f) = [\,0\,, +\infty\,[.$$

Það var ekki erfitt að ákvarða skilgreiningarmengi f af því að við leyfum <u>ekki</u> að neikvæðar tölur séu settar undir rót, ef fallið á að vera raungilt, en það má setja hvaða $x \geq 0$ sem er inn <u>í formúluna</u> sem gefin er fyrir fallinu f.

Skoðum nú fall, köllum það g, sem hefur sömu formúlu og $f : [\,0\,, +\infty\,[\mathbb{R}$ en er skilgreint á strangt minna mengi, t.d. á bilinu $[\,1\,, 2\,]$, heldur en $\mathcal{D}(f) = [\,0\,, +\infty\,[$. Þá segjum við að fallið $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$ þar sem $g(x) = \sqrt{x}$ hafi formengið $[\,1\,, 2\,]$ og skrifum $\mathrm{Dom}(g) = [\,1\,, 2\,]$. Nefnilega, þó að g sé lýst með sömu formúlu og f, þá eru g og f ekki sama fallið af því að $\mathrm{Dom}(g)$ er eiginlegt hlutmengi í $\mathcal{D}(f)$. Maður segir líka að g sé **einskorðun** fallsins f á bilið $[1, 2]$.

Áréttum: Ef formengi falls f, sem hefur formúlu $x \overset{f}{\mapsto} f(x) \in \mathbb{R}$, er ekki gefið. Þá finnum við skilgreiningarmengið sem ákvarðast af formúlunni sem gefin er. Skilgreiningarmengið inniheldur þá þá öll þau $x \in \mathbb{R}$ þar sem eitthvert vit er í formúlunni; t.d. þar sem ekki er deilt með núlli, slétttölu rót er ekki dregin af neikvæðri tölu og $\ln$ ekki tekinn af tölu ≤ 0. Í Dæmi 2.15 eru formengin tilgreind skv. þessari hefð, þ.e.a.s. ákvarða þarf skilgreiningarmengið. Eðlilega getur ekkert raungilt fall haft stærra formengi heldur en skilgreinininingarmengi formúlunnar sem gefin er fyrir því.

■ **Dæmi 2.18**

(i) Finnum formengi raungilda fallsins $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

■ **Lausn** Samkvæmt formengishefðinni ber að taka stærsta mögulega formengi fallsins, nefnilega skilgreiningarmengi formúlunnar sem gefin er fyrir fallinu. Vegna eiginleika ferningsrótarfallsins verður að gilda að $1 - x^2 \geq 0$, sem er jafngilt $(x - 1)(x + 1) \geq 0$. Nú er t.d. hægt að setja upp formerkjatöflu eða skoða fallrit fleygbogans $y = x^2 - 1$ til sjá að ójafnan $(x - 1)(x + 1) \geq 0$ hefur lausnarmengið $-1 \leq x \leq 1$, svo að

$$\mathcal{D}_f = [\,-1\,, 1\,].$$

(ii) Finnum formengi fallsins $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, þar sem $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

■ **Lausn** Samkvæmt lið (i) er $\mathcal{D}_f = [\,-1\,, 1\,]$, en þar sem $f(-1) = f(1) = 0$ þá getum við hvorki leyft $x = -1$ né $x = 1$ í formengi h, því við getum ekki deilt með núlli. Því er

$$\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_f \setminus \{ -1, 1 \} =]-1, 1[$$

formengi h.

■

■ **Dæmi 2.19** Höldum áfram með fallið sem gefið er með formúlunni $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, og gefum okkur smápláss í orðalag. Upphátt gætum við sagt.

> *Raungilda fallið h hefur formengið opna bilið frá mínus einum upp í einn og er gefið með formúlunni: einn á móti rótinni af, einn mínus x í öðru veldi.*

Þetta er heldur löng lýsing, en gengur vel í talmáli með skynsamlegum áherslum. Þetta er auðvitað það sama og

> *Fallið h sem gefið er með formúlunni $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ hefur opna bilið $]-1, 1[$ sem formengi og tekur (fall)gildi í $\mathbb{R}$.*

Allar þessar upplýsingar koma fram, þegar við skrifum einfaldlega

$$h :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

■

Að teikna föll

Þegar við teiknum graf *falls*, þá er

> SÉRHVERJU STAKI Í FORMENGI FALLSINS (á $x-$ásnum) ÚTHLUTAÐ NÁKVÆMLEGA EINU STAKI Í BAKMENGI FALLSINS (á y-ásnum).

Þetta þýðir líka að

> LÓÐRÉTTAR LÍNUR GETA EKKI SKORIÐ GRAF FALLS OFTAR EN EINU SINNI.

Í síðasta kafla skoðuðum við svæði í $\mathbb{R}^2$ og drógum upp línur. Við sjáum að svæði $\mathbb{R}^2$ getur ekki verið graf falls í þessum skilningi og lóðréttar línur eru heldur ekki gröf falla.

Þau föll sem við vinnum mest með er rétt að kunna að rissa upp; svo sem (einfaldar) margliður, hornaföllin og nokkur helstu föllin sem hafa frátekin heiti, t.d.

$$e^x, \ln(x), \sqrt{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, |x| \tag{2.15}$$

svo eitthvað sé nefnt. Einnig er mikilvægt að átta sig á stríkkun falla og hliðrunum. Við notum áfram MATLAB , `GeoGebra` eða grafískar reiknivélar til að teikna upp flóknari föll.

Teiknið upp t.d. upp föllin í (2.15) með `GeoGebra` eða MATLAB og gerið tilraunir með stríkkun og hliðrun.

> *Sér maður fyrir sér fallrit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$? Hugsar maður um hvað x má ekki vera í þessari formúlu? Hvað ef x stefnir á 0 frá vinstri? þ.e. $x \to 0^-$, eða hægri $x \to 0^+$; hvað ef $x \to +\infty$ eða $x \to -\infty$? Hvaða samhverfur blasa við? Hvað um föllin $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ og $\dfrac{-1}{x^2}$?*

■ **Dæmi 2.20** Lítum á eftirfarandi föll:

(a) $a(x) = x$,

(b) $b(x) = x^2$,

(c) $c(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

(d) $d(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

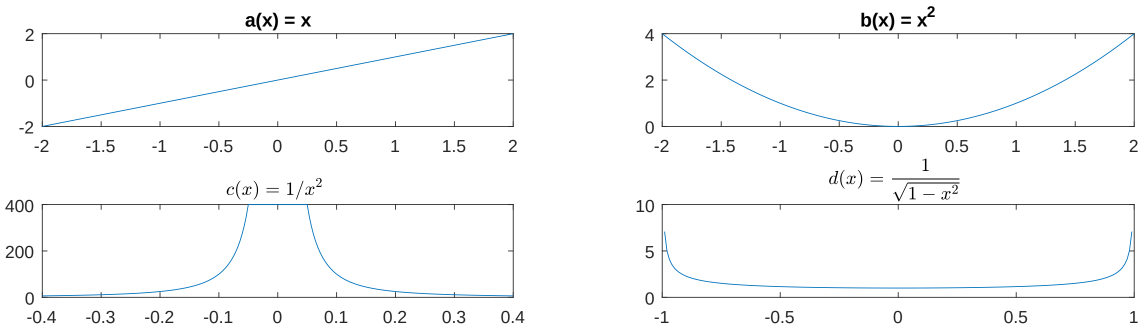
(i) Finnið formengi fallanna skv. formengishefðinni.

(ii) Notið `plot` skipunina í MATLAB til að draga upp ferla fallanna (Auðvitað er oft ekki hægt eða ekkert vit í því að nota stærsta formengið í grafískum vélum, en maður reynir að velja bil fyrir x–in þannig að fallritin verði sem best lýsandi fyrir föllin).

■ **Lausn**

(i) Formengi $a(x) = x$ er $\mathbb{R}$, formengi $b(x) = x^2$ er $\mathbb{R}$, formengi $c(x) = \frac{1}{x^2}$ er $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ og formengi fallsins $d(x)$ var fundið hér á undan sem $\mathrm{Dom}(d) =]-1, 1[$.

(ii) Skrifum keyrsluskrá í MATLAB til að teikna upp föllin.



Mynd 2.10: Fallrit fallanna $a(x) = x$, $b(x) = x^2$, $c(x) = \frac{1}{x^2}$, $d(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ teiknuð upp í MATLAB og `subplot` notað til að raða þeim á eina mynd.

■ **Keyrsluskrá 3**

```
%  Skilgreinum 4 föll og formengi:
%    =================================
clc, clear all
xa = linspace(-2,2,100);     % Formengi fallsins a:
a = xa;                      % Fallið 'a(x) = x'
xb = linspace(-2,2,100);     % Formengi fallsins b:
b = xb.^2;                   % b(x) = x^2
% --------- Skipti upp formengi fallanna c(x) og d(x)  ------------------
    % Fallið c(x) = 1/x^2 er ekki skilgreint í x=0.  Til að tryggja
    % að Matlab dragi ekki upp lóðlínu í x=0, þá klýf ég formengið
    % upp í tvö sundurlæg mengi; vík aðeins frá núlli í þeim báðum:
franulli = 0.05;                      % Prófa þessa fjarlægð frá núlli
endap = 0.4;                          % Geri tilraunir með formengi
xc_l = linspace(-endap,-franulli,100);    % Vinstra megin við núll
xc_r = linspace(franulli,endap,100);      % Hægra megin við núll
xc = [xc_l xc_r];                         % Formengi fallsins c:
c = 1./xc.^2;                             % c(x) = 1/x^2

bil = 0.01;                   % bil frá jaðri formengisi fallsins d:
xd =-1+bil:0.01:1-bil;         % Formengi d: Nefnari ekki of nál. núlli
d = 1./sqrt(1-xd.^2);         % d(x) = 1/sqrt(1-x^2)

%      ==============================
%      II Staðset og teikna myndirnar
```

```
%     ==============================
%     ------------- subplot staðsetur myndir (plot)-------------------
     % subplot(2,2,MyndNumer) staðsetur 4 plot á eina mynd:
     % 2x2 rammar: MyndNumer = 1 setur mynd í vinstra horni efst,
     % eins og að lesa bók, frá vinstri til hægri, svo næsta lína.
%     =======================    MYND 1    =======================
subplot(2,2,1)          % Mynd 1 fer efst til vinstri
plot(xa,a)              % Mynd 1 er ferill fallsins a.
title(' a(x) = x ')
                    % -- asar:  4 stök ákvarða lengdir hnitaásanna --
 asar = [xa(1) xa(end) a(1) a(end)];
                    % Lárétt: xa(1) <--> xa(end) [úr formenginu]
                    % Lóðrétt: Frá a(1) til a(end) [úr myndmenginu]
 axis(asar);         % Teikna ása: axis skipunin þarf fjögur stök: asar
%     =======================    MYND 2    =======================
 subplot(2,2,2)      % Mynd 2 kemur uppi til hægri
 plot(xb,b)          % Mynd 2 er ferill fallsins b
title('b(x) = x^2') % Yfirskrift grafsins
%axis equal           % Hnitaásar í sama kvarða
%     =======================    MYND 3    =======================
subplot(2,2,3)      % Mynd 3 kemur niður til vinstri
plot(xc,c)          % Mynd 3 teiknuð
        % -------------- Titill á grafi skrifaður í Latex  --------
        % Fáum jöfnur í titli á fallegu formi með "latex interpreter".
        % Þá þarf að skrifa jöfnurnar innan í $$ ... $$
title('$$ c(x) = 1/x^2 $$ ', 'interpreter','latex')
%     =======================    MYND 4    =======================
subplot(2,2,4)              % Mynd 4 fer í neðri línu hægra megin
plot(xd,d)                  % Mynd 4 teiknuð, með Latex letri í titli
title(' $$ d(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} $$ ', 'interpreter','latex')
print -depsc subplotta.eps  % Encapsulated PostScript (EPS)
```

■

2.4.1 Jafnstæð og oddstæð föll

Jafnstæð og oddstæð föll hafa ákveðnar *samhverfur* sem eru lýsandi fyrir hvora gerð.

Skilgreining 2.4.4 Gerum ráð fyrir að $-x$ sé í formengi fallsins f hvenær sem x er í formengi f. Við segjum þá að f sé **jafnstætt fall** (*e. even function*) ef

$$f(-x) = f(x) \ \text{ fyrir sérhvert } x \text{ í formengi } f.$$

og við segjum að f sé **oddstætt fall** (*e. odd function*) ef

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{fyrir sérhvert } x \text{ í formengi } f.$$

■ **Dæmi 2.21**

(i) Línan $f(x) = x$ er oddstætt fall, því að $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, svo að $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}_f$, og

$$f(-x) = -x = -f(x).$$

(ii) Allar línur sem liggja í gegnum $(0,0)$ eru oddstæð föll, þ.e.a.s. öll föll á forminu $f(x) = ax$ þar sem a er fasti, eru oddstæð föll. Þetta sést af því að ef $x \in \mathcal{D}_f$ þá er $-x \in \mathcal{D}_f$ og

$$f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x).$$

Fyrir hvaða $a \in \mathbb{R}$ er $f(x) = ax$ líka jafnstætt fall?

■

■ **Dæmi 2.22**

(i) Fallið $f(x) = x^2$ er jafnstætt fall. Ljóst er að $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}_f$ og

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x).$$

(ii) Allar 2. stigs margliður á forminu $f(x) = ax^2 + c$, þar sem a og c eru fastar, eru jafnstæð föll því $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ og

$$f(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = f(x).$$

■

Ferill jafnstæðs fall speglast um y-ásinn, en hvernig lýsirðu samhverfum oddstæðra falla í orðum?

■ **Dæmi 2.23** Fallið $\sin(x)$ er oddstætt, því að $\sin(-x) = -\sin(x)$. Fallið $\cos(x)$ er jafnstætt, því að $\cos(-x) = \cos(x)$. Skoðið fallritin. ■

ATH Flest föll eru hvorki jafnstæð né oddstæð. Skoðið t.d. $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$ og $f(x) = x^2 - x + 2$. Það er nákvæmlega eitt fall sem er bæði jafnstætt og oddstætt, nefnilega $f(x) = 0$. Þetta sést af því að $f(x) = f(-x)$ því f er jafnstætt og $f(x) = -f(-x)$ því f er oddstætt. Þar með er $f(x) = -f(x)$ eða $2f(x) = 0$.

2.4.2 Samsett föll

Skilgreining 2.4.5 Látum $f : A \longrightarrow B$ og $g : C \longrightarrow D$ vera föll. Ef $f(A) \subseteq C$ getum við skilgreint **samskeytta fallið** $g \circ f$, sem er þá fall skilgreint frá A inn í D, með forskriftinni $x \mapsto g(f(x))$ þ.e.

$$g \circ f : A \longrightarrow D, \quad g \circ f(x) \equiv g(f(x)).$$

Skilgreining 2.4.6 Látum f og g vera raungild föll með formengi $\mathrm{Dom}(f), \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}$. Við getum þá skilgreint föllin:

(1)

$$f + g : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) \equiv f(x) + g(x).$$

(2)

$$fg : \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (fg)(x) \equiv f(x)g(x).$$

(3)

$$\frac{1}{g} : \mathrm{Dom}(g) \setminus \{\, x \in \mathrm{Dom}(g) \mid g(x) = 0 \,\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)(x) \equiv \frac{1}{g(x)}.$$

Með því að nota (2) og (3) fæst

(4)

$$\frac{f}{g} : \mathrm{Dom}(f) \cap [\mathrm{Dom}(g) \setminus \{\, x \in \mathrm{Dom}(g) \mid g(x) = 0 \,\}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \equiv \frac{f(x)}{g(x)}$$

Með því að láta f vera fastafall, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \equiv c$, þar sem $c \in \mathbb{R}$ er fasti, fæst

(5)

$$cg : \mathbf{Dom}(g) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (cg)(x) \equiv cg(x).$$

Sér í lagi, með $c = -1$ og (1), fæst

(6)

$$f - g : \mathbf{Dom}(f) \cap \mathbf{Dom}(g) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f-g)(x) \equiv f(x) - g(x).$$

■ **Dæmi 2.24** Með föllunum $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ og $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x^2$ er hægt að smíða fleiri föll, t.d.:

$$\begin{aligned}
f+g : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R},\ (f+g)(x) = \sqrt{x} + x^2,\\
fg : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R},\ (fg)(x) = \sqrt{x}\cdot x^2 = x^{\frac{5}{2}},\\
\frac{1}{g} : \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R},\ \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{x^2},\\
\frac{g}{f} :]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R},\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}.\\
f\circ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R},\ (f\circ g)(x) = \sqrt{x^2} = |x|,\\
g\circ f : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R},\ (g\circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 2.25** Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé jafnstætt fall, og að skilgreiningarmengi f sé $\mathrm{Dom}(f) = [-a\,,a]$, þar sem a er einhver jákvæð rauntala. Þá er $x \mapsto xf(x)$ oddstætt fall.

■ **Lausn** Setjum $g(x) \equiv xf(x)$. Við sjáum útfrá formúlu g að $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f = [-a\,,a]$, og þar sem $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [-a\,,a]$, þá er

$$g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x), \quad \forall x \in [-a\,,a].$$

Þetta þýðir, samkvæmt skilgreiningu, að g er oddstætt fall.

■

Æfingar 2.4

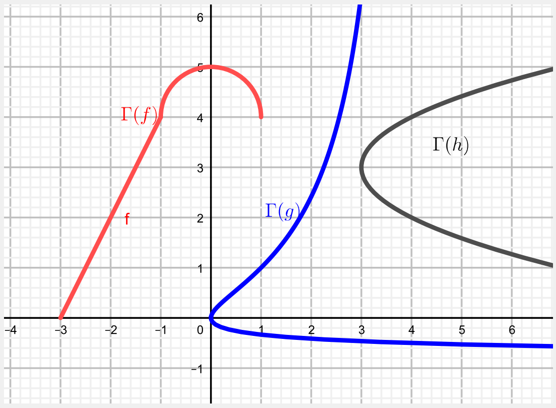
Æfing 2.4.1 Lítum á breiðbogann $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

(i) Finnið skilgreiningarmengi breiðbogans

(ii) Sýnið að $x = \dfrac{1-y}{1+y}$ og ákvarðið myndmengi breiðbogans.

Breiðboginn í Dæmi 2.12 hefur merkilegan eiginleika sem við skoðum betur síðar þegar við tölum um andhverfur falla; nefnilega hefur hann og andhverfa hans sömu formúlu. ■

Æfing 2.4.2 Hverjir eftirtalinna ferla (ferill = graf) á myndinni eru gröf falla



■

Æfing 2.4.3 Skrifið upp skilgreiningu á

(i) jafnstæðu falli (*e. even function*). (ii) oddstæðu falli (*e. odd function*).

■

Æfing 2.4.4 Eftirfarandi föll eru annað hvort oddstæð eða jafnstæð. Sýnið það með reikningum, (Notið skilgreiningarnar)

(i) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,

(ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$,

(iii) $f : [2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = x^{2k}$, þar sem $k \in \mathbb{N}$.

■

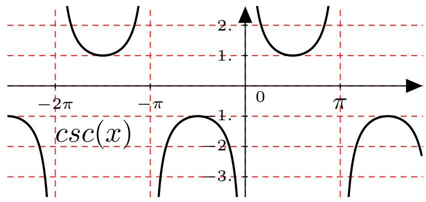
Æfing 2.4.5 Hver eftirtalinna falla eru oddstæð (*e. odd*), hver eru jafnstæð (*e. even*), hver eru hvorki oddstæð né jafnstæð?

(i) $x^2 + 1$ (ii) $\dfrac{x}{x^2 + 1}$ (iii) $1 - x^3$ (iv) $|1 - x|$

■

Æfing 2.4.6 Sýnið að ef $x \mapsto f(x)$ er oddstætt fall þá er $x \mapsto xf(x) + c$, þar sem c er fasti, jafnstætt fall. ■

Núllstöðvar falls f mynda mengi sem kallast **kjarni** (*e. kernel*) fallsins f. Sínusfallið $\sin x$ hefur t.d. núllstöðvar í punktunum $x = -\pi, x = 0, x = \pi$, og almennar í öllum punktum af gerðinni $x = \pi \cdot k$ þar sem $k \in \mathbb{Z}$. Kjarni sínuss er því mengið $\ker(\sin) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\}$ eða einfaldar $\ker(\sin) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$



Umhverfa sínusfallsins kallast **kósekant**;

$$\csc(x) \equiv \frac{1}{\sin x}.$$

Formengið er $\mathrm{Dom}(\csc) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$.
Skoðið Skilgreiningu 2.4.6 (3) á bls. 64

Æfing 2.4.7 Fallið **sekant** er gefið með formúlunni $\sec(x) \equiv \dfrac{1}{\cos x}$. Finnið skilgreiningarmengi $\mathrm{Dom}(\sec)$ sekant-fallsins og teiknið graf þess. ■

Æfing 2.4.8 Hér skoðum við formengi falla.

(i) Finnið formengi gefinna falla skv. formengishefðinni.

(ii) Notið `plot` skipunina í MATLAB til að draga upp ferla fallanna og notið `subplot` til að hafa 4 ferla á hverri mynd eins og í Dæmi 2.20.
Til að láta MATLAB prenta myndirnar á eitthvert skjal er hægt að nota PUBLISH (í handraðaðum (Menu) á milli EDITOR og VIEW) og velja útprentunina á t.d. `Word` skjal eða á `pdf` skrá. Einnig getið þið skrifað neðst í keyrsluskrána ykkar

```
print -depsc heiti.eps
```

[sjá bls. 62, neðsta línan]. Ef þið hafið ekki `eps`-prentara þá mætti prófa

```
print -djpeg100 heiti.jpg
```

eða taka skjámynd ef um allt þrýtur.

(i)
$$a(x) = 1$$
(ii)
$$b(x) = \sin x \quad \texttt{(sin(x))}$$
(iii)
$$c(x) = \cos x$$
(iv)
$$d(x) = \cos(2x) \quad \texttt{(cos(2*x))}$$
(v)
$$e(x) = \frac{1}{\sin x} \quad \texttt{(1./sin(x))}$$
(vi)
$$f(x) = \sqrt{x} \quad \texttt{(sqrt(x))}$$
(vii)
$$g(x) = \frac{1}{x}$$
(viii)
$$h(x) = |x| \quad \texttt{(abs(x))}$$
(ix)
$$i(x) = e^x \quad \texttt{(exp(x))}$$
(x)
$$j(x) = 1 + \sqrt{x-4}$$
(xi)
$$k(x) = x^{1/3} \quad \texttt{(nthroot(x,3))}$$
(xii)
$$l(x) = \frac{2-x}{x-1}$$

■

Æfing 2.4.9 Skoðið nú skilgreiningar 2.4.5 og 2.4.6 um samskeytt föll og samsett föll. Hér ætlum við að skoða að gæta þarf að formengjum þegar smíða á eitt fall úr tveimur föllum. [a] Lítum á föllin $f(x) = \sqrt{-x-1}$ og $g(x) = \sqrt{x-1}$.

(i) Teiknið upp $\Gamma(f)$ og $\Gamma(g)$ (ferla fallanna f og g) í einni mynd í forritinu `GeoGebra`:
```
f(x) = sqrt(-x-1), g(x) = sqrt(x-1)
```
(ii) Sláið inn $f(x)+g(x)$ í `GeoGebra`: Það á að vera nóg á slá í `input` : `f(x)+g(x)` *ef búið er að skilgreina* f og g: Sannreynið að $\Gamma(f+g)$ hefur engan feril.

(iii) Ákvarðið $\mathrm{Dom}(f)$ og $\mathrm{Dom}(g)$ og sannreynið að þessi mengi eru sundurlæg, þ.e. $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \emptyset$.

(iv) Notið Skilgreiningu 2.4.6 (1) til að álykta að $\mathrm{Dom}(f+g) = \emptyset$. (Það er því lítið vit í að skilgreina fallið $f+g$.)

(v) Notið Skilgreiningu 2.4.5. Skilgreina má fall $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Finnið formúlu fallsins og mengið A. `GeoGebra`: *Nóg er að slá inn* `g(f(x))` *í* `input` *ef búið er að skilgreina* f og g:

(vi) Af hverju er lítið vit í að skilgreina raungilt fall með formúlunni
$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{-\sqrt{x-1}-1}$$

■

[a] Við viljum að formengi samsetts falls sé rauntalnabil eða sammengi bila og það sé raungilt fall; þ.e. fallgildi samsetta fallsins sé rauntala.

Æfing 2.4.10 Fyllið í eyðurnar

	$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g(x)$
(i)	x^2	$x+1$	
(ii)		$x+4$	x
(iii)	$\sqrt{x}$		$\lvert x \rvert$
(iv)		$x^{1/3}$	$2x+3$
(v)	$(x+1)/x$		x
(vi)		$x-1$	$1/x^2$

■

Æfing 2.4.11 Í þessari æfingu ætlum við að kynnast *gólffallinu* $floor(x)$ og *loftfallinu* $ceil(x)$. Notið `Geogebra`.

(1) (i) `floor(4.2)`
(ii) `ceil(4.2)`
(iii) `4.2 - floor(4.2)`
(iv) `4.2 - ceil(4.2)`

(2) (i) `floor(x)`
(ii) `ceil(x)`
(iii) `x - floor(x)`
(iv) `x - ceil(x)`

(3) (i) `floor(x^2)`
(ii) `ceil(sin(x))`
(iii) `x- ceil(sin(x))`
(iv) `ceil(x-floor(x))`

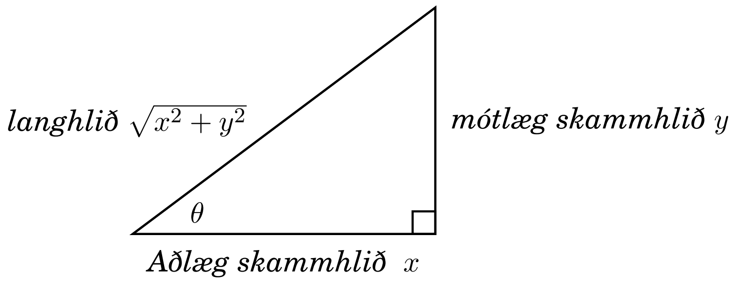
■

2.5 Hornaföll

Lítum á mynd af rétthyrndum þríhyrningi til upprifjunar. Ef við táknum lengdir skammhliðar hans með x og y þá er $\sqrt{x^2+y^2}$ lengd langhliðarinnar sem veit á móti rétta horninu. Hornið θ sem við sjáum á myndinni *veit að* hliðinni með lengd x og *veit á móti* hliðinni með lengd y. Við segjum þá að miðað við θ er hliðin með lengd x *aðlæg skammhlið* og að hliðin með lengd y sé *mótlæg skammhlið*. Þríhyrningurinn er rétthyrndur svo að $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Hornaföllin sínus og kósínus eru hluföllin

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



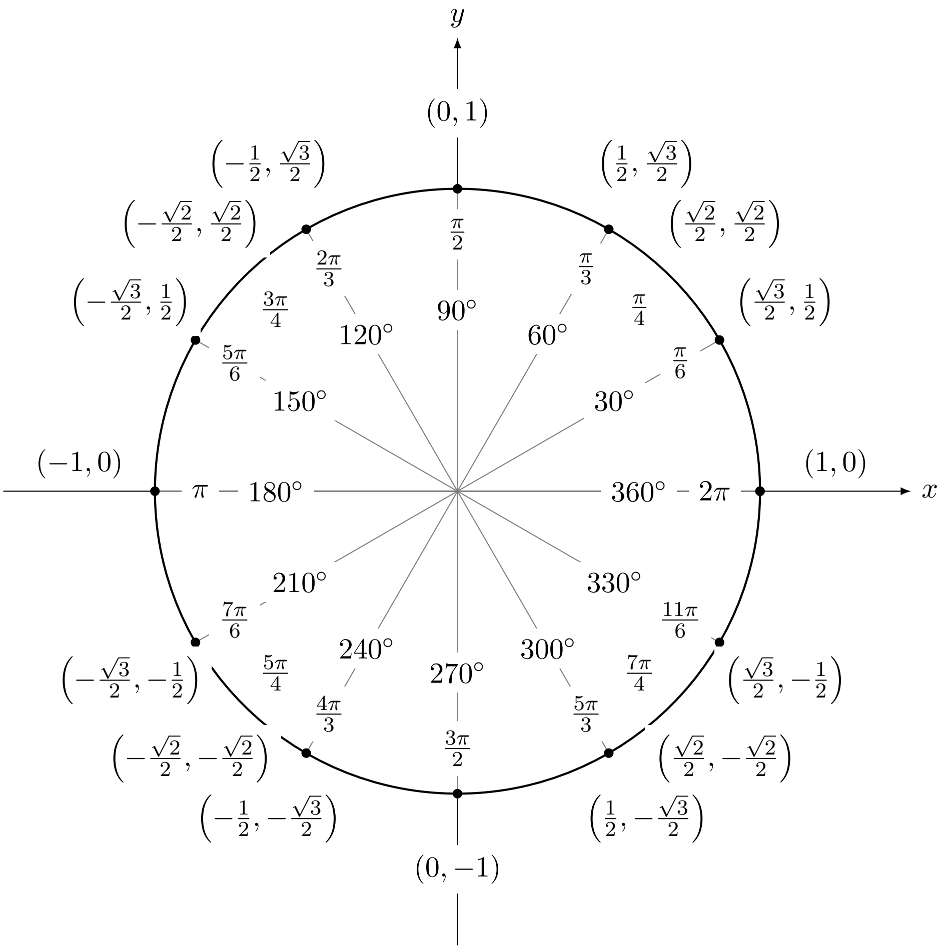
Í stærðfræðigreiningu viljum við skilgreina hornaföllin fyrir öll $\theta \in \mathbb{R}$. Skilgreining hornafallanna $\sin$ (sínus), $\cos$ (kósínus) og $\tan$ (tangens) ætti að vera vel þekkt. Ef ekki þarf að rifja þær upp. Sú venja er ríkjandi í stærðfræðigreiningu að mæla horn í **bogamálseiningum** (*e. radian*) en í flatarmyndafræði eru **gráður** oft notaðar. Ef annað er ekki sérstaklega tekið fram, þá mælum við horn í bogamálseiningum. Sambandið er einfalt 1 [bogamálseining] $= \dfrac{180}{\pi}$ [gráður] og þá 1 [gráða] $= \dfrac{\pi}{180}$ [bogamálseiningar]. Við minnum á að $\pi \equiv \dfrac{\text{ummál hrings}}{\text{þvermál hrings}}$.

Gráður	0	30	45	60	90	120	135	150	180
bogam.ein. θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	óskilgreint	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Regla 2.5.1 Fyrir öll $t \in \mathbb{R}$ gildir:

$$\sin(-t) = -\sin t \tag{2.16}$$
$$\cos(-t) = \cos t \tag{2.17}$$
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \tag{2.18}$$
$$\tan(-t) = -\tan t \tag{2.19}$$

Jöfnur (2.16) og (2.17) lýsa því að sínus er oddstætt fall og kósínus er jafnstætt fall. Af jöfnu 2.19 sést að tangens er oddstætt fall. Til að fá fleiri gildi fyrir kósínus og sínus og til að auðvelda okkur að muna formúlurnar í framhaldinu fáum við mynd af staðsetningu $(\cos t, \sin t)$ fyrir nokkur gildi á $t \in [0, 2\pi]$ á einingarhringnum og með tilsvarandi gildum í gráðum $[0°, 360°]$



Mynd 2.11: punkturinn $(\cos t, \sin t)$ er á einingarhringnum, $t \in [0, 2\pi]$.

Tvær summureglur þarf að muna.

Regla 2.5.2 Fyrir öll $t, u \in \mathbb{R}$:

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u \tag{2.20}$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u. \tag{2.21}$$

Með því að setja $-u$ í staðinn fyrir u í þessar formúlur og nota jöfnur (2.16) og (2.17)

Regla 2.5.3 Fyrir öll $t, u \in \mathbb{R}$ gildir:

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u \text{ og} \tag{2.22}$$
$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u. \tag{2.23}$$

Einnig fæst úr þessum formúlum með því að nota $\sin(2\pi) = 0$ og $\cos(2\pi) = 1$ að:

Regla 2.5.4 Kósínus og sínus eru lotubundin með lotu 2π

$$\cos(t+2\pi) = \cos t, \tag{2.24}$$
$$\sin(t+2\pi) = \sin t \tag{2.25}$$

Ef við setjum $u = t$ í Reglu 2.5.3 fæst

Regla 2.5.5 Formúlur fyrir ***tvöfalt horn***

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \tag{2.26}$$

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t \tag{2.27}$$

Summa og mismunur jafnanna $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ og $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ gefa svo

Regla 2.5.6

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \tag{2.28}$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \tag{2.29}$$

Ef sínus eða kósínus er hliðrað fram eða aftur um hálfa lotu π ($180°$ á einingarhringnum) þá skiptir fallgildið um formerki. Þetta sést með því að setja $\sin(\pm\pi) = 0$ og $\cos(\pm\pi) = \pm 1$ inn í Reglu 2.5.3.

Regla 2.5.7

$$\cos(t \pm \pi) = -\cos t \tag{2.30}$$

$$\sin(t \pm \pi) = -\sin t \tag{2.31}$$

Sínus hliðrað um fjórðung úr lotu ($90°$ á einingarhringnum) gefur kósínus og kósínus hliðrað um fjórðung úr lotu er mínus sínus. Þetta sést enn og aftur út frá Reglu 2.5.3, nú með því að setja $\sin(pi/2) = 1$ og $\cos(\pi/2) = 0$:

Regla 2.5.8

$$\sin(t + \pi/2) = \cos t \tag{2.32}$$

$$\cos(t + \pi/2) = -\sin t \tag{2.33}$$

Nokkrar mikilvægar hornafallaformúlur fyrir þríhyrninga á líka að þekkja:

Regla 2.5.9 — Kósínusreglan og regla Pýþagórasar. Við skoðum þríhyrning með hliðarlengdir a, b og c og horn A, B og C, þar sem A er mótstætt hliðinni með lengd a, B mótstætt b og C mótstætt c.

(i) Þá gildir

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{2.34}$$

(ii) Ef $C = \frac{\pi}{2} = 90°$, þá gildir

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ og } \cos A = \frac{b}{c} \tag{2.35}$$

og í þessu sértilfelli einfaldast Kósínusreglan í $c^2 = a^2 + b^2$ því $\cos C = 0$ og er nefnd regla Pýþagórasar.

Einnig

$$[\text{Flatarmál þríhyrningsins}] = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A. \tag{2.36}$$

Af síðustu formúlunni leiðir svo

Regla 2.5.10 — Sínusreglan.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \tag{2.37}$$

Æfingar 2.5

Æfing 2.5.1 Notið að $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ og að $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ til að leiða út formúlurnar í Reglu 2.5.6 fyrir ***hálfu horni*** (þá er hugsað sem svo að t sé helmingun hornsins $2t$). ■

Æfing 2.5.2 Reiknið eftirfarandi án þess að nota reiknivél. Breytið einnig bogalengdunum í gráður:

(i) $$\cos\frac{3\pi}{4}$$

(ii) $$\sin\frac{11\pi}{12}$$

(iii) $$\sin\frac{7\pi}{12}$$

(iv) $$\cos\frac{2\pi}{3}$$

(v) $$\tan\frac{2\pi}{3}$$

(vi) $$\cos\frac{5\pi}{12}$$

Aðferð t.d.
$\sin(105°) = \sin(60°)\sin(45°) + \cos(60°)\sin(45°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ■

Æfing 2.5.3 Sýnið eftirfarandi formúlur og takið fram fyrir hvaða $t \in \mathbb{R}$ þær gilda:

(i) $$\cos^4 t - \sin^4 t = \cos(2t)$$

(ii) $$\frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \tan^2(\frac{t}{2})$$

(iii) $$\frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{\sin t}{1+\cos t} = \tan(\frac{t}{2})$$

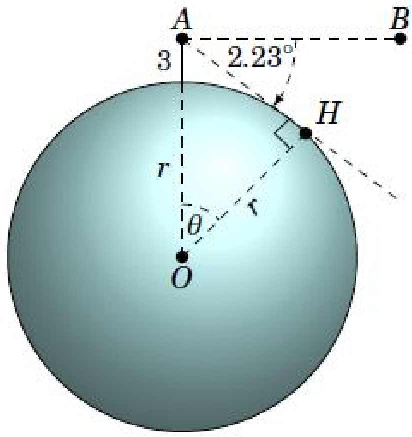
(iv) $$\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} = \sec(2t) - \tan(2t)$$

■

Æfing 2.5.4 Reiknið flatarmál þríhyrningsins $\triangle ABC$ með hornpunkta $A = (0,0)$, $B = (1,4)$, $C = (-1,-3)$. ■

Æfing 2.5.5 Erastosþenes stendur hátt í hlíðum McKinley fjalls í Alaska með kompás upp á arminn og tommustokk í vasanum. Þremur mílum ofan sjávarmáls vegur hann salt á ystu nös þegar hann leitar uppi horn $\angle HAB$ þannig að $\angle OAB = 90°$. Hann mælir $\angle HAB = 2.23°$. Jörðin er sporvala, en hann gerir þá nálgun að jörðin sé fullkomlega kúlulaga. Tommustokkurinn kemur að litlum notum; hjálpið honum við að reikna út r, geisla jarðarinnar [í mílum].

[*Meðalgeisli jarðar er um 3 956.6 mílur.*] ■



3. Markgildi og samfelldni

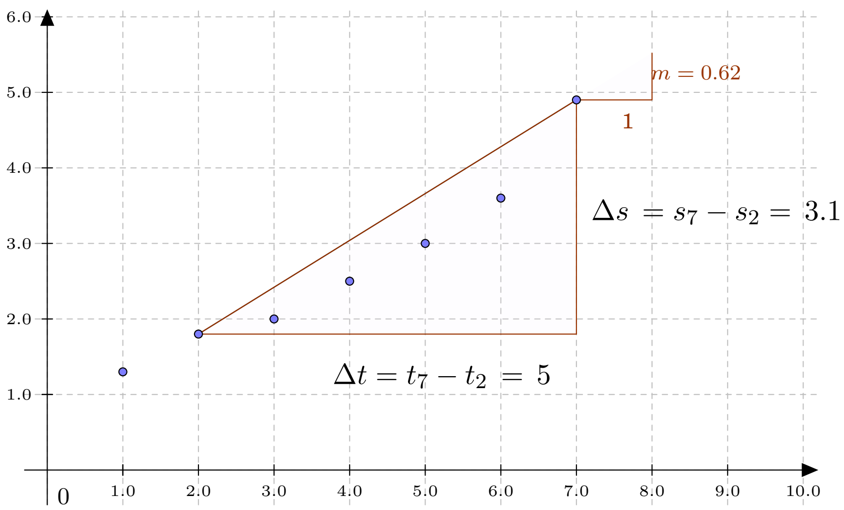
3.1 Markgildi

Meðalvaxtarhraði (e. average rate of change)

Hugsum okkur að við séum í ferðalagi sem tekur 7 klukkustundir. Við skráum hjá okkur vegalengdina sem við höfum lagt að baki á klukkustundarfresti. Vegalengdin s sem við förum er fall af tíma t þannig að ef við leggjum af stað þegar tíminn er $t_0 = 0$ þá er

$$s(t) = \text{ heildarvegalengd að baki á tímanum } t, \quad 0 \leq t \leq 7.$$

Mynd 3.1: Vegalengdar-tíma graf



Við setjum mælingarnar upp í töflu

$t_{\text{[klst]}}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$s(t)_{\text{[km]}}$	0	1.3	1.8	2.0	2.5	3.0	3.6	4.9

Meðalhraði á tímabilinu $t \in [t_n, t_m]$ er

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_m) - s(t_n)}{t_m - t_n}. \tag{3.1}$$

Við getum því reiknað meðalhraða $\overline{v}$ á ýmsum tímabilum. Til dæmis er meðalhraðinn á tímabilinu $t \in [2, 7]$

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(7) - s(2)}{7 - 2} = \frac{4.9 - 1.8}{5} = \frac{3.1}{5} = 0.62\,\text{km/klst.}$$

Við þekkjum svona verkefni vel; eftir því sem tímamælingarnar eru þéttari þá getum við fengið æ nákvæmari upplýsingar um ferðalagið. Okkur langar líka að vita hvernig við reiknum hraðann á tilteknu augnabliki, *augnablikshraðann (e. instantaneous velocity)* en til þess af fá gott mat á hann hefði þurft að mæla tímann mun tíðar og nákvæmar. Hver var t.d. hraðinn á augnablikinu $t = 2$? Við lærum um markgildi.

Héðan í frá eru öll föll raungild og formengi þeirra er eitthvert hlutmengi í $\mathbb{R}$ nema að annað sé tekið fram.

Skilgreining 3.1.1 — óformleg. Ef $f(x)$ er skilgreint fyrir öll x nálægt punkti a, nema hugsanlega í punktinum a, og ef $f(x)$ tekur gildi eins nálægt L og hugsast getur með því að taka x nógu nálægt a, en ekki jafnt og a, þá segjum að fallið f stefni á **markgildið** L þegar x stefnir á a, og skrifum

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{eða} \quad f(x) \longrightarrow L \text{ þegar } x \longrightarrow a.$$

■ **Dæmi 3.1** Lítum á ræða fallið $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$. Formengi þess er $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, m.ö.o. er f skilgreint fyrir allar rauntölur nema -1 og 1. Þetta þýðir með enn öðrum orðum að $f(x)$ er ekki skilgreint ef $x = -1$ og ekki ef $x = 1$. Byrjum á því að spyrja: Stefnir $f(x)$ á einhverja tölu L þegar x stefnir á 1 ?

■ **Lausn** Til að svara þessari spurningu finnum við *minnkandi* runu af tölum $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sem nálgast töluna 1 og reiknum fallgildi f í sérhverju staki rununnar og skoðum á hvaða tölu fallgildið nálgast fyrir stór n eða öllu heldur, hvort runa fallgildanna nálgist yfirleitt einhverja ákveðna tölu.

Runan sem hefur almenna liðinn $x_k = 1 + \dfrac{1}{k}$, þar sem k er númer liðar, er heppileg. Þeim mun stærri $k \in \mathbb{N}$ þeim mun nær færist x_k að 1 ofan frá. Reiknum í MATLAB út fallgildi 100000 liða, en látum nægja að skrá í gildistöflu liði með númer 1,10, 100, 1000, 10000 og 100000.

■ **Keyrsluskrá 4**

```
clc
format long
n = 100000;
x = zeros(1,n);
f = zeros(1,n);
for k=1:n
    x(k)=1 + 1./k;
    f(k) =(x(k).^2 + 2*x(k) +1)./(x(k).^2-1);
end
X = [x(1)  x(10)    x(100)  x(1000)  x(n)];
F = [f(1)  f(10)    f(100)  f(1000)  f(n)];

matrix = [X; F]
```

x	2	1.1	1.01	1.001	1.00001
$f(x)$	3	21	201	2001	200001

Okkur virðist $f(x)$ vaxa yfir öll mörk, þ.e. $f(x) \longrightarrow +\infty$, þegar x stefnir á 2 að ofan (frá hægri). Við segjum þá að f hafi ekki markgildi í 1 frá hægri.

Við skoðum líka vaxandi runu sem stefnir á 1 en tekur ekki gildið 1. Runan $x_k = 1 - \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ er heppileg; skrifum út í gildistöflu, liði með sömu númer og áðan:

x	0	0.9	0.99	0.999	0.99999
$f(x)$	-1	-19	-199	-1999	-199999

Við ályktum að $f(x) \longrightarrow -\infty$ þegar x stefnir á x frá vinstri.

Markgildi er því ekki til þegar x stefnir á 1.

Hvað um -1? Förum eins að og að ofan nema að nú höfum við runur með almennu liðina $t_k^+ = -1 + \dfrac{1}{k}$ og $t_k^- = -1 - \dfrac{1}{k}$:
Runan (t_k^+), er smíðuð þannig að hún stefnir á -1 frá hægri (að ofan). Fáum gildistöflu

k	1	10	100	1000	100000
t_k^+	0	-0.9	-0.99	-0.999	-0.99999
$f(t_k^+)$	-1	-0.0526316	-0.00502513	-0.00050025	-0.0000050

og úr seinni rununni, sem stefnir á -1 frá vinstri (að neðan), fæst

k	1	10	100	1000	100000
t_k^-	-2	-1.1	-1.01	-1.001	-1.00001
$f(t_k^-)$	0.333333	0.047619	0.00497512	0.00049975	0.0000049

Við ályktum því að $f(x) \longrightarrow 0$ þegar $x \longrightarrow -1$, en fallgildið $f(-1)$ er eftir sem áður ekki skilgreint.
Fallrit f er breiðbogi með lóðfellu í $x = 1$ en ferillinn er rofinn í $x = -1$. Þetta sést út frá

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

svo að einfalda má formúluna fyrir fallið sem

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}, \quad x \neq 1, x \neq -1 \Longleftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1, x \neq -1$$

Athugið vel að þó að þátturinn $(x+1)$ styttist út, þá var f ekki skilgreint í $x=-1$ og formengið breytist ekki þó að hægt sé að skrifa fallið upp á annan eða einfaldari hátt.

■

Æfingar 3.1

Æfing 3.1.1 Fallið $s(t)=t^2$ gefur staðsetningu agnar á x-ásnum sem fall af tíma t. Reiknið meðalhraða agnarinnar yfir tímabilið $[t_0, t_0+h]$ það sem t_0 og $h>0$ eru fastar. Hvernig mynduð þið reikna augnablikshraða agnarinnar við tímann $t_0=3$? Hvar er ögnin stödd á þessum tímapunkti? ■

Æfing 3.1.2

(i) Finnið formengi fallsins $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

(ii) Notið MATLAB í þessum lið: Búið til talnarunur $(x_k^+) = (1.1,\, 1.01,\, \dots)$ og $(x_k^-) = (0.9,\, 0.99,\, \dots)$ eða eins og Dæmi (3.1) til að sjá að $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

(iii) Þáttið teljarann í stæðunni $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ styttið og sýnið svo að $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$. ■

3.2 Markgildisreglur

Setjum nú fram skilgreiningu á markgildi frá hægri og markgildi frá vinstri.

Skilgreining 3.2.1 Látum f vera fall og $a\in\mathbb{R}$.

Markgildi frá vinstri: Ef formengi f inniheldur opið bil vinstra megin við a (þ.e. til er rauntala $b<a$ þ.a. f er skilgreint fyrir öll $x\in]b,a[$) og til er $L\in\mathbb{R}$ þ.a. við getum tryggt að $|f(x)-L|$ verði eins lítið og við viljum með því að taka $x<a$ nógu nálægt a (þ.e. $|x-a|\neq 0$ lítið), þá segjum við að $f(x)$ hafi markgildið L þegar x stefnir á a frá vinstri og við ritum

$$\lim_{x\to a-} f(x)=L.$$

eða

$$f(x)\longrightarrow L \quad \text{þegar} \quad x\longrightarrow a-$$

Markgildi frá hægri: Ef formengi f inniheldur opið bil hægra megin við a (þ.e. til er rauntala $b>a$ þ.a. f er skilgreint fyrir öll $x\in]a,b[$) og til er $L\in\mathbb{R}$ þ.a. við getum tryggt að $|f(x)-L|$ verði eins lítið og við viljum með því að taka $x>a$ nógu nálægt a (þ.e. $|x-a|\neq 0$ lítið), þá segjum við að $f(x)$ hafi markgildið L þegar x stefnir á a frá hægri og við ritum

$$\lim_{x\to a+} f(x)=L$$

eða

$$f(x) \longrightarrow L \quad \text{þegar} \quad x \longrightarrow a+$$

Markgildi falls frá vinstri í einhverjum punkti $a \in \mathbb{R}$ þarf ekki að vera það sama og markgildi fallsins frá hægri í a.

■ **Dæmi 3.2** Skoðum markgildi fallsins $f(x)$ frá hægri og vinstri í punktinum a

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -1, & \text{ef } x < a, \\ 0, & \text{ef } x = a, \\ 1, & \text{ef } x > a. \end{cases}$$

Þetta fall hefur ekki sama markgildi í a frá hægri og í a frá vinstri;

$$\lim_{x \to a-} f(x) = -1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = 1.$$

■

Fall þarf hvorki að hafa markgildi frá hægri né vinstri í einhverjum tilteknum punkti.

■ **Dæmi 3.3** Skoðum markgildi fallsins f frá hægri og vinstri í punktinum 0.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ef } x = 1/k \text{ fyrir eitthvert } k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{annars.} \end{cases}$$

Þetta fall hefur hvorki markgildi frá hægri né vinstri í núlli. Athugið sérstaklega að það að til séu x nálægt núlli þ.a. $|f(x) - 0| = 0$ tryggir ekki að $f(x)$ hafi markgildið 0 í núlli. Það eru nefnilega líka til x nálægt núlli þ.a. $|f(x) - 1| = 0$. ■

■ **Dæmi 3.4** Skoðum markgildi fallsins $f(x) = \sqrt{2 - x}$ þegar x nálgast 2 frá hægri og vinstri.

$$\lim_{x \to 2-} \sqrt{2 - x} = 0$$

en markgildið

$$\lim_{x \to 2+} \sqrt{2 - x}$$

er ekki til, því fallið er ekki skilgreint hægra megin við 2, formengið inniheldur sem sagt ekki opið bil $]2, a[$ þar sem $a > 2$. Fallið getur því ekki haft markgildi frá hægri samkvæmt Skilgreiningu 3.2.1. ■

Tökum þessar skilgreiningar og athuganir saman í mikilvæga reglu og skilgreiningu um leið.

Regla 3.2.1 — a. Látum f vera raungilt fall og $a \in \mathbb{R}$.
Ef $f(x)$ hefur markgildið L þegar x stefnir á a frá vinstri og $f(x)$ stefnir á L þegar x stefnir á a frá hægri, þá segjum við að $f(x)$ hafi markgildið L þegar x stefnir á a og ritum

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

og segjum að fallið f hafi markgildið L í a.

Regluna hér á undan má líka setja fram svo:

Regla 3.2.2 — b. Ef $\lim_{x\to a-} f(x) = L = \lim_{x\to a+} f(x)$ þá er $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

ATH Það að fallið f hafi markgildið L í a þýðir ekki að $f(a) = L$.Fallið f þarf ekki einu sinni að vera skilgreint í a og þó að f sé skilgreint í a þá þarf ekki að gilda $f(a) = L$.

Til þess að $f(x)$ hafi markgildið L þegar x stefnir á a þarf fernt að koma til:

(i) Formengi f inniheldur opið bil vinstra megin við a og opið bil hægra megin við a (þ.e. til eru $b, c \in \mathbb{R}$ þ.a. $b < a < c$ og $]b, a[$ og $]a, c[$ eru hlutmengi í formengi f.)

(ii) $f(x)$ hefur markgildi þegar x stefnir á a frá vinstri.

(iii) $f(x)$ hefur markgildi þegar x stefnir á a frá hægri.

(iv) Markgildi $f(x)$ þegar x stefnir á a frá vinstri þarf að vera sama rauntalan og markgildi $f(x)$ þegar x stefnir á a frá hægri.

■ **Dæmi 3.5** Skoðum aftur $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -1, & \text{ef } x < a, \\ 0, & \text{ef } x = a, \\ 1, & \text{ef } x > a. \end{cases}$

Eins og við höfum séð er

$$\lim_{x\to a-} f(x) = -1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = 1.$$

Af því að markgildið frá hægri er ekki sama rauntalan og markgildið frá vinstri, þá hefur fallið f ekki markgildi í a.

■

■ **Dæmi 3.6** Skoðum nú fallið $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 1, & \text{ef } x \neq a, \\ 0, & \text{ef } x = a \end{cases}.$

Hér er $g(a) = 0$ en hefur g markgildið 1 í a, af því að $\lim_{x\to a-} g(x) = 1 = \lim_{x\to a+} g(x)$. ■

■ **Dæmi 3.7** Skoðum fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Þá er fyrir sérhvert $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Til þess að sanna þetta þurfum við formlega skilgreiningu á markgildi, en maður sér samt að $f(x) = x$ er a.m.k. jafn nálægt a og x er nálægt a. ■

■ **Dæmi 3.8** Annað dæmi er $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, þar sem $c \in \mathbb{R}$ er fasti. Þá er

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

fyrir hvaða $a \in \mathbb{R}$ sem er. ■

Formleg skilgreining á markgildi gæti virst frekar flókin við fyrstu sýn, svo til að skilja hana betur skulum við fyrst líta á dæmi.

■ **Dæmi 3.9** Við fáum það verkefni að fjöldaframleiða hringlaga hurðir fyrir bankahvelfingar. Flatarmál hurðanna á að vera

$$F = 5 \text{ m}^2.$$

Í gæðastaðli segir að skekkja í flatarmáli sé minni en

$$\varepsilon = 0.2 \text{ m}^2.$$

Við þurfum þá að stilla skurðinn, og reiknum út með 15 aukastöfum að geislinn (radíusinn) þurfi að vera $r_* = 1.236077446474207$ m. Sögin á að geta skorið með nákvæmni upp á $1/10$ úr μm (míkrómetra) og við stillum skurðinn á $r_* = 1.2360774$ m. Engin vél er hárnákvæm og við þurfum auðvitað að mæla þvermál hverrar hurðar þegar búið er að skera og athuga hvort gæðastöðlum sé fullnægt. Við deilum svo einfaldlega með 2 í þá mælingu til að reikna út geislann. Við viljum því vita hversu langt frá $r_* = 1.2360774$ m geisli hurðanna r má í mesta lagi víkja til að vera innan tilskilinnar nákvæmni í flatarmáli hurðanna. Hámarksskekkju í geislanum (radíusnum) köllum við δ. Reiknið δ.

■ **Lausn** Hér er $\varepsilon = 0.2$ m^2 gefið. Sleppum einingum í millireikningum; við viljum að

$$|\pi r^2 - 5| < 0.2$$

jafngilt er

$$5 - 0.2 < \pi r^2 < 5 + 0.2.$$

Deilum í alla liði með π og drögum rætur, og spörum ekki aukastafi í millireikningum. Við fáum

$$1.236077446474207 = \sqrt{\frac{4.8}{\pi}} < r < \sqrt{\frac{5.2}{\pi}} = 1.286550196516137$$

Notum núna útreiknað r_* með öllum 15 aukastöfum og drögum frá hverjum lið í keðjuójöfnunni:

$$-0.025488814535874 < r - r_* < 0.024983935506057$$

Veljum δ sem þá töluna í keðjuójöfnunni sem er minni að tölugildi og fækkum aukastöfum enda gagnslaust að taka fleiri aukastafi en 7. Til öryggis námundum við ekki upp, og tökum

$$\delta = 0.0249839 \text{ m} = 249\,883.9\,\mu\text{m}.$$

Þá vitum við að flatarmál skífunnar verður innan gefinna skekkjumarka ef

$$|r - r_*| < 0.0249839 \text{ m}$$

Hugsum okkur svo að í næstu framleiðslu þyrftum við að vinna með enn minna ε. Ætli við gætum stillt vélarnar fyrir δ þannig framleiðslan uppfylli gæðastaðla?

■

Formleg skilgreining á markgildi

Skilgreining 3.2.2 Látum f vera raungilt fall þ.a. $]a, b[\subset \text{Dom}(f)$ og $]b, c[\subset \text{Dom}(f)$, þar sem $a < b < c$. Við segjum að f hafi markgildið $L \in \mathbb{R}$ í b þá og því aðeins að eftirfarandi fullyrðing sé sönn:

> Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $\delta > 0$ (yfirleitt háð ε) þ.a. af $0 < |x - b| < \delta$ leiðir $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Til þess að sýna að f hafi markgildið L í b þarf maður sem sagt að geta gefið einhverskonar formúlu fyrir $\delta > 0$ sem falli af $\varepsilon > 0$.

■ **Dæmi 3.10** Látum $f(x) = x$ og $b \in \mathbb{R}$. Þá getum við fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ valið $\delta = \varepsilon$ til þess að sýna að $\lim\limits_{x\to b} f(x) = b$. ■

■ **Dæmi 3.11** Látum $f(x) = x^2$ og $b \in \mathbb{R}$. Þá getum við fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ valið

$$\delta = \min\{1, \varepsilon/(1 + 2|b|)\}$$

til þess að sýna að $\lim\limits_{x\to b} f(x) = b^2$. Nefnilega, ef $\varepsilon > 0$ er gefið, þá leiðir af

$$|x - b| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2|b| + 1} \tag{3.2}$$

að (því af $|x - b| < 1$ leiðir að $|x| < |b| + 1$)

$$|x^2 - b^2| = |x - b| \cdot |x + b| \leq |x - b| \cdot (|x| + |b|) < \frac{\varepsilon}{2|b| + 1}(2|b| + 1) = \varepsilon.$$

■

Af þessum einföldu dæmum ætti að vera ljóst að það er ekki mjög þjált að vinna beint með skilgreininguna á markgildi. Í praxís kemur maður sér upp vopnabúri af nokkrum mikilvægum markgildum og notar svo reglur sem tryggja okkur tilvist markgilda falla sem sett eru saman úr föllunum í vopnabúrinu.

Regla 3.2.3 — Markgildisreglur. Látum f og g vera föll og $a \in \mathbb{R}$ þ.a. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Þá gildir

(i)
$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M.$$

(ii)
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM.$$

(iii) Ef $M \neq 0$ þá er $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$.

(iv) Ef $f(x) \leq g(x)$ fyrir öll $x \in]b, a[$ og öll $x \in]a, c[$, þar sem $b < a < c$, þá er $L \leq M$.

Þessa reglu má rökstyðja á eftirfarandi hátt:
Gefið er að $|f(x) - L|$ og $|g(x) - M|$ verða eins lítil og við viljum ef við tökum $x \neq a$ nógu nálægt a.

(i)
$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|.$$

(ii)
$$|f(x){\cdot}g(x){-}LM| = |f(x){\cdot}g(x){-}Lg(x){+}Lg(x){-}LM| = |g(x)||f(x){-}L|{+}|L||g(x){-}M|$$

og af því $g(x) \to M$ þegar $x \to a$ er $|g(x)| \leq 2|M|$ fyrir x nógu nálægt a, svo

$$|g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| \leq 2|M||f(x) - L| + |L||g(x) - M|.$$

(iii)

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - g(x)|}{|g(x)||M|}$$

og af því $g(x) \to M$ þegar $x \to a$ er $|g(x)| \geq |M|/2$ fyrir x nógu nálægt a, svo

$$\frac{|M - g(x)|}{|g(x)||M|} \leq \frac{2}{|M|^2}|M - g(x)|.$$

(iv) Reynið sjálf að gefa skýringu eins og hér að ofan.

Afleiðing af setningu 3.2.3 er

Regla 3.2.4 — b. Ef $c \in \mathbb{R}$ er fasti, þá er $\lim_{x\to a} c \cdot g(x) = cM$ (með $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$), og þá $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$. Einnig, ef $M \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

Önnur mikilvæg regla um markgildi er:

Regla 3.2.5 — c. Látum f og g vera föll og $a \in \mathbb{R}$ þ.a. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to L} g(x) = M$, þá er

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = M.$$

Munum að: $(g \circ f)(x) := g(f(x))$

Reglur 3.2.3, 3.2.4(b) og 3.2.5(c) þýða að með því að þekkja markgildi nokkurra falla, þekkjum við um leið markgildi miklu fleiri falla. T.d. út frá $\lim_{x\to a} x = a$ og $\lim_{x\to a} c = c$ fæst:

Regla 3.2.6 Ef $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ og $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eru margliður, þá gildir

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

og ef $Q(a) \neq 0$ þá

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Stundum getum við fundið markgildið í punkti a útfrá fallgildi fallsins í a. Oft þurfum við þó að einfalda jöfnuna fyrst.

■ **Dæmi 3.12** Finnum $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$. Ef við setjum -1 inn hér, fáum við $[\frac{0}{0}]$ sem við getum ekki leyst. En ef við þáttum og styttum fáum við

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x\to -1}(x - 1) = -2$$

Sjá betur síðar: Í tilfellum þar sem við fáum $[\frac{0}{0}]$ (eða $[\frac{\infty}{\infty}]$) er líka hægt að nota reglu l'Hôpital, þar sem við deildum teljarann og nefnarann, sem sagt

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 1)}{\frac{d}{dx}(x + 1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x}{1} = -2.$$

■

3.2.1 Klemmureglan

Regla 3.2.7 — Klemmureglan (The squeeze Theorem). Látum $a, b, c \in \mathbb{R}$ vera þ.a. $b < a < c$ og látum f, g, h vera föll, þannig að bilin $]b, a[$ og $]a, c[$ (þ.e $]b, c[\setminus\{a\}$) eru í formengi þeirra allra og

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{fyrir öll } x \in]b, c[\setminus\{a\}.$$

Þá gildir, ef

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

þá er

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

■ **Dæmi 3.13** Skoðum markgildi fallsins $g(x)$ í $x = 0$, ef

$$\sqrt{5-2x^2} \leq g(x) \leq \sqrt{5-x^2} \text{ fyrir } -1 \leq x \leq 1.$$

Nú, vegna þess að $\sqrt{5-2x^2} \leq g(x) \leq \sqrt{5-x^2}$ fyrir $-1 \leq x \leq 1$ og

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{5-2x^2} = \lim_{x\to 0} \sqrt{5-x^2} = \sqrt{5},$$

þá höfum við samkvæmt Klemmureglunni að

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{5}.$$

■

Æfingar 3.2

Æfing 3.2.1 Reiknið eftirfarandi markgildi eða sýnið að þau séu ekki til:

(i)
$$\lim_{x\to 2-} \frac{x-2}{|x-2|}$$

(ii)
$$\lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{|x-2|}$$

(iii)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{|x-2|}$$

(iv)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

(v)
$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

(vi)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

■

Æfing 3.2.2

(i) Þú framleiðir gler í glugga og færð pöntun upp á þúsund (rétthyrndar) rúður. Hver rúða skal vera að flatarmáli $2.25\,\mathrm{m}^2$ og málin eru gefin $1.5\,\mathrm{m} \times 1.5\,\mathrm{m}$. Kaupandinn gefur ekkert um skekkjumörk í hliðarlengdum, en skekkja í flatarmáli rúðanna má ekki vera meiri en $\varepsilon = 0.1\,\mathrm{m}^2$. Nákvæmni í skurði rúðanna er upp á millimetra. Finnið hámarks leyfilega skekkju δ fyrir hliðarlengdir rúðanna.

(ii) Berið saman ykkar δ úr (a)-lið við ójöfnu (3.2) í Dæmi 3.11.

■

Æfing 3.2.3 Gefin eru föllin $f(x) = \cos x$, $p_2(x) = 1 - x^2/2!$ og $p_4(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4!$. Munið að $2! = 1 \cdot 2$ og $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

(i) MATLAB : Teiknið mynd af föllunum $f(x), p_2(x)$ og p_4 inn á sömu mynd (notið `hold on`).

(ii) Takið eftir að ójafnan

$$p_2(x) \leq \cos x \leq p_4(x) \tag{3.3}$$

gildir fyrir öll x á einhverju bili um núll. Látum nú sem svo að við vitum ekki að $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Notið ójöfnu (3.3) og Klemmureglu til að sýna að $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

■

Æfing 3.2.4

(i) Finnið formengi fallsins $\sin \dfrac{1}{x}$.

(ii) MATLAB : Teiknið feril fallsins $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ og takið $x-$in á bili samhverft um núll, prófið t.d.

```
x = linspace(-0.25,0.25, 1000); f = x.*sin(1./x); plot(x,f)
```

Útskýrið af hverju fallið sveiflast svona hratt nálægt $x = 0$, og giskið svo á $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \sin \dfrac{1}{x} \right)$ út frá myndinni.

(iii) En ágiskun dugar skammt. Við vitum að myndmengi sínus fallsins er $[-1, 1]$, svo að $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ eða $0 \leq |\sin(1/x)| \leq 1$ gildir fyrir öll $x \neq 0$. Margföldum í gegnum þessa síðustu ójöfnu með $|x|$ og fáum

$$0 \leq |x \sin(1/x)| \leq |x|.$$

Notið nú Klemmureglu til að finna $\lim\limits_{x\to 0} \left| x \sin \dfrac{1}{x} \right|$.

(iv) Sýnið almennt að ef $f(x)$ er fall þ.a. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$, þá er $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ (ábending: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$)

■

Æfing 3.2.5 Reiknið eftirfarandi markgildi eða sýnið að þau séu ekki til:

(i)

$$\lim_{x\to 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$$

(ii)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{|x^2-1|}$$

■

Æfing 3.2.6 Fyrir fallið $f(x) = x^{-2}$ finnið markgildið

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Hvað segir markgildið um fallið $f(x)$? ■

3.3 Markgildi $f(x)$ þegar x stefnir á $\pm\infty$

Við höfum áhuga á markgildi $f(x)$, ekki bara þegar x stefnir á einhverja ákveðna fasta tölu $a \in \mathbb{R}$, heldur líka þegar x vex út yfir öll mörk, annaðhvort í jákvæða eða neikvæða stefnu. Þetta er oft orðað þannig að x stefni á *plús óendanlegt* (x stefni á $+\infty$) eða að x stefni á *mínus óendanlegt* (x stefni á $-\infty$). Oft skrifar maður líka bara ∞ fyrir $+\infty$.

Skilgreining 3.3.1 — Markgildi í plús og mínus óendanlegu. Látum f vera fall þ.a. til er $a \in \mathbb{R}$ þ.a. bilið $]a, +\infty[$ er í formengi f. Við segjum að $f(x)$ hafi markgildið $L \in \mathbb{R}$ þegar x stefnir á (plús) óendanlegt ef við getum tryggt að $|f(x) - L|$ verði eins lítið og við viljum með því að taka nógu stórar jákvæðar tölur x (þ.e. $x > 0$ og $|x|$ stórt) og við ritum

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

eða

$$f(x) \longrightarrow L \quad \text{þegar} \quad x \longrightarrow +\infty$$

Látum f vera fall þ.a. til er $a \in \mathbb{R}$ þ.a. bilið $]-\infty, a[$ er í formengi f. Við segjum að $f(x)$ hafi markgildið $M \in \mathbb{R}$ þegar x stefnir á mínus óendanlegt ef við getum tryggt að $|f(x) - M|$ verði eins lítið og við viljum með því að taka nógu stórar neikvæða tölur x (þ.e. $x < 0$ og $|x|$ stórt) og við ritum

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M.$$

eða

$$f(x) \longrightarrow M \quad \text{þegar} \quad x \longrightarrow -\infty$$

■ **Dæmi 3.14** Nú viljum við kanna á hvað fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ stefnir þegar $x \to +\infty$ og þegar $x \to -\infty$.

Ef við látum nú í huganum $x \to +\infty$ inn í fallið, þá höfum við óendanlega stóra stærð bæði í nefnara og teljara, og ekki er gott að átta sig á hvað kemur út úr því. Byrjum á lítilli rannsókn í MATLAB . Setjum inn í fallið jákvæðar og neikvæðar tölur af stærðargráðu 10^5, og gerum okkur mynd af fallinu.

■ Keyrsluskrá 5

```
format long
endap = 10^5
x =linspace(-endap, endap)
f = x./sqrt(1+x.^2);
lim_minus = f(1)  % Stak f(1) er fyrsta stakið í vigrinum f, og gefur ...
    fallið okkar með x = -100000
lim_plus = f(end) % Stak f(end) í vigrinum f er fallið okkar með x = 100000
plot(x,f)
```

```
lim_minusinf =

  -0.999999999950000

lim_plusinf =

   0.999999999945701
```

Fallgildin virðast stefna á 1 þegar x stefnir á plús óendanlegt og -1 þegar x stefnir á mínus óendanlegt. En þetta þarf auðvitað að staðfesta með formlegum útreikningum:

Þar sem f hefur föll í nefnara og teljara, reynir maður að stytta út x í hæsta veldi og einfalda. Hér er x^2 í hæstu veldi en það er undir rót svo að við þurfum að vinna með $\sqrt{x^2}$. Munum að $\sqrt{x^2} = |x| = x$ ef $x > 0$. Einföldum nú

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2(1/x^2+1)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}. \end{aligned}$$

Nú sést að $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ og þar sem liðurinn $\frac{1}{x^2}$ stefnir á 0 þegar $x \to +\infty$ þá er er ekki erfitt að sjá að $f(x)$ stefnir á 1 þegar x stefnir á plús óendanlegt, skrifað

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

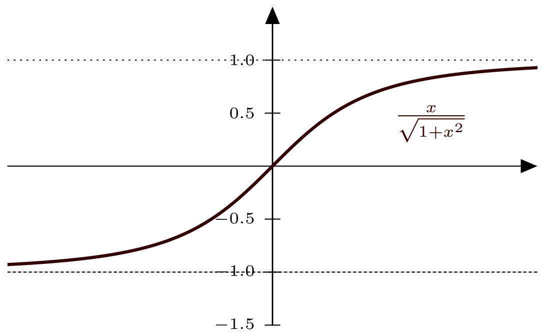
Finnum næst markgildi $f(x)$ þegar $x \to -\infty$.
Fyrir $x < 0$ getum við umritað f (nú gildir $|x| = \sqrt{x^2} = -x$)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x/(-x)}{\sqrt{1+x^2}/\sqrt{x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \text{ef } x < 0,$$

og það er ekki erfitt að sjá að $f(x)$ stefnir á -1 þegar x stefnir á mínus óendanlegt.

Við segjum einnig að fallið f hafi láréttar aðfellur,

$$y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad \text{og} \quad y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1\,.$$



■

■ **Dæmi 3.15** Finnið markgildi fallsins $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}$ þegar $x \to +\infty$.

■ **Lausn** Ef við setjum í huganum $x = +\infty$ inn í fallið f þá fáum við stærð á forminu $+\infty - (+\infty)$, sem getur verið hvað sem er, $-\infty$, $+\infty$ og allt þar á milli. Við þurfum því að umrita fallið: Við notum samokareglu á forminu $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ og fáum

$$\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x} = \frac{x^2+2x-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

Nú förum við að eins og í Dæmi 3.14 (sannreynið millireikninga) og getum því umritað f á formið $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1-2/x}}$; og þar sem $\frac{2}{x} \to 0$ þegar $x \to +\infty$ þá fæst $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{4}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{4}{1+1} = 2.$ ■

■ **Dæmi 3.16** Gefið er fallið $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-4}$.

(i) Finnið aðfellur fallsins.

(ii) Metið $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$

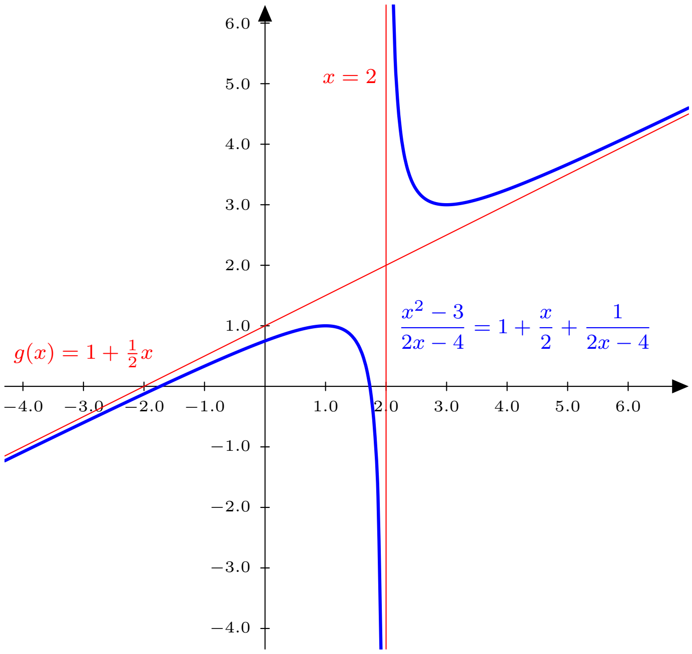
(iii) Metið $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(iv) Metið $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$

■ **Lausn** Við ætlum að rannsaka hegðun fallsins f þegar $x \to 2$ og þegar $x \to \pm\infty$. Athugum fyrst að fallið f er svokallað **rætt fall**, sem þýðir að það er á forminu $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ þar sem $P(x)$ og $Q(x)$ eru margliður. Þar sem teljarinn $P(x) = x^2 - 3$ er margliða af hærra stigi en nefnarinn $Q(x) = 2x-4$ þá getum við beitt margliðudeilingu til að einfalda verkefnið:
Margliðudeiling gefur nú að liða má f upp í tvö föll (sannreynið):

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4} = \overset{\text{línulegt fall } g(x)}{(1+\frac{x}{2})} \quad + \quad \overset{\text{afgangsliður } r(x)}{(\frac{1}{2x-4})} \quad .$$

Fallið f er ekki skilgreint í $x = 2$ og við sjáum að afgangsliðurinn, breiðboginn $r(x) = \dfrac{1}{2x-4}$, hefur lóðfellu í $x = 2$. Nú er einfaldara að reikna markgildi þegar $x \to 2$. Við þurfum að rannsaka bæði tilvikið $x \to 2-$ og $x \to 2+$:



Mynd 3.2: Lóðréttur mismunur $f(x) = (x^2 - 3)/(2x - 4)$ og $y = x/2 + 1$ stefnir á núll þegar x stefnir á $\pm\infty$.

(i) Aðfellur fallsins f eru tvær: Skáfella $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ og lóðfella $x = 2$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2-}\left(\frac{x^2-3}{2x-4}\right) &= \lim_{x\to 2-}\left(1+\frac{x}{2}\right) + \lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{2x-4}\right) \\
&= \left(1+\frac{2}{2}\right) + (-\infty) = 2 + (-\infty) = -\infty, \qquad \text{og} \\
\lim_{x\to 2+}\left(\frac{x^2-3}{2x-4}\right) &= \lim_{x\to 2+}\left(1+\frac{x}{2}\right) + \lim_{x\to 2+}\left(\frac{1}{2x-4}\right) \\
&= \left(1+\frac{2}{2}\right) + (+\infty) = 2 + (+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

Þar eð $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2+} f(x)$, þá er markgildi $f(x)$ óskilgreint þegar x stefnir 2.

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-3}{2x-4}\right) &= \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{x}{2}\right) + \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{2x-4}\right) \\
&= (1+(+\infty)) + \quad (0) = +\infty, \quad \text{og} \\
\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-3}{2x-4}\right) &= \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{x}{2}\right) + \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{2x-4}\right) \\
&= (1+(-\infty)) + (0) = -\infty.
\end{aligned}$$

■

■ Keyrsluskrá 6

```
clc, clear all
```

```
% Skilgreinum táknbreytu (symbolíska breytu)
syms x
%  f = P/Q
P = x^2-3;
Q = 2*x -4;
%  quorem er margliðudeiling og skilar fallinu F = P/Q á forminu F = G + R/Q
[G,R] = quorem(P,Q,x);
r = R/Q        %  r er táknbreyta
G
f = G + r      % f er táknbreyta
```

skrifar út

```
r =  1/(2*x - 4)
G =  x/2 + 1
f =  x/2 + 1/(2*x - 4) + 1
```

Regla 3.3.1 Ef $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ og $\lim_{x\to+\infty} g(x) = M$ þá er
1. $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = LM$
3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$ ef $M \neq 0$.

Samskonar reglur gilda líka ef $x \to -\infty$

■ **Dæmi 3.17** Skoðum fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Nú getum við fundið eins stór jákvæð x og við viljum þ.a. $|f(x) - 1| = 0$ því $\sin(2\pi k + \pi/2) = 1$ fyrir hvaða $k \in \mathbb{Z}$ sem er. Við segjum samt ekki að $\lim_{x\to+\infty} \sin x = 1$ af því að $|f(x) - 1|$ stefnir ekki á núll fyrir öll stór x. Til dæmis er $\sin(\pi k) = 0$ fyrir öll $k \in \mathbb{Z}$, og ef $x = \pi k$ þá $|f(x) - 1| = 1$, fyrir öll $k \in \mathbb{Z}$. ■

■ **Dæmi 3.18** Hvernig eru fallgildi fallsins (*Sjáið fyrir ykkur graf fallsins*)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

þegar $x \neq 0$ er mjög lítið? Hefur $f(x)$ markgildi þegar x stefnir á 0?

■ **Lausn** $f(x)$ hefur örugglega ekki markgildi þegar x stefnir á 0, því til þess að $f(x)$ hefði markgildið $L \in \mathbb{R}$ þyrftum við að geta tryggt að

$$|f(x) - L| = \left| \frac{1}{x^2} - L \right|$$

yrði eins lítið og við vildum með því að taka $x \neq 0$ nógu lítið. En við getum eitthvað annað, nefnilega að $f(x)$ verði eins stórt og við viljum með því að taka $x \neq 0$ nógu lítið. Maður segir að $f(x)$ stefni á (plús) óendanlegt þegar x stefnir á núll og skrifar

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Eins segjum við að $-1/x^2$ stefndi á mínus óendanlegt þegar x stefnir á núll og skrifum

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

■

■ **Dæmi 3.19** Lítum á breiðboga-fallið (*Sjáið fyrir ykkur graf fallsins*)

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Ef $x < 0$ og x er nálægt 0 þá verður $g(x)$ stór neikvæð tala en ef $x > 0$ og x er nálægt núll þá er $g(x)$ stór jákvæð tala. Við segjum að $g(x)$ stefni á mínus óendanlegt þegar x stefnir á 0 frá vinstri og skrifum

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

og við segjum að $g(x)$ stefni á (plús) óendanlegt þegar x stefnir á 0 frá hægri og skrifum

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Væri eitthvert vit í því að skilgreina $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$? Ef svo væri, hvort ætti þá að gilda $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ eða $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$? (Svarið er nei!)
MATLAB :

Hægt er reikna markgildi frá hægri og markgildi frá vinstri í MATLAB . Skoðum breiðbogann $y = 1/x$ og metum $\lim\limits_{x\to 0+} (1/x)$ og $\lim\limits_{x\to 0-} (1/x)$ í MATLAB :

```
syms x
rightlimit = limit(1/x, x, 0, 'right')
leftlimit  = limit(1/x, x, 0, 'left')
```

gefur `rightlimit = Inf` og `leftlimit = -Inf` .
Þar sem markgildið frá hægri er $+\infty$ og markgildið frá vinstri er $-\infty$ og þar með markgildið frá vinstri ekki það sama og markgildi frá hægri, þá er markgildið ekki skilgreint (ekki til) þegar x stefnir á 0. Til að sjá það sláum við inn

```
syms x
limit = limit(1/x, x, 0)
```

sem gefur `limit = NaN` Táknið `NaN` er ensk skammstöfun fyrir **Not-a-Number**. Þetta þýðir að $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)$ er óskilgreint; með öðrum orðum, ekki til.

■

3.3.1 Nokkur orð um $-\infty$ og $+\infty$

Regla 3.2.3 og afleiddu markgildissetningarnar eru mjög mikilvægar, af því að þær gera okkur kleift að reikna út á einfaldan hátt markgildi flókinna falla sem eru samansett úr einfaldari föllum. Það er því skynsamlegt að athuga hvort við getum útvíkkað reiknireglur fyrir samlagningu og margföldun á rauntölum til þess að taka tillit til allra rauntalna ásamt $-\infty$ og $+\infty$, þ.a. staðhæfingar markgildisreglnanna gildi í sem flestum tilfellum. Ef t.d. f og g eru föll og $a \in \mathbb{R}$ þ.a.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

og

$$\lim_{x\to a} g(x) = M, \quad \text{þar sem } M \in \mathbb{R} \text{ er einhver (alveg sama hvaða) rauntala,}$$

þá er auðvelt að sannfæra sig um að

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Það virðist því skynsamlegt að skilgreina einfaldlega

Skilgreining 3.3.2

$$+\infty + M = +\infty$$

fyrir öll $M \in \mathbb{R}$.

Þá gildir sú fullyrðing í Reglu 3.2.3 að ef

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M \in \mathbb{R},$$

þá er

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

líka fyrir tilfellið: ef

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M \in \mathbb{R},$$

þá er

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty = +\infty + M = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Það kemur í ljós að eftirfarandi tilfelli eru svipuð og því skilgreinum við:

Skilgreining 3.3.3

1) Fyrir öll $x \in \mathbb{R}$

$$+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty \quad \text{og} \quad -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty.$$

2) Fyrir öll $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$$

3) Fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ þ.a. $x > 0$

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty \quad \text{og} \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty.$$

Fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ þ.a. $x < 0$

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty \quad \text{og} \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty.$$

4)

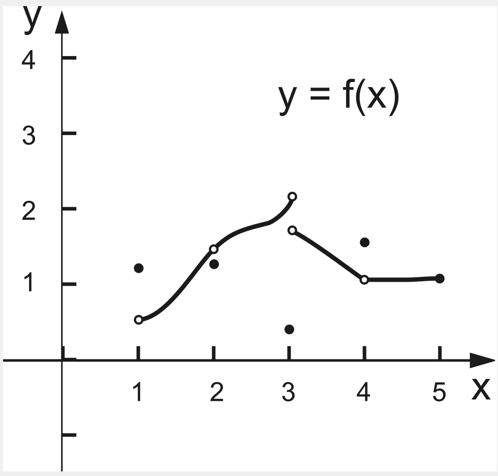
$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty, \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty \quad \text{og} \quad (+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$$

Öll önnur tilfelli þar sem $+\infty$ og/eða $-\infty$ koma fyrir, eins og t.d. $+\infty + (-\infty)$, $+\infty / +\infty$ eða $0 \cdot (+\infty)$, skilgreinum við ekki af góðum og gildum ástæðum.

Æfingar 3.3

Æfing 3.3.1 Fyllið út eftirfarandi töflu fyrir fallið $f : [1,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ á Mynd 3.3 (þ.e. gerið $\surd$ í reitina þar sem við á). Smá forskot á sæluna: fall kallast samfellt punkti a ef markgildi þess er til og er jafnt fallgildinu í punktinum. Ef a er vinstri endapunktur er (merkingarlaust að tala um hann sem markgildi talna sem eru minni en a) nóg að markgildið sé til frá hægri, ef a er hægri endapunktur þá er nóg að markgildið sé til frá vinstri.

fallið f í $x =$	1	2	3	4	5
hefur markgildi frá vinstri					
hefur markgildi frá hægri					
hefur markgildi					
er samfellt frá vinstri					
er samfellt frá hægri					
er samfellt					
er ósamfellt					



Mynd 3.3: Graf fallsins $f : [1,5] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Tekur $f(x)$ hæsta gildi sitt á bilinu $[1,5]$? Tekur $f(x)$ lægsta gildi sitt á bilinu $[1,5]$? ■

Æfing 3.3.2 Lítum á breiðbogafallið $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Finnið markgildin $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1}$ og

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1}$. Sýnið millireikninga. ■

Æfing 3.3.3 Finnið markgildið $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+x+3}}$. ■

Æfing 3.3.4 Finnið markgildið $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$. (*Ábending: Sjá notkun samoka-reglu í Dæmi 3.15*) ■

Æfing 3.3.5 Finnið markgildi fallsins $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$ þegar $x\to-\infty$. (Munið að $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ ef $x<0$) ■

Æfing 3.3.6 Kannið hvort fallið $f(x)=\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}$ hafi markgildi þegar $x\to+\infty$ (*Ábending: Gerið samnefnt, önnur leið er að beita margliðudeilingu á hvorn lið*). ■

ATH Dæmi eins og 3.16 er hægt að leysa beint í MATLAB : Ef okkur langar til þess að láta MATLAB skrifa út lausnirnar þá getum við bætt við skriftuna

■ Keyrsluskrá 7

```
% Skilgreini táknbreyturnar sem strengi (texta).
g = char(G);     % Breytir G í streng
r = char(r);     % Breytir r í streng
y = char(f);     % breytir f í streng

%  Skilgreini nú strengi með svörum við a-lið
str1 =['Skáfella er g(x) = ', g ];
str2 = ['lóðfella er x = 2'];
str3 = ['Margliðudeiling gefur: f = ', y];
% Lausn á a-lið
alidur = ['Lausn á lið a:'];
a_svar = char(alidur, str1, str2, str3);

% Lausn á b-lið
blidur = ['Lausn á lið b:'];
b = limit(f, x, 2);
str4 = ['Fallið f stefnir á ' char(b) ' þegar x stefnir á ...
    óendanlegt'];
str5 = ['(Ef út kemur NaN, þá þýðir það að markgildi er ...
    óskilgreint)'];
b_svar = char(blidur, str4, str5);

% Lausn á c-lið
clidur = ['Lausn á lið c:'];
c = limit(f, x, inf);
str6 = ['Fallið f stefnir á ' char(c) ' þegar x stefnir á ...
    óendanlegt'];
c_svar = char(clidur, str6);

% Lausn á d-lið
d = limit(f, x, -inf);
dlidur = ['Lausn á lið d:'];
```

```
str7 = ['Fallið f stefnir á ' char(d) ' þegar x stefnir á ...
    óendanlegt'];
d_svar = char(dlidur, str7);
% Allt tekið saman í einn streng:
svor =char(a_svar,'', b_svar,'', c_svar,'', d_svar)
```

```
Lausn á lið a:
Skáfella er g(x) = x/2 + 1
lóðfella er x = 2
Margliðudeiling gefur: f = x/2 + 1/(2*x - 4) + 1

Lausn á lið b:
Fallið f stefnir á NaN þegar x stefnir á óendanlegt
(Ef út kemur NaN, þá þýðir það að markgildi er óskilgreint)

Lausn á lið c:
Fallið f stefnir á Inf þegar x stefnir á óendanlegt

Lausn á lið d:
Fallið f stefnir á -Inf þegar x stefnir á óendanlegt

>>
```

Æfing 3.3.7 Gefið er fallið $f(x) = \dfrac{x^2-5}{3x+4}$. Finnið fyrst aðfellur fallsins, metið síðan eftirfarandi markgildi. Reynið fyrst að meta markgildin í huganum.

1. (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to -\sqrt{5}} f(x)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{5}} f(x)$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to -4/3} f(x)$ (v) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (vi) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$
2. Notið þær upplýsingar sem þið hafið úr lið 1. til að rissa upp (grófa) mynd af fallinu f.
3. Notið MATLAB eða `GeoGebra` til að draga upp mynd af fallinu f.

■

Æfing 3.3.8 Ákvarðið markgildin ef þau eru til, eða rökstyðjið hvers vegna þau eru ekki til.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \sqrt{x-x^3}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to a-} \frac{x^2-a^2}{|x-a|}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2+\sqrt{4x^4-3x^3}}$

■

Æfing 3.3.9 Finnið $a \in \mathbb{R}$ þannig að fallið

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{ef } x \leq 2, \\ x^2, & \text{ef } x > 2, \end{cases}$$

uppfylli $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$. ■

3.4 Samfelld föll

Við takmörkum okkur við raungild föll f þ.a. fyrir sérhvert a í formengi f er annaðhvort til $b < a$ þ.a. allt bilið $]b, a]$ er í formengi f eða til er $c > a$ þ.e. allt bilið $[a, c[$ er í formengi f (eða bæði). Ástæðan er sú að við viljum að í sérhverjum punkti $a \in \mathbb{R}$ í formengi falls f geti a.m.k.m̃arkgildið frá hægri eða markgildið frá vinstri verið til. Ef bæði eru til $b < a$ og $c > a$ þ.a. $]b, a]$ og $[a, c[$ eru í formengi fallsins f, þá er allt bilið $]b, c[$ hlutmengi í formenginu og maður segir að a sé **innri punktur** í formengi f. Ef annaðhvort $]b, a]$ eða $[a, c[$ er í formenginu, en ekki bæði, þá segir maður að a sé **jaðarpunktur** formengisins.

■ **Dæmi 3.20** Skoðum $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Sérhver punktur í formengi f er innri punktur, því ef $a > 0$ þá er $]a/2, 2a[$ í formengi f og ef $a < 0$ þá er $]2a, a/2[$ í formengi f. ■

■ **Dæmi 3.21** Skoðum fallið $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Þá er sérhvert $x > 0$ innri punktur formengis f og 0 er jaðarpunktur. ■

Skilgreining 3.4.1 Látum a vera innri punkt í formengi fallsins f. Við segjum að fall f sé *samfellt* í a ef

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

ATH Ef markgildið er ekki til í innri punkti a eða markgildið er til en er ekki jafnt $f(a)$, þá er fallið f sagt vera *ósamfellt* í a.

Skilgreining 3.4.2 Við segjum að f sé *samfellt frá vinstri* í $a \in \mathrm{Dom}(f)$ ef $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$. Við segjum að f sé *samfellt frá hægri*í $a \in \mathrm{Dom}(f)$ ef $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Samsvarandi athugasemd og eftir síðustu skilgreiningu gildir.

■ **Dæmi 3.22** Lítum á fallið $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ef } x > 0, \\ -1, & \text{ef } x < 0. \end{cases}$ Er fallið samfellt í 0 ?

■ **Lausn** Nei, fallið er ekki skilgreint í 0 og getur því ekki verið samfellt í 0. ■

■ **Dæmi 3.23** Ef fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ef } x \neq 0, \\ 0, & \text{ef } x = 0. \end{cases}$ samfellt í 0?

■ **Lausn** Nei, fallið hefur markgildi $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ en fallgildið er $f(0) = 0$, svo fallið er ekki samfellt í 0.

■

Ljóst ætti að vera að jafngild skilgreining á samfelldni falls í innri punkti er:

Skilgreining 3.4.3 Fall f er samfellt í innri punkti a formengi síns, þá og því aðeins að það sé samfellt frá hægri og samfellt frá vinstri í a.

Skilgreining 3.4.4 Við segjum að f sé samfellt í jaðarpunkti a formengi síns þá og því aðeins að það sé annað af hvoru; samfellt frá vinstri í a eða að það sé samfellt frá hægri í a (ath. hvort í senn er ekki mögulegt af því að a er jaðarpunktur).

■ **Dæmi 3.24** Skoðum $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Fallið f er samfellt, því það er samfellt í öllum innri punktum $x \in] - 2, 2[$ og samfellt frá hægri í -2 og samfellt frá vinstri í 2.

■

Skilgreining 3.4.5

(i) Við segjum að f sé **samfellt fall**, ef það er samfellt í öllum punktum a í formengi sínu.

(ii) Við segjum að f sé **samfellt fall á bilinu** I ef $I \subseteq \mathbb{R}$ er bil sem er hlutmengi í formengi f og f er samfellt í öllum punktum $a \in I$.

■ **Dæmi 3.25** Er breiðbogafallið $f(x) = \dfrac{1}{x}$ samfellt fall?

■ **Lausn** Við tökum eftir því að formengi f er $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ svo að f er ekki skilgreint í $x = 0$. En skv. Dæmi 3.20 er sérhver punktur í formenginu innri punktur og skv. Skilgreiningu 3.4.1 er f þá samfellt fall í sérhverjum punkti formengisins. Skilgreining 3.4.5 gefur þá loks að f er samfellt fall.

■

Regla 3.4.1 Ef f og g eru föll og $a \in \mathbb{R}$ er **innri punktur** í formengi þeirra beggja og föllin f og g eru bæði samfelld í a, þá gildir:

1. Fallið $f + g$ er samfellt í a.
2. Fallið fg er samfellt í a.
3. Fallið $1/g$ er samfellt í a ef $g(a) \neq 0$.

Sönnun. Leiðir beint af Markgildisreglunum, sjá Reglu 3.2.3. Til dæmis

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

■

Regla 3.4.2 Ef f og g eru föll sem eru samfelld á bilinu $I \subseteq$, þá gildir:

1. Fallið $f + g$ er samfellt á bilinu I.
2. Fallið fg er samfellt á bilinu I.
3. Fallið $1/g$ er samfellt á bilinu I ef $g(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in I$.

■ **Dæmi 3.26** Við vitum $\lim\limits_{x\to a} x = a$ og $\lim_{x\to a} c = c$ fyrir öll $a \in \mathbb{R}$ svo allar margliður

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

eru samfelldar á $\mathbb{R}$. ■

Hvað um ræð föll, rætur og hornaföll?

Regla 3.4.3 Ef fallið f er samfellt í L og fallið g er samfellt í a og $g(a) = L$, þá er fallið $f \circ g$ samfellt í a.

■ **Dæmi 3.27** $f :]-\infty\,,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\sqrt{32 - x^5})$ er samfellt á $]-\infty\,,2]$. ■

3.4.1 Útgildissetningin og Milligildissetningin

Tvær næstu reglur eru mikilvægustu staðreyndirnar um samfelld föll:

Regla 3.4.4 — Útgildissetningin. Ef f er samfellt fall á bili af gerðinni

$$[\,a\,,b\,] \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$$

þar sem $a < b$, þá er til $p \in [\,a\,,b\,]$ þ.a.

$$f(p) \leq f(x) \quad \text{fyrir öll } x \in [\,a\,,b\,]$$

og til $q \in [a,b]$, þ.a.

$$f(x) \leq f(q) \quad \text{fyrir öll } x \in [\,a\,,b\,].$$

■ **Dæmi 3.28** Látum x og y vera hliðarlengdir rétthyrnings sem hefur ummálið 20. Hvernig á að velja x og y til að hámarka flatarmál rétthyrningsins ?

■ **Lausn** Summa x og y er hálft ummmálið, svo að $y = 10 - x$ og flatarmálið er xy. Við getum því ritað flatarmálið sem fall f af x með formúlunni

$$f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2.$$

Forsendur Útgildissetningarinnar eru uppfylltar. Allar margliður eru samfelld föll, og f er annars stigs margliða á lokuðu bili $x \in [0, 10]$. Þá vitum við (fyrirfram) að til er tala q þannig að $f(x) \leq f(q)$ fyrir öll $x \in [0, 10]$. Finnum nú q, sem við köllum stundum x_{max}, þannig að $f(x) \leq f(q) =: f_{\max}$ fyrir öll $x \in [0, 10]$. Með umritun jöfnu fleygbogans

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 10x = -(x^2 - 10x) = -(x^2 - 10x + 5^2 - 25) \\ &= -\Big((x-5)^2 - 25\Big) = 25 - (x-5)^2 \end{aligned}$$

sést að f tekur hæsta gildi þegar $x_{\max} = 5$ og flatarmálið getur mest orðið $f_{\max} = 25$.

ATH

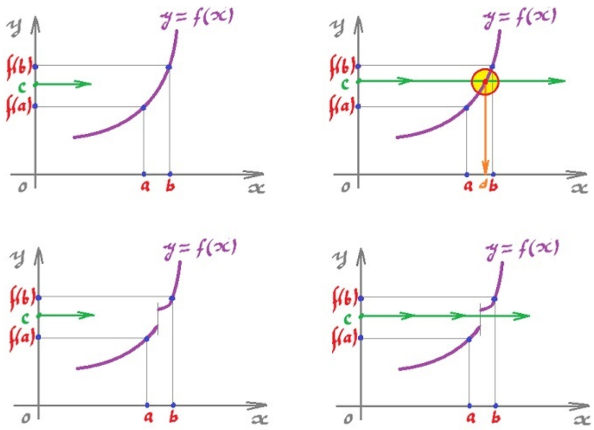
1. Við sjáum að almennt gildir að flatarmál rétthyrnings með fast ummál U og hliðarlengdir x og y þar sem $x + y = U/2$ er mest þegar $x = y = U/4$.
2. Enn almennar sjáum við að ef summa tveggja talna er föst t.d. $x + y = a$, þá er margfeldi þeirra stærst þegar $x = y = a/2$.
3. Við sjáum reyndar líka að við fáum lægsta gildi ef við setjum $x = 0$ eða $x = 10$ inn í jöfnuna $f(x) = 25 - (x-5)^2$; $f_{\min} = 0$.

■

Regla 3.4.5 — Milligildissetningin. Ef f er samfellt fall á bili af gerðinni

$$[\,a\,,b\,] \equiv \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$$

þar sem $a < b$, og $c \in \mathbb{R}$ er tala sem liggur á milli talnanna $f(a)$ og $f(b)$, þá er til tala $d \in [a, b]$ þ.a. $f(d) = c$.



Mynd 3.4: Samfelldni f er nauðsynleg forsenda í Milligildissetningunni!

ATH Milligildissetningin heitir *The Intermediate-Value Theorem* á ensku.

Af Útgildissetningunni og Milligildissetningunni leiðir að mynd samfellds falls f af lokuðu og takmörkuðu bili $[a, b]$, þ.e. mengið

$$f([\,a\,,b\,]) \equiv \{\, f(x) \mid x \in [\,a\,,b\,] \,\}\,,$$

er bil af gerðinni $[\,m\,,M\,]$, $m \leq M$, þar sem

$$\begin{aligned} m = f(p) &\leq f(x) \quad \text{fyrir öll } x \in [\,a\,,b\,] \qquad \text{og} \\ M = f(q) &\geq f(x) \quad \text{fyrir öll } x \in [\,a\,,b\,]. \end{aligned}$$

■ **Dæmi 3.29** Hefur jafnan $x^3 - x - 1 = 0$ rauntölurót á bilinu $1 \leq x \leq 2$?

■ **Lausn** Fallið $f(x) = x^3 - x - 1$ er samfellt og við höfum $f(1) = -1$ og $f(2) = 5$. Samkvæmt Milligildissetningunni er til tala $c \in [1, 2]$ þ.a. $f(c) = 0$ því $0 \in [-1, 5]$.

■

■ **Dæmi 3.30** Er til $x \in \mathbb{R}$ þ.a. $\sin x = \pi/4$?

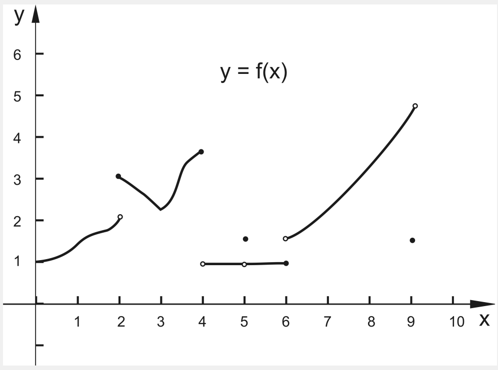
■ **Lausn** Já, því $\sin(x)$ er samfellt fall, $\sin(0) = 0$ og $\sin(\pi/2) = 1$. Samkvæmt Milligildissetningunni er því til $c \in [0, \pi/2]$ þ.a. $\sin(c) = \pi/4$ því $0 \leq \pi/4 \leq 1$.

■

Æfingar 3.4

Æfing 3.4.1 Fyllið út eftirfarandi töflu fyrir fallið $f : [0,9] \longrightarrow \mathbb{R}$ á Mynd 3.5 (þ.e. hakið $\surd$ í reitina þar sem við á).

fallið f í $x =$	1	2	3	4	5
hefur markgildi frá vinstri					
hefur markgildi frá hægri					
hefur markgildi					
er samfellt frá vinstri					
er samfellt frá hægri					
er samfellt					
er ósamfellt					



Mynd 3.5: Graf fallsins $f : [1,5] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Tekur $f(x)$ hæsta gildi sitt á bilinu $[0,9]$? Tekur $f(x)$ lægsta gildi sitt á bilinu $[0,9]$? ■

Æfing 3.4.2 Látum fallið f vera skilgreint með jöfnunni

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & \text{ef } x < 0 \\ 2x + a & \text{ef } x \geq 0 \end{cases}$$

þar sem a er einhver fasti. Ákvarðið fastann a þannig að f sé samfellt í $x = 0$. Rökstyðjið svarið. ■

Æfing 3.4.3 Lítum aftur á fallið í Dæmi 3.22

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(x):=\begin{cases}1, & \text{ef } x>0,\\ -1, & \text{ef } x<0\end{cases}.$$

a) Fallið er ekki samfellt í $x=0$ en það er samt ekki heldur ósamfellt í $x=0$. Hvernig getur þessi fullyrðing gengið upp (ábending: skoðið formengi f)?
b) Færið rök fyrir því að f er samfellt fallt. (ábending: Farið vandlega yfir röksemdafærsluna í Dæmi 3.25)

■

Æfing 3.4.4 Skoðum fallið $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x^5-4x^3+2x-1$.
a) Notið milligildissetninguna til að sýna að jafnan $f(x)=0$ hefur a.m.k. eina lausn fyrir $x\in[-1,1]$.
b) Sýnið að jafnan $f(x)=1$ hefur enga lausn fyrir $x>2$.

■

Æfing 3.4.5 Sýnið að jafnan $x^3-8\sin(\frac{\pi}{4}x)+1=0$ hafi a.m.k. eina lausn á bilinu $[-1,1]$. Vísið í viðeigandi setningu. ■

Æfing 3.4.6 Skoðum fallið $F(x)=(x-a)^2(x-b)^2+x$. Sýnið að til er tala $c\in\mathbb{R}$ þannig að $F(c)=\dfrac{a+b}{2}$. *Ábending: athugið að* $\dfrac{a+b}{2}$ *er meðaltal* a *og* b. ■

Æfing 3.4.7 **Gamalt prófdæmi**: Sýnið að gröf fallanna $f(x)=e^x$ og $g(x)=x^4$ skerist a.m.k. tvisvar. Vísið í viðeigandi setningu og gerið grein fyrir að forsendur hennar séu uppfylltar. ■

3.5 Helmingunaraðferðin

Stundum er ógjörningur að leysa jöfnu nákvæmlega. Jafnvel einfalda jöfnu eins og $e^x=\sin(x)$.

Þá er eðlilegt skilgreina fall eins og $f(x)=e^x-\sin(x)$ og reyna að finna einhverja **rót** (e. root) f, þ.e. tölu $r\in\mathbb{R}$ þ.a. $f(r)=0$. Athugum að rót falls og **núllstöð** merkja það sama.

Afleiðing af Milligildissetningunni

Regla 3.5.1 Látum f vera samfellt fall skilgreint á bili $[a,b]$. Ef $f(a)$ og $f(b)$ hafa ólík formerki, þá hefur f núllstöð p á bilinu $[a,b]$.

3.5.1 Reiknirit

Síðustu reglu má nota til þess að smíða reiknirit til þess að nálga rót f:

(1) Látum $x=\frac{1}{2}(a+b)$ vera miðpunkt bilsins $[a,b]$.
(2) Reiknum $f(x)$, þá geta þrjú tilvik komið upp:

(i) $f(x) = 0$ og leitinni er lokið.
(ii) $f(a)$ og $f(x)$ hafa sitthvort formerkið,
þ.e. $f(a) \cdot f(x) < 0$, þá er rót á bilinu $[a, x]$.
Við setjum $b = x$ og förum aftur í skref (1). Athugið að í skrefi (2) finn-
(iii) $f(x)$ og $f(b)$ hafa sitthvort formerkið,
þ.e. $f(x) \cdot f(b) < 0$, þá er rót á bilinu $[x, b]$.
Við setjum $a = x$ og förum aftur í skref (1).

um við annahvort rót eða við förum aftur í skref (1) og endurtökum ferlið en núna með helmingi minna bil en áður.

Með því að endurtaka þetta ferli n sinnum fæst minnkandi runa af lokuðum bilum

$$[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_1, b_1] \cdots \supset [a_n, b_n]. \tag{3.4}$$

Billengdin helmingast í hverju skrefi og Milligildissetningin gefur að það er núllstöð á öllum bilunum.

Svona runu af bilum skilgreinum við með runu (p_k) þar sem $p_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$.

Upphafsskref: Setjum $a_1 = a$, $b_1 = b$, og $p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$.
Rakningarskref: Komið er $p_1, \dots, p_n$. Reiknum p_{n+1}.

(i) Ef $f(p_n) = 0$, þá er núllstöðin fundin og við hættum.
(ii) Ef $f(p_n)$ og $f(a_n)$ hafa sitthvort formerkið, þá setjum við $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = p_n$ og $p_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$.
(iii) Ef $f(p_n)$ og $f(b_n)$ hafa sitthvort formerkið, þá setjum við $a_{n+1} = p_n$, $b_{n+1} = b_n$ og $p_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1})$.

Þetta reiknirit kallast **Helmingunaraðferðin**.

Skekkjumat í Helmingunaraðferðinni

Hversu hratt nálgast helmingunaraðferðin rétt svar? Látum $[a_1, b_1] = [a, b]$ vera upphaflega bilið sem að við vitum að inniheldur rót r fallsins f, $[a_2, b_2]$ vera bilið eftir eitt helmingunaraðferðar skref $(n = 2)$, $[a_3, b_3]$ vera bilið eftir tvö skref $(n = 3)$ o.s.frv. Ef við hættum eftir $(n-1)$-skref þá höfum við núllstöð á bilinu $[a_n, b_n]$.

Látum miðpunktinn $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ vera nálgunargildið fyrir p, núllstöð fallsins f á bilinu $[a_n, b_n]$. Þá er skekkjan í nálguninni

$$e_n = p - p_n$$

og þar sem bilstærðin hefur helmingast í hverri nálgun, fæst skekkjumatið

$$|e_n| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

þar sem $n - 1$ er fjöldi helmingana og $[a_1, b_1] = [a, b]$ er upphaflega bilið. Það er

$$|e_n| \le \frac{b - a}{2^n}$$

Skilgreining 3.5.1 Látum $p \in \mathbb{R}$ og p_n vera útreiknað nálgunargildi á p. Við segjum að p_n sé rétt með n aukastöfum ef

$$|p - p_n| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}.$$

3.5.2 Fyrirframmat skekkju

Nú er auðvelt að meta hversu margar helmingarnir eða bilskiptingar $(n-1)$ þarf að framkvæma til þess að nálgunin lendi innan gefinna skekkjumarka.

Ef $\varepsilon > 0$ er gefið og við viljum að $|e_n| < \varepsilon$, þá notum við skekkjumatið, hér að ofan

$$|e_n| \leq \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Seinni ójafnan gefur

$$n > \frac{\ln((b-a)/\varepsilon)}{\ln 2}$$

■ **Dæmi 3.31** Hvað þarf Helmingunaraðferðin mörg skref til þess að finna núllstöð jöfnunnar $f(x) = \cos(x) - x$ með 6 réttum aukastöfum ef upphaflega bilið er $[0,1]$? Við viljum að

$$\frac{|b-a|}{2^n} \leq 0.5 \cdot 10^{-6},$$

þar sem $b = 1$ og $a = 0$. Lægsta heiltala n sem uppfyllir þessa ójöfnu er $n = 21$ því

$$\frac{\ln(2 \cdot 10^6)}{\ln(2)} \approx 20.9.$$

Því þarf að skipta þarf upphaflega bilinu 20 sinnum. Við sjáum að fjöldi bilskiptinga er óháður fallinu og ræðst eingöngu af gefnum skekkjumörkum og lengd bilsins $[a,b]$.
■

■ **Dæmi 3.32** Beitið Helmingunaraðferðinni til að finna lausn á jöfnunni $x = \cos(x^2)$ á bilinu $[0,1]$ með 2 réttum aukastöfum.

■ **Lausn** Er núllstöð á bilinu? Skilgreinum fall

$$f(x) = x - \cos x^2.$$

Þetta fall er mismunur tveggja samfelldra falla og er því samfellt fall. Þar sem $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ og $f(1) = 1 - \cos(1) > 0$ þá er núllstöð á bilinu $[0,1]$ samkvæmt Milligildissetningunni og hægt er að nota helmingunaraðferð til að finna rót fallsins f.

Reiknum út hversu oft þarf að skipta bilinu. Við viljum að $\frac{|b-a|}{2^n} \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$. Hér er $a = 0$ og $b = 1$. Stillum upp jöfnunni fyrir 2 rétta aukastafi.

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{200}$$

Tökum umhverfur og fáum

$$2^n \geq 200$$

Tökum náttúrlega logrann af báðum hliðum og athugum að ójöfnumerkið helst því náttúrlegi logrinn er vaxandi fall:

$$\ln 2^n = n \ln 2 \geq \ln 200$$

sem gefur

$$n \geq \frac{\ln 200}{\ln 2} \approx 7.6438.$$

Við tökum því $n = 8$, sem þýðir að skipta þarf bilinu 7 sinnum til að ná tveimur réttum aukastöfum. Smíðum töflu fyrir $f(x) = x - \cos x^2$.

	HELMINGUNARAÐFERÐ									
n	a_n		$p_n = \frac{a_n+b_n}{2}$		b_n	$f(a_n)$		$f(p_n)$		$f(b_n)$
1	0		0.5	✓	1	−1.0000		−0.4689	✓	0.4597
2	0.5		0.75	✓	1	−0.4689		−0.0959	✓	0.4597
3	0.75	✓	0.875		1	−0.0959	✓	0.1541		0.4597
4	0.75	✓	0.8125		0.8750	−0.0959	✓	0.0226		0.1541
5	0.75	✓	0.7813		0.8125	−0.0959		−0.0382	✓	0.0226
6	0.7813		0.7969	✓	0.8125	−0.0381		−0.0081	✓	0.0226
7	0.7969	✓	0.8047		0.8125	−0.0081	✓	0.0071		0.0226
8	0.7969		0.8008	✓	0.8047	−0.0081		−0.0005	✓	0.0071

Milligildissetningin tryggir að fallið hefur rót á bilinu $[0.7969\,, 0.8047]$ og við getum verið viss um að $p_8 = 0.8008$ er nálgunarlausn með tveimur réttum aukastöfum en þriðji aukastafur er óviss. Því er engin ástæða til að gefa fleiri en 2 aukastafi í lokasvari og við gefum svarið:

$$p_* = 0.80$$

∎

Helmingunaraðferðin í Matlab-kóða

```
function p = bisect(f,a,b,tol)
%BISECT
% ________________________________________________
%
%     Reiknar nálgunarlausn á f(x)=0
% ________________________________________________
% INN:
% f:  'inline function'
% a: Vinstri endapunktur bils,
% b: Hægri endapunktur bils, þannig að f(a)*f(b)<0,
% tol: Þolmörk skekkju í nálgunargildi
% ------------------------------------------------
% ÚT:
% Nálgunarlausn p
% ________________________________________________
% Dæmi um notkun:
```

```
% -----------------------------------------------------
% a = -5; b = 1; tol = 0.00005 % 4 réttir aukastafir
% f= inline('sin(x) - exp(x)')
% r = bisect(f,a,b,tol)
% -----------------------------------------------------
if sign(f(a))*sign(f(b)) ≥ 0      % Formerkisfallið sign notað
error('f(a)f(b)<0 ekki uppfyllt!') % Villumelding. Forritið hættir

end
fa=f(a);                          % fa er fallgildi f í a.
fb=f(b);                          % fb er fallgildi f í b.
  while (b-a)/2>tol               % Reiknar á meðan hálf billengd
                                  % er meiri en þolmörk (tol).
       c=(a+b)/2;                 % Setur nýjan miðpunkt c.
       fc=f(c);                   % fc verður fallgildi í c.
        if fc == 0                % EF fallgildið í miðpunktinum er nákvæmlega
                                  % núll, þá er núllstöð fundin,
          break                   % og forritið hættir keyrslu.
        end
    if sign(fc)*sign(fa)<0        % EF skilyrðið er uppfyllt: a og c nýtt bil:
        b=c;                      % Hægri endapunktur færist í miðpunktinn c
        fb=fc;                    % fb tekur fallgildi í c
    else                          % EF skilyrðið er EKKI uppfyllt:
        a=c;                      % Vinstri endapunktur færist í c
        fa=fc;                    % og tekur fallgildi í c.
    end
  end
p =(a+b)/2;                        % Þegar þolmörkum er náð, skrifa út p sem
                                   % bestu nálgun á núllstöð (sjá efstu línu).
end
```

■ **Dæmi 3.33** Notið Helmingunaraðferðina til þess að finna rætur fallsins

$$f(x) = 1 + 5x - 6x^3 - e^{2x}$$

með 8 marktæknum aukastöfum.

■ **Lausn** Byrjum á því að teikna mynd af fallinu til að fá hugmynd um legu rótanna; geri nokkrar tilraunir með endapunkta bils.

■ **Keyrsluskrá 8**

```
%% Rætur f(x) = 1+5x-6x^3-exp(2x) fundnar með forritinu bisect.m
 % ----------------------------------------------------------
%  Byrja á að teikna mynd af fallinu til að fá hugmynd um legu
%  núllstöðvanna.
 % ----------------------------------------------------------
a = -1; b = 1;  % Endapunktar bils til athugunar.
n = 200;        % Skipti bilinu í 200 jafndreifða punkta
x = linspace(a,b,n);
f = 1+5*x-6*x.^3-exp(2*x);

plot(x,f)
hold on
plot([a,b], [0,0],'k-')  % Lárétt lína
hold off
```

Við sjáum að það eru núllstöðvar á bilunum $[-1.5, -0.5]$, $[-0.5, 0.5]$ og $[0.3, 1.3]$. Þessi bil hafa öll lengdina 1. Keyrum nú `bisect.m` skrána, fyrst með endpunktum `a =`

Mynd 3.6: Giskað á rætur fallsins $f(x) = 1 + 5x - 6x^3 - e^{2x}$

`-1.5` og `b =-0.5` og hef `tol = 0.5*10^-8` þar sem krafist er 8 réttra aukastafa. Skrifa í keyrsluskrá

```
a = -1.5; b = -0.5; tol = 0.5*10^-8 % 8 réttir aukastafir
f= inline('1+5*x-6*x^3-exp(2*x)')
    % Óvissan kemur á 9. aukast.,
    % sýnum því ekki fleiri en 9 aukast.
    % Nota því num2str(tala,'format')
r1 = bisect(f,a,b,tol);
rot1 = num2str(r1,'%4.9g')
    % 4 er fjöldi tölustafa fyrir framan kommu
    % og 9 er fjöldi tölustafa aftan við kommu.
```

Þá fæst rót $r_1 = -0.818093736$ á bilinu $[-1.5, -0.5]$ þar sem aftasti tölustafurinn 6 er óviss.

Tökum næst fyrir bilið $[-0.5, 0.5]$

```
a = -0.5; b = 0.5; tol = 0.5*10^-8
f= inline('1+5*x-6*x^3-exp(2*x)')
r2 = bisect(f,a,b,tol);
rot2 = num2str(r2,'%4.9g')
```

sem gefur $r_2 = 0$.

Loks er rót á bilinu $[0.3, 1.3]$

```
a = 0.3; b = 1.3; tol = 0.5*10^-8
f= inline('1+5*x-6*x^3-exp(2*x)')
r3 = bisect(f,a,b,tol);
rot3 = num2str(r3,'%4.9g')
```

og forritið gefur $r_3 = 0.506308287$.

Við höfum því fundið 3 rætur jöfnunnar $1 + 5x - 6x^3 - e^{2x} = 0$

$$r_1 = -0.818093736,$$
$$r_2 = 0,$$
$$r_3 = 0.506308287.$$

Hér eru r_1 og r_3 nálganir á réttu gildi með 8 réttum aukastöfum, en $r_2 = 0$ er nákvæm lausn, sem sést á því að þegar $x = 0$ er sett inn í jöfnuna þá kemur út nákvæmlega 0.

■

Æfingar 3.5

Æfing 3.5.1 Notið Helmingunaraðferðina til að finna rætur eftirfarandi jafna með 2 réttum aukastöfum.

(i) $3x^3 = x + 5$

(ii) $\cos^2 x + 6 = x$

■

Æfing 3.5.2 Notið forritið `bisect` til að finna núllstöðvar jafnanna:

(i) $2x^3 - 6x - 1 = 0$

(ii) $e^{x-2} + x^3 - x = 0$

(iii) $1+5x-6x^3-e^{-2x} = 0$

a) Notið fyrst `plot` fallið í MATLAB til að sjá út þrjú bil, hvert af lengdinni 1 þar sem rót liggur.
b) Reiknið út hverja núllstöð með 8 réttum aukastöfum. (ábending: Notið Skilgreiningu 3.5.1 og matið sem kemur fram í ójöfnu (3.5) til að finna hæfilegt ε, sem kallast `tol` í forritinu.)
c) Teiknið ræturnar (núllstöðvarnar) inn á mynd af fallinu. (Ábending: Keyrsluskrá 2 á bls. 29)

■

4. Deildun

4.1 Skilgreiningar og reiknireglur

Deildun, einnig kallað diffrun (e. differentiation), er einhver mikilvægasta aðgerðin í stærðfræðigreiningu.

Skilgreining 4.1.1 Látum f vera fall og a vera innri punkt formengis f. Ef markgildið

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} =: m \in \mathbb{R} \quad \text{(ath. } m \text{ má ekki vera } +\infty \text{ eða } -\infty)$$

er til, þá er rauntalan m kölluð *afleiða* (e. derivative) fallsins f í punktinum a og f er sagt vera *deildanlegt* (e. differentiable) í a. Línan

$$y(x) = m(x-a) + f(a)$$

er kölluð snertill við graf (eða feril) fallsins f í punktinum $(a, f(a))$. Afleiða f í a er hallatala línunnar. Snertillinn er besta línulega nálgun við fallið f nálægt a.

Regla 4.1.1 Látum f vera fall og a vera innri punkt formengis f. Ef f er deildanlegt í a, þá er f samfellt í a.

Sönnun. Markgildisreglurnar gefa nú

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h = 0,$$

og þá, einnig

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)+f(a)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(a+h)-f(a)\right] + \lim_{h\to 0} f(a) = 0 + f(a) = f(a)$$

svo f er samfellt í a. ■

Nú gildir svipað og með samfelld föll, að deildanleiki falls f í einum punkti mun minna áhugaverður en deildanleiki f fyrir öll $x \in I$, þar sem $I \subset \mathrm{Dom}(f)$ er bil (með fleiri en einn punkt). Af skilgreiningu deildunar ætti að vera ljóst að bilið I verður að vera opið, t.d. $I =]a,b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$, $I =]a,+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty \}$ eða álíka.

Skilgreining 4.1.2 Látum f vera fall. Ef f er deildanlegt í öllum $x \in \mathrm{Dom}(f)$ þá er fallið f sagt vera deildanlegt. Ef I er opið bil þ.a. $I \subset \mathrm{Dom} f$ og f er deildanlegt fyrir öll $x \in I$, þá er f sagt vera deildanlegt á bilinu I. Fallið

$$f'(x) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

er kallað afleiða fallsins f. Ef f er deildanlegt þá er $\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f)$ og ef f er deildanlegt á bilinu I þá er $I \subset \mathrm{Dom}(f')$.

Ein mikilvægasta setning stærðfræðinnar er **Meðalgildissetningin** (*e. Mean Value Theorem*) sem við setjum fram á bls. 119. Til þess að geta sannað hana þurfum við reiknireglur fyrir deildun.

Regla 4.1.2 — Summa, margfeldi og umhverfa. Látum f og g vera föll sem eru bæði deildanleg í x. Þá er:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \text{Afleiða summu} \qquad (4.1)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \text{Afleiða margfeldis} \qquad (4.2)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{ef } g(x) \neq 0 \qquad \text{Afleiða umhverfu} \qquad (4.3)$$

Sönnun. Leiðir beint af Markildisreglunum.

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &:= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &:= \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &:= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right)\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{-1}{g(x+h)g(x)}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-1}{g(x+h)g(x)}\\
&= g'(x)\cdot\frac{-1}{[g(x)]^2} = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}.
\end{aligned}
$$

■

Bein afleiðing er:

Regla 4.1.3 — Kvótareglan. Látum f og g vera föll sem eru bæði deildanleg í x og $g(x)\neq 0$. Þá er:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\cdot\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \tag{4.4}$$

Æfingar 4.1

Æfing 4.1.1 Upprifjun: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ og $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$:

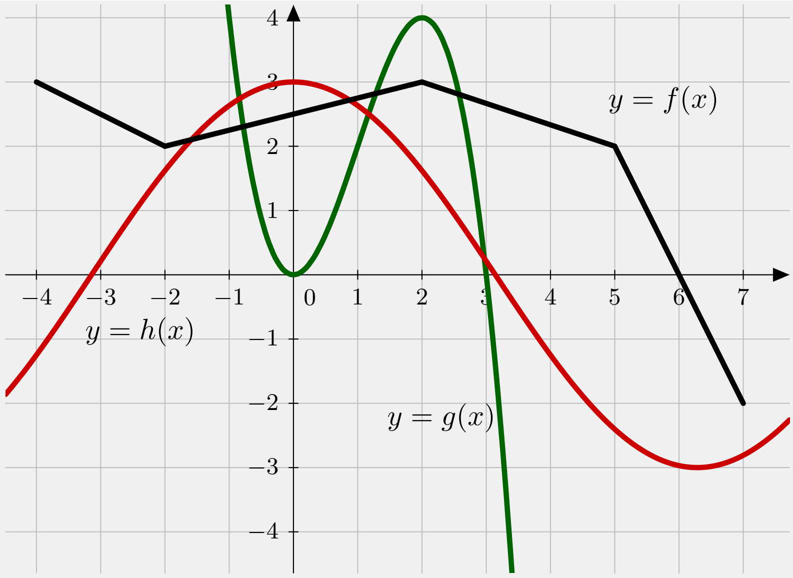
(i) Liðið $f(x)=(x+1)^2$ og sýnið að $f'(x)=2(x+1)$.

(ii) Liðið $f(x)=(x+1)^3$ og sýnið að $f'(x)=3(x+1)^2$.

■

Æfing 4.1.2 Sannið með þrepun, að fallið $f(x)=x^n$ þar sem $n\in\mathbb{N}$, hefur afleiðu $f'(x)=nx^{n-1}$. ■

Æfing 4.1.3 Föllin f, g og h á myndinni eru öll samfelld (hvert á sínu formengi). Föllin g og h er ennfremur deildanleg. Færið rök fyrir því að f sé *ekki* deildanlegt fall. (Munið að fall er sagt vera deildanlegt á rauntalnabili ef það er deildanlegt í *sérhverjum* innri punkti á bilinu).



■

4.2 Keðjureglan (e. Chain Rule)

Regla 4.2.1 — Keðjureglan. Látum f og g vera föll þ.a. g er deildanlegt í a og f er deildanlegt í $b := g(a)$. Þá er $f \circ g$ deildanlegt í a og

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Sönnun. Ef $g'(a) \neq 0$ þá er sönnunin einföld því $g(a+h) - g(a) \neq 0$ fyrir nógu lítil $h \neq 0$ og

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= f'(g(a)) \cdot g'(a),
\end{aligned}$$

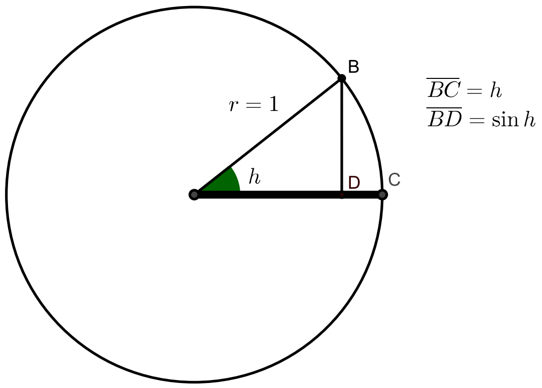
því með $y = g(a+h) - g(a)$ gildir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y \to 0} \frac{f(g(a)+y) - f(g(a))}{y} = f'(g(a)).$$

Tilfellið $g'(a) = 0$ verður þá að meðhöndla sérstaklega (ath. ef $g'(a) = 0$ þá er $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) = 0$). Sönnunin er frekar tæknileg og því sleppum við henni hér. ■

Regla 4.2.2 Föllin $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ og $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eru samfelld.

Sönnun. Æfing 4.2.3. Sannið fyrst að $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er samfellt og notið þá niðurstöðu og hornafallreglur til að sanna að $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er samfellt. Styðjast má við Mynd 4.1 ■



Mynd 4.1: Einingarhringur. Boginn $\overline{BC}$ er margfeldi geisla og horns.

Regla 4.2.3

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Sönnun. Æfing 4.2.4. ■

MATLAB :

Til að finna markgildið $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ er hægt að nota kóðann

```
syms x
markgildi = limit(sin(x)/x, x,0)
```

sem gefur

```
markgildi = 1
```

■ **Dæmi 4.1** Sýnum að $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

■ **Lausn**

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h/2 + h/2) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(h/2) - \sin^2(h/2) - 1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} [-\sin(\frac{h}{2}) \frac{\sin(h/2)}{h/2}] = -0 \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

■

Regla 4.2.4 Föllin $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ og $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eru deildanleg og

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{og} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

Sönnun.

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h}\right] \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

Nú notum við að

$$\cos(x) = \sin(\pi/2 - x) \quad \text{og} \quad \sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$$

og Keðjuregluna og fáum

$$(\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = -\cos(\pi/2 - x) = -\sin x.$$

■

■ **Dæmi 4.2** Ef $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x) + \cos(3x)$, þá er á $\mathrm{Dom}(f)$

$$f'(x) = \pi\cos(\pi x) - 3\sin(3x).$$

Ef $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin\sqrt{x}$, þá er á bilinu $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 2x \sin\sqrt{x} + x^2 \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Ef $f : \mathbb{R} \setminus \{\, \pi/2 + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x/(1 - \sin x)$, þá er á $\mathrm{Dom}(f)$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1 - \sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

$f : \mathbb{R} \setminus \{\, \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x = \sin x/\cos x$, þá er á $\mathrm{Dom} f$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

■

Við sönnum núna tvær mikilvægar reglur og snúum okkur svo að Meðalgildissetningunni.

Rifjum upp að þau x sem gefa $f'(x) = 0$ kallast **útgildispunktar** (*e. critical points*) fallsins f. Við lítum fyrst á *Regluna um útgildispunkta*:

Regla 4.2.5 Látum f vera fall sem er samfellt á bilinu $[a, b]$ og deildanlegt á bilinu $]a, b[$, $a < b$. Ef f tekur hæsta (eða lægsta) gildi sitt í $c \in]a, b[$, þá er $f'(c) = 0$.

Sönnun. Gerum ráð fyrir að f taki hæsta gildi sitt í c, þ.e. $f(x) \leq f(c)$ fyrir öll $x \in [a, b]$. (Tilfellið að $f(c)$ sé lægsta gildi er svipað.) Þá er

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{fyrir öll } x < c$$

svo að

$$\lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

og

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \text{fyrir öll } x > c$$

svo að

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Af því að f er deildanlegt í c er

$$0 \leq \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

svo $f'(c) = 0$. ■

Æfingar 4.2

Æfing 4.2.1 (i) Er fallið $f(x) = |x|$ diffranlegt?
(ii) Er fallið $f(x) = |2x^2 - 3x + 2|$ diffranlegt?
(iii) Er fallið $f(x) = x|x|$ diffranlegt?
(iv) Er fallið $f(x) = x^2|x|$ diffranlegt?
(v) Finnið jöfnu snertils við fallið $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ í $(3, f(3))$.
■

Æfing 4.2.2 Notið Keðjuregluna til að sýna að
(i) $f(x) = (x + 1)^2$ hefur afleiðu $f'(x) = 2(x + 1)$.
(ii) $f(x) = (x + 1)^3$ hefur afleiðu $f'(x) = 3(x + 1)^2$.
■

Æfing 4.2.3 Notið hornafallareglur og sýnið að

$$\lim_{h \to 0} (\sin(x + h) - \sin x) = 0 \text{ og}$$
$$\lim_{h \to 0} (\cos(x + h) - \cos x) = 0$$

til að sanna Reglu 4.2.2. ■

Æfing 4.2.4 Sannið að $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. (Styðjast má við Mynd 4.1 bls. 115 ■

Æfing 4.2.5 Sýnið að $\sin x$ og $\cos x$ eru samfelld föll.

Ábending: Almennt gildir *ekki* um fall f að

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f\left(\lim_{x\to 0} x\right) = f(0)$$

en ef f er samfellt í $x = 0$ þá má beita svona reikningum. Rökstyðjið út frá Mynd 4.1 af einingarhringnum að $\lim_{h\to 0} \sin(h) = 0$. Sýnið svo í framhaldi af því að $\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1$. Að þessu fengnu er ljóst að $\sin x$ og $\cos x$ eru samfelld í 0. (Hvernig er skilgreining á samfelldni í punkti?) Notið svo summureglur fyrir sínus og kósínus til að sýna að

$$\lim_{h\to 0} \sin(x+h) = \sin x \text{ og } \lim_{h\to 0} \cos(x+h) = \cos x.$$

■

Æfing 4.2.6 $f : \mathbb{R} \setminus \{\, \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos x}$. Reiknið f'. ■

Æfing 4.2.7 Reiknið afleiður fallanna. Einfaldið eins og skynsamlegt er og sannreynið niðurstöður með MATLAB . Sjá Dæmi 4.26 fyrir hvernig má deilda með MATLAB .

1. $y = x^2 - 3x - 1$
2. $z = \dfrac{x-2}{x^{1/3}}$
3. $f(x) = \dfrac{3-x}{3+x}$

■

Æfing 4.2.8 Fyrir hvaða gildi á $x \in \mathbb{R}$ er fallið $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ ekki deildanlegt. Hér má nota myndræna útskýringu.

■

Æfing 4.2.9 — Keðjuregla. Rauntalnabil $I :=]-a, a[$ með $a > 0$ er sagt vera *samhverft*.

Látum I vera samhverft rauntalna bil. Rifjum upp að fall f er sagt vera
✓ **jafnstætt** fall á I ef $f(-x) = f(x)$ fyrir öll $x \in I$.
✓ **oddstætt** fall á I ef $f(-x) = -f(x)$ fyrir öll $x \in I$.

Notið Keðjuregluna til að sýna að:
1) Ef $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ er jafnstætt fall, þá er $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ oddstætt fall.
2) Ef $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ er oddstætt fall, þá er $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ jafnstætt fall.

■

4.3 Setning Rolle og Meðalgildissetningin

Regla 4.3.1 — Setning Rolle. Látum g vera fall sem er samfellt á bilinu $[a,b]$ og deildanlegt á bilinu $]a,b[$, $a<b$. Ef $g(a)=g(b)$, þá er til $c\in]a,b[$ þ.a. $f'(c)=0$.

Sönnun. Ef fallið g er fasti, $g(x)=g(a)$ fyrir öll $x\in[a,b]$, þá er $g'(x)=0$ fyrir öll $x\in]a,b[$. Ef fallið g er ekki fastafallið, þá verður g að taka a.m.k. hæsta eða lægsta gildi sitt í einhverju c á opna bilinu $]a,b[$ skv. Reglu 4.2.3. En þá er Reglu 4.2.5 $g'(c)=0$. ■

Sjálf Meðalgildissetningin leiðir nú beint af Setningu Rolle.

Regla 4.3.2 — Meðalgildissetningin. Látum f vera fall sem er samfellt á bilinu $[a,b]$ og deildanlegt á bilinu $]a,b[$. Þá er til $c\in]a,b[$ þ.a.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Sönnun. Við skilgreinum $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$g(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right).$$

Þá er g samfellt á $[a,b]$ og deildanlegt á $]a,b[$ og

$$g(a)=f(a)-f(a)=0$$

og

$$g(b)=f(b)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right)=f(b)-(f(a)+f(b)-f(a))=0.$$

Fallið g uppfyllir því öll skilyrði fyrir Setningu Rolle svo til er $c\in]a,b[$ þ.a. $g'(c)=0$, en þá er

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

þ.e.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■

Ein gagnleg afleiðing Meðalgildissetningunnar er **Almenna Meðalgildissetningin**:

Regla 4.3.3 Látum f og g vera föll sem eru samfelld á $[a,b]$ og deildanleg á $]a,b[$, $a<b$. Ef $g'(x)\neq 0$ fyrir öll $x\in]a,b[$, þá er til $c\in]a,b[$ þ.a.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Sönnun. Ef $g(a) = g(b)$, þá væri til $c \in]a, b[$ þ.a. $g'(c) = [g(b) - g(a)]/(b - a) = 0$ sem er mótsögn. Því er $g(a) \neq g(b)$. Við notum nú Setningu Rolle (eða Meðalgildissetninguna) á fallið

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

h er samfellt á $[a, b]$ og deildanlegt á $]a, b[$ og

$$h(a) = h(b) = 0$$

svo til er $c \in]a, b[$ þ.a. $h'(c) = 0$. En þá er

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

svo

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

Æfingar 4.3

Æfing 4.3.1 Beitið Meðalgildissetningunni (*e. Mean Value Theorem*) á fallið $f(t) = \cos t + \dfrac{t^2}{2}$ á bilinu $[0, x]$ og notið þá staðreynd að $\sin x < x$ fyrir öll $x > 0$ til að sanna að $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ fyrir öll $x > 0$. Reyndar er þessi ójafna líka rétt fyrir $x < 0$ (Hvernig ?) (Lausn: Dæmi 4.33 á bls. 141) ■

Æfing 4.3.2 Notið Meðalgildissetninguna til að sýna að $\cos x \geq 1 - x$ á bilinu $[0, 1]$. (Ábending: Skilgreinið fallið $f(x) = x + \cos x - 1$. Færið rök fyrir því að f sé deildanlegt (og þar með samfellt); beitið svo Meðalgildissetningunni) ■

Æfing 4.3.3 Notið Meðalgildissetninguna til að sýna að ójafnan $\cos(x) + \dfrac{3\pi}{2} \leq x$ gildir á bilinu $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. ■

Æfing 4.3.4 Notið Meðalgildissetninguna til að sýna að $e^x > 1 + x$ fyrir öll $x > 0$. Er ójafnan uppfyllt ef $x = 0$? En ef $x < 0$? Rökstyðjið! ■

Æfing 4.3.5 Sýnið að $e^x \geq 1 + x$ fyrir öll $x \geq 0$. Vísið, ef við á, í viðeigandi setningu og gerið grein fyrir að forsendur hennar séu uppfylltar. Rökstyðjið hvert skref vandlega. ■

4.4 Vaxandi og minnkandi föll

Ein mikilvæg hagnýting Meðalgildissetningunnar er eftirfarandi skilgreining og regla.

Skilgreining 4.4.1 Látum f vera fall og $I \subset \mathrm{Dom}(f)$ vera bil. Þá er f sagt vera:

a) Vaxandi á I, ef af $x_1, x_2 \in I$ og $x_1 < x_2$ leiðir $f(x_1) \leq f(x_2)$.
b) Stranglega vaxandi á I, ef af $x_1, x_2 \in I$ og $x_1 < x_2$ leiðir $f(x_1) < f(x_2)$.
c) Minnkandi á I, ef af $x_1, x_2 \in I$ og $x_1 < x_2$ leiðir $f(x_1) \geq f(x_2)$.
d) Stranglega minnkandi á I, ef af $x_1, x_2 \in I$ og $x_1 < x_2$ leiðir $f(x_1) > f(x_2)$.

Af Meðalgildissetningunni leiðir nú:

Regla 4.4.1 Látum f vera deildanlegt fall á opnu bili I. Þá gildir:

a) Ef $f'(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in I$, þá er f vaxandi á I.
b) Ef $f'(x) > 0$ fyrir öll $x \in I$, þá er f stranglega vaxandi á I.
c) Ef $f'(x) \leq 0$ fyrir öll $x \in I$, þá er f minnkandi á I.
d) Ef $f'(x) < 0$ fyrir öll $x \in I$, þá er f stranglega minnkandi á I.

Sönnun. Fyrir $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, er til $c \in]x_1, x_2[$ þ.a.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

En $x_2 - x_1 > 0$ svo $f(x_2) - f(x_1)$ hefur sama formerki og $f'(c)$. Af þessu leiða allir liðirnir. ■

■ **Dæmi 4.3** Hvar er fallið $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ stranglega minnkandi og hvar er það stranglega vaxandi?

■ **Lausn** Við reiknum $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$ og athugum að það er samfellt fall. Svo getum við t.d. gert formerkjatöflu.

■

■ **Dæmi 4.4** Sýnum að $x > \sin x$ fyrir öll $0 < x < 1$. Setjum $f(x) = x - \sin x$, þá er f deildanlegt og $f'(x) = 1 - \cos x$. Þ.e. $f(0) = 0$ og $f'(x) > 0$ fyrir öll $0 < x < 1$, þ.e. f er stranglega vaxandi á $0 < x < 1$. Þar sem f er stranglega vaxandi er $x > \sin(x)$.
Athugið að þetta má einnig sýna með því að nota Meðalgildissetninguna beint. Við setjum aftur $f(x) = x - \sin x$. Fallið f er samfellt af því að það er mismunur samfelldra falla, og x og $\sin x$ sem eru einnig bæði deildanleg. Þá er f deildanlegt og hefur afleiðu $f'(x) = 1 - \cos x$. Þá vitum við að samkvæmt Meðalgildisetningunni er $c \in]0, 1[$ þannig að

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

þar sem x er tala á bilinu $]0, 1[$. Við höfum sem sagt að

$$1 - \cos(c) = \frac{x - \sin(x)}{x} = 1 - \frac{\sin(x)}{x}$$

sem er jafngilt

$$\sin(x) = x\cos(c) < x$$

vegna þess að $\cos(c) \in]\cos(0), \cos(1)[$, sem sagt $\cos(c) < 1$. ■

■ **Dæmi 4.5** Látum $f(x) = x^3$. Þá er auðvelt að sjá að af $a < b$ leiðir $a^3 = f(a) < f(b) < b^3$ svo samkvæmt Skilgreiningu 4.4.1 er f stranglega vaxandi á $\mathbb{R}$. Engu að síður er $f'(x) = 3x^2$ svo við höfum $f'(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, en ekki $f'(x) > 0$ fyrir öll x. Af hverju er þetta ekki mótsögn? ■

Ef fall er fasti á bili, þá er afleiða þess núll á því bili. Meðalgildissetningin gefur nú hina áttina:

Regla 4.4.2 Látum f vera deildanlegt fall á opnu bili I. Þá gildir: Ef $f'(x) = 0$ fyrir öll $x \in I$, þá er $f(x) = c$ (fasti) fyrir öll $x \in I$.

Sönnun. Ef f er ekki fastafall, þá eru til $a, b \in I$ þ.a. $a < b$ og $f(a) \neq f(b)$. Af Meðalgildissetningunni leiðir þá að til er $c \in]a, b[$ þ.a.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0$$

sem er mótsögn við $f'(x) = 0$ fyrir öll $x \in I$. Þess vegna verður f að vera fastafall. ■

Æfingar 4.4

Æfing 4.4.1 Reiknið afleiður eftirfarandi falla. Takið einnig fram formengi afleiðunnar.

(i)
$$f(x) = \sqrt{x}\left(4 + x^2 - \sin x\right)$$

(ii)
$$y = \frac{5}{1 - x^2}$$

(iii)
$$f(x) = (x^{-2} + x^{-3} + 2)(x^2 - 2x^{-3} - 1)$$

(iv)
$$z = \frac{(x+2)(x-5)}{(x^2+1)(x-2)}$$

■

Æfing 4.4.2 Gefið að $f(3) = 1$ og $f'(3) = -2$, reiknið eftirfarandi afleiður. Ath. $\frac{d}{dx}$ þýðir að taka á afleiðuna með tilliti til breytunnar x og $|_{x=3}$ þýðir að setja eigi $x = 3$ (stinga inn í) í útkomunni.

(i)
$$\frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right)\Big|_{x=3}$$

(ii)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{f(x)}\right)\Bigg|_{x=3}$$

(iii)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)\Bigg|_{x=3}$$

(iv)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x^2 + f(x)}\right)\Bigg|_{x=3}$$

■

Æfing 4.4.3 Skoðum $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ef } x > 0, \\ -1, & \text{ef } x < 0. \end{cases}$
Þá er $f'(x) = 0$ á $\mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en f er ekki fastafall. Af hverju er þetta ekki mótsögn við Reglu 4.4.2? ■

Æfing 4.4.4 Ímyndum okkur að við getum tekið streng og strengt hann utan um miðja jörðina og gerum ráð fyrir að jörðin sé algjörlega kúlulaga, svo strengurinn er á hringlaga ferli. Tökum svo þennan streng og lengjum hann um 11 metra og látum hann vera í hring í kringum jörðina, jafn langt frá jörðinni allan hringinn. Nú er spurningin: **a)** Getur þú hoppað yfir strenginn? **b)** Kemstu undir strenginn? ■

Æfing 4.4.5 Notið skilgreininguna á afleiðu falls til að reikna afleiðu fallsins $y = \sqrt{x+6}$ í punktinum $(30, 6)$. ■

Æfing 4.4.6 Finnið jöfnur tveggja beinna lína sem hafa hallatölu -2 og eru snertlar við fallið $f(x) = 1/x$. ■

Æfing 4.4.7 Finnið á hvaða bilum er eftirfarandi föll stranglega vaxandi og stranglega minnkandi:

(i) $f(x) = x^3 - 4x + 1$
(ii) $f(x) = x^3(5-x)^2$
(iii) $f(x) = \sin x$
(iv) $f(x) = \cos^2 x$

■

4.5 Hærri afleiður falla

Afleiða falls f er nýtt fall, sem getur þá líka verið deildanlegt. Ef f' er deildanlegt fall, þá kallast fallið f'' önnur afleiða f og er skilgreint fyrir sérhvert x í formengi sínu með

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Fallið f'' gæti nú líka verið deildanlegt og svo framvegis. Almennt talar maður um n-tu afleiðu fallsins f og ritar $f^{(n)}$.

■ **Dæmi 4.6** Hraði hlutar er skilgreindur sem breyting á staðsetningu hans m.t.t. tímans. Þ.e. ef staðsetning hlutarins x er gefin með fallinu $x = f(t)$, þá er hraði hlutarins

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t).$$

Hröðun hlutarins er breyting á hraða hlutarins og þar með gefinn með annarri afleiðu staðsetningarinnar m.t.t. tímans

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t).$$

■

■ **Dæmi 4.7** Ef $f(x) = x^3$ þá er $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ og $f^{(4)}(x) = 0$. ■

Athugið vel ritháttinn hér, við ritum fyrstu afleiðuna

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

og aðra afleiðuna

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$$

og almennt n-tu afleiðuna

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\right)$$

■ **Dæmi 4.8** Ef $A, B, k \in \mathbb{R}$ eru fastar þá uppfyllir fallið $y(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt)$

$$\text{deildajöfnuna } \; y'' + k^2 y = 0, \tag{4.5}$$

sem þýðir ekkert annað en að $y''(t) + k^2 y(t) = 0$ fyrir öll t. Þetta leiðir af einföldum útreikningum: $y'(t) = -Ak\sin(kt) + Bk\cos(kt)$ og $y''(t) = -Ak^2\cos(kt) - Bk^2\sin(kt)$ svo að

$$y''(t) = -k^2 y(t)$$

sem þýðir einmitt að

$$y''(t) + k^2 y(t) = 0.$$

Til þess að geta reiknað út fastana A og B þurfum við meiri upplýsingar, t.d. ef við þekkjum $y(0)$ og $y'(0)$, þá er

$$y(0) = A \;\text{ og }\; y'(0) = Bk.$$

■

Æfingar 4.5

Æfing 4.5.1 Gefið er fallið $f(x) = \frac{1}{x}$. Reiknið út fyrstu, aðra, þriðju og fjórðu afleiður f, þ.e. reiknið f', f'', f''' og $f^{(4)}$, og giskið á almenna formúlu fyrir $n-$tu afleiðu $f^{(n)}(x)$.
(Lausn: Sjá Dæmi 4.31 bls. 139.) ■

Æfing 4.5.2

(i) Giskið á almenna formúlu fyrir n-tu afleiðu fallsins $f(x) = \dfrac{a}{b-x}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Sýnið með þrepun (*e. prove by induction*) að formúlan sé rétt fyrir öll $n \in \mathbb{N}$

Ábending: Dæmi 4.32 er mjög svipað þessu. ■

Æfing 4.5.3 Sýnið að fallið $y(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$ uppfylli deildajöfnuna

$$y''(t) + 9y(t) = 0.$$

Reiknið A og B ef gefið er að $y(0) = 1$ og $y'(0) = -2$. ■

Æfing 4.5.4 Gefið er fallið $y = \tan(kx)$. Sýnið að $y'' = 2k^2y(1+y^2)$ ■

4.6 Fólgin föll

Fólgin föll kallast á ensku *Implicit functions*.

Stundum er ferill í plani ekki gefinn sem graf falls $y = f(x)$, heldur með jöfnu af gerðinni $F(x,y) = 0$, t.d. er jafna hrings með radíus 5 gefinn með jöfnunni $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$. Stundum er hægt að leysa y út úr jöfnunni, t.d. í tilfelli hringsins

$$y = \sqrt{25 - x^2} = f(x) \quad \text{eða} \quad y = -\sqrt{25 - x^2} = g(x),$$

og finna formúlur fyrir falli eða föllum, sem skilgreinast af jöfnunni $F(x,y) = 0$.

■ **Dæmi 4.9** Finnum formúlu fyrir snertli ferilsins $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ í punktinum $(3,4)$. Hallatala snertilsins er

$$f'(x)\big|_{x=3} = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\bigg|_{x=3} = \frac{-3}{4}$$

og formúlan fyrir snertlinum þá

$$y_1(x) = f(3) + f'(3)(x-3) = 4 - \frac{3}{4}(x-3) = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}.$$

■

■ **Dæmi 4.10** Finnum formúlu fyrir snertli ferilsins $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ í punktinum $(3,-4)$. Hallatala snertilsins er

$$g'(x)\big|_{x=3} = \frac{2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\bigg|_{x=3} = \frac{3}{4}$$

og formúlan fyrir snertlinum þá

$$y_2(x) = g(3) + g'(3)(x-3) = -4 + \frac{3}{4}(x-3) = \frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}.$$

■

Það er til betri aðferð til þess að leysa verkefni eins og hér að ofan sem byggist á setningunni um fólgin föll (sem við getum ekki rökstutt mjög vel að svo stöddu). Aðferðin er eftirfarandi:

Til þess að finna hallatölu snertils ferils, sem er skilgreindur með jöfnunni $F(x,y) = 0$, í punkti (x_0, y_0) á ferlinum, framkvæmir maður eftirfarandi skref:

i) Deildum jöfnuna $F(x, y(x)) = 0$ m.t.t. x, þar sem við lítum á $y(x)$ sem fall af x. T.d. fyrir hringinn að ofan (ekki gleyma Keðjureglunni)

$$\frac{d}{dx}\Big(x^2 + [y(x)]^2 - 25\Big) = 2x + 2y(x)\cdot y'(x) = 0. \tag{4.6}$$

ii) Til að finna hallatöluna í punkti (x_0, y_0), sem er á ferlinum (þ.e. $F(x_0, y_0) = 0$), stingum við $x = x_0$ og $y = y_0$ inn í jöfnu (4.6) og ef hún hefur ótvírætt ákvarðaða lausn fyrir $y'(x_0)$, þá er þetta hallatala snertils í punktinum. T.d. með $(x_0, y_0) = (3, 4)$ þá er jafnan að ofan

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x)\big|_{x=3,y(3)=4} = 6 + 8 \cdot y'(3) = 0$$

svo hallatalan er $y'(3) = -4/3$ og með $(x_0, y_0) = (3, -4)$ þá er jafnan að ofan

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x)\big|_{x=3,y(3)=-4} = 6 - 8 \cdot y'(3) = 0$$

svo hallatalan er $y'(3) = 3/4$.

Af hverju gengur þetta upp? Setningin um fólgin föll segir nokkurn veginn eftirfarandi: Ef F er ***þjált*** fall [1] af tveimur breytistærðum, (x_0, y_0) er punktur í planinu þ.a. $F(x_0, y_0) = 0$ og

$$\frac{d}{dy}F(x_0, y)\Big|_{y=y_0} \neq 0,$$

þá er til eitthvert opið bil $]a, b[$, $a < x_0 < b$, og nákvæmlega eitt deildanlegt fall $y :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, þ.a. $F(x, y(x)) = 0$ fyrir öll $x \in]a, b[$. Sem sagt er fallið $y(x)$ fólgið í jöfnunni $F(x, y) = 0$.

Maður þarf að gæta sín vel þegar maður notar þessa aðferð, sem kölluð er **fólgin deildun** (*e. implicit differentiation*), til þess að finna afleiðu fólgins falls.

(1) Er punkturinn (x_0, y_0) á ferlinum, þ.e. gildir $F(x_0, y_0) = 0$.
(2) Ákvarðast $y'(x_0)$ ótvírætt af jöfnunni sem kemur út.

■ **Dæmi 4.11** Skoðum aftur $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

a) Hver er hallatala snertils ferilsins í $(1, 1)$?

■ **Lausn** Punkturinn $(1, 1)$ er ekki á ferlinum og ferillinn hefur því engan snertil í þessum punkti.

b) En hver er hallatala snertils ferilsins í $(5, 0)$?

■ **Lausn** Punkturinn $(5, 0)$ er vissulega á ferlinum, en $y'(5)$ ákvarðast ekki af jöfnunni $2 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot y'(5) = 0$ því hún hefur enga lausn. Ath. þetta þýðir auðvitað ekki að ferillinn hafi ekki snertil í þessum punkti, hann er bara ekki hægt að ákvarða með fólginni deildun. Hver er jafna snertilsins í þessum punkti?

■

■ **Dæmi 4.12** Lítum á jöfnuna $y \cdot \sin x = x^3 + \cos y$.

a) Hver er hallatala snertils ferilsins í $(-1, 0)$?

■ **Lausn** Fyrst, með $F(x, y) = y \cdot \sin x - x^3 - \cos y$ gildir $F(-1, 0) = 0$ svo punkturinn er a.m.k. á ferlinum. Notum fólgna deildun og fáum jöfnuna

$$y'(x) \sin x + y(x) \cdot \cos x = 3x^2 - \sin(y(x)) \cdot y'(x).$$

Stingum $x = -1$ og $y(-1) = 0$ inní og fáum

$$y'(-1) \sin(-1) + 0 \cdot \cos(-1) = 3 - \sin(0) \cdot y'(-1)$$

[1] Þjált fall er fall sem hefur samfellda fyrstu afleiðu yfir eitthvert mengi

sem hefur lausnina

$$y'(-1) = \frac{-3}{\sin(1)}$$

b) Hver er hallatala snertils ferilsins í $(0, \pi/2)$?

■ **Lausn** Við höfum að $F(0, \pi/2) = 0$ svo punkturinn er á ferlinum. Fólgin deildun gefur sömu jöfnu og hér fyrir ofan, stingum nú $x = 0$ og $y(0) = \pi/2$ inní og fáum

$$y'(0)\sin(0) + \frac{\pi}{2} \cdot \cos(0) = 3 \cdot 0 - \sin(\pi/2) \cdot y'(0),$$

sem hefur lausnina

$$y'(0) = \frac{-\pi}{2}.$$

c) Skoðum nú hallatölu snertilsins í $(1, 2)$.

■ **Lausn** Við getum sett $x = 1$ og $y(1) = 2$ inn eins og áður og fengið

$$y'(1)\sin(1) + 2 \cdot \cos(1) = 3 \cdot 1^2 - \sin(2) \cdot y'(1),$$

sem hefur lausnina

$$y'(1) = \frac{3 - \cos(1)}{\sin(1) + \sin(2)}$$

En $F(x, y)$ hefur reyndar hvergi snertil með þessa hallatölu. Hvað er að?

■

Æfingar 4.6

Æfing 4.6.1 Skoðum ferilinn $x^2 + 2x = 2 - y^2$. Finnið snertla við ferilinn í punktunum $(0, \sqrt{2})$, $(-1, \sqrt{3})$ og $(2, 2)$. Teiknið einnig skýringarmynd. ■

Æfing 4.6.2 Skoðum ferilinn $2x + y = \sqrt{2}\sin(xy) + \pi/2$. Finnið snertil við ferilinn í punktinum $(\pi/4, 1)$ og í punktinum $(0, \pi/2)$. Teiknið mynd af ferlinum með snertlum. ■

Æfing 4.6.3

(i) Notið fólgna deildun til að leiða út formúlu fyrir afleiðu fallsins $y = x^x$. Ath. $y = x^x \Leftrightarrow \ln(y) = x\ln(x)$ ef $x > 0$.

(ii) Finnið jöfnu beinnar línu sem fer í gegnum punktinn $(0, 0)$ og sem er einnig snertill við feril fallsins $y = x^x$.

■

4.7 Stofnföll

Skilgreining 4.7.1 Ef f er fall sem er skilgreint á opnu bili I, þá kallast fallið F stofnfall f ef það er deildanlegt á I og

$$F'(x) = f(x) \quad \text{fyrir öll } \; x \in I.$$

■ **Dæmi 4.13** Stofnfall $f(x) = \cos x$ er t.d. $F(x) = \sin x + 8$, stofnfall $f(x) = \sin x$ er t.d. $F(x) = -\cos x - 1$ og stofnfall $f(x) = x$ er t.d. $F(x) = x^2/2$. ■

Ef F og G eru bæði stofnföll f, þá er $F - G = C$ fasti því að

$$(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Þetta gildir þó aðeins ef f er skilgreint á heilu opnu bili I.

Skilgreining 4.7.2 Óákveðna heildi falls f á einhverju bili I er skilgreint sem

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

þar sem $F'(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in I$, þ.e. F er stofnfall f. Maður lítur svo á að fastinn C sé **óákvarðaður**.

■ **Dæmi 4.14**

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad \text{og} \quad \int x \, dx = x^2/2 + C.$$

■

Óákvarðaða heildi falls er dæmi um **deildajöfnu** (diffurjöfnu, afleiðujöfnu *e. differential equation*). Verkefnið: *Reiknið $\int f(x)dx$, þar sem f er fall skilgreint á einhverju bili I* er jafngilt verkefninu: *Finnið öll föll $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sem uppfylla $g'(x) = f(x)$.* Seinna verkefnið er yfirleitt orðað *leysið deildajöfnuna* $y' = f(x)$ og ætlast er til að maður finni öll föll $y(x)$ sem uppfylla $y'(x) = f(x)$.

■ **Dæmi 4.15** Leysið deildajöfnuna $y' = x^3 + 2$.

■ **Lausn** Við heildum þá fallið og fáum lausnina

$$y(x) = \int (x^3 + 2)dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x + C.$$

þar sem C má vera hvaða fasti sem er. Svona lausn er kölluð almenna lausn deildajöfnunnar (*e. general solution*)

■

Æfingar 4.7

Æfing 4.7.1 Reiknið eftirfarandi óákveðnu heildi:

(i)
$$\int \sqrt{x}\,dx$$

(ii)
$$\int \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^{-2}}{2}\right)dx$$

(iii)
$$\int \tan x \cos x\,dx$$

(iv)
$$\int \cos(2x+2)\,dx$$

■

Æfing 4.7.2 Leysið eftirfarandi deildarjöfnur:

(i)
$$y' + \sin(2x) = 0, \quad y(0) = 1.$$

(ii)
$$y'' + x\sin(2x) + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0.$$

■

4.8 Upphafsgildisverkefni

Við skoðum nú deildajöfnur á forminu $y'(x) = f(x)$ þar sem lausnin fæst með að heilda báðar hliðar. Þ.e. lausnin er

$$y = F(x) + C.$$

þar sem $F(x)$ er eitthvað stofnfall $f(x)$ og C er heildunarfastinn. Svona lausn er kölluð **almenna lausn deildajöfnunnar** (*e. general solution*).

Upphafsgildissverkefni = UGV (*e. initial-value problem* = *IVP*) er deildajafna $y' = f(x)$ ásamt skilyrði af gerðinni $y(a) = b$. Seinna skilyrðið ákvarðar þá óákvarðaða fastann C í almennu lausn deildajöfnunnar.

■ **Dæmi 4.16** Leysum upphafsgildisverkefnið $y' = x^3 + 2, \quad y(2) = 1.$

■ **Lausn** Almenna lausn deildajöfnunnar er $y(x) = x^4/4 + 2x + C$, þar sem C má vera hvaða fasti sem er og skilyrðið

$$y(2) = 2^4/4 + 2\cdot 2 + C = 1$$

ákvarðar $C = -7$. Lausn upphafsgildisverkefnisins er því $y(x) = x^4/4 + 2x - 7$.

■

Lausn upphafsgildisverkefnis $y' = f(x)$, $y(a) = b$, er skilgreind á stærsta bili $I \subset \mathbb{R}$, þ.a. $a \in I$ og $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uppfyllir $y'(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in I$. Ætlast er til að maður tiltaki formengi lausnarinnar y.

■ **Dæmi 4.17** Leysið upphafsgildisverkefnið $y' = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = -1.$

■ **Lausn** Almenna lausn deildajöfnunnar er

$$y(x) = \frac{-1}{x} + C.$$

Skilyrðið $y(1) = -1/1 + C = -1$ ákvarðar $C = 0$. Lausn UGV er því

$$y(x) = \frac{-1}{x}, \quad \mathbf{Dom}(y) =]0, +\infty[.$$

■

■ **Dæmi 4.18** Leysið upphafsgildisverkefnið $y' = \frac{1}{x^2}, \quad y(-1) = -1.$

■ **Lausn** Almenna lausn deildajöfnunnar er

$$y(x) = \frac{-1}{x} + C.$$

Skilyrðið $y(-1) = -1/-1 + C = -1$ ákvarðar $C = -2$. Lausn UGV er því

$$y(x) = \frac{-1}{x} - 2, \quad \mathbf{Dom}(y) =]-\infty, 0[.$$

■

Oft er líka hægt að leysa upphafgildisverkefni þar sem hærri afleiður af y koma fyrir.

■ **Dæmi 4.19** Leysum upphafsgildisverkefnið

$$y'' = \sin x, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = -1.$$

Nú er

$$y'(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$$

og þá

$$y(x) = \int (-\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2$$

svo almenna lausn deildajöfnunnar er

$$y(x) = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Skoðum nú upphafsskilyrðin

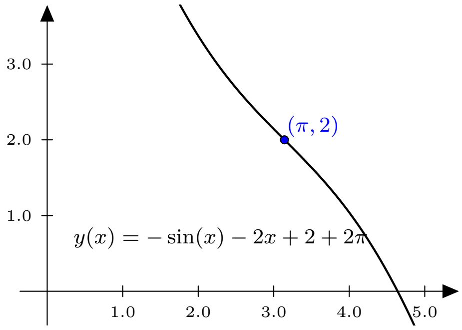
$$y'(\pi) = -1 \Rightarrow -\cos(\pi) + C_1 = -1 \Rightarrow C_1 = -2$$

og

$$y(\pi) = 2 \Rightarrow -\sin(\pi) - 2\pi + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2 + 2\pi$$

Lausn upphafsgildisverkefnisins er því

$$y(x) = -\sin x - 2x + 2 + 2\pi, \quad \mathbf{Dom}(y) = \mathbb{R}$$



■

Meðalhraði, hraði, ferð og hröðun

Gerum ráð fyrir að hlutur ferðist eftir beinni línu (með $x-$ásnum) þannig að staða hans eða **staðsetning** (*e. position*) x er fall af tíma t, og við skrifum þá oft $x = x(t)$. Við getum hugsað okkur að x sé mælt í metrum og t í sekúndum. **Meðalhraði** (*e. average velocity*) hlutar á tímabili $[t, t+h]$ er breyting á staðsetningu hlutarins yfir tímabilið h; og formúla fyrir meðalhraða er Newtons-kvótinn

$$v_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \text{ m/s} \tag{4.7}$$

Hraði (*e. velocity*) $v(t)$ hlutarins á tíma t er síðan markgildi meðalhraðans þegar $h \to 0$.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) \text{ m/s} \tag{4.8}$$

Nokkur túlkunaratriði: Ef $v(t) > 0$ þá er $x(t)$ vaxandi og við lítum svo á að hluturinn ferðist til hægri eftir $x-$ásnum. Ef $v(t) < 0$ þá er $x(t)$ minnkandi og við lítum svo á að hluturinn ferðist til vinstri eftir $x-$ásnum. Þegar $v(t) = 0$, þá lítum við svo á að hluturinn hafi stöðvast; fari hvorki til hægri né vinstri. Við gerum svo greinarmun á hraða og **ferð** $s(t)$ sem við köllum líka **stærð hraðans**. Þá höfum við ekki upplýsingar um í hvaða átt hluturinn ferðast heldur aðeins hvað hann fer hratt:

$$s(t) = |v(t)| = \left|\frac{d}{dt}x(t)\right| \text{ m/s.} \tag{4.9}$$

Hröðun $a(t)$ er síðan afleiða hraða hlutarins og þar með önnur afleiða staðsetningar hans.

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \text{ m/s}^2 \tag{4.10}$$

Ef $a(t) > 0$ þá er hraðinn að aukast (í jákvæða stefnu), en það þýðir ekki endilega að ferðin $s(t)$ sé að aukast. Ef t.d. hluturinn fer til vinstri þá er $v(t) < 0$ en ef einnig hröðunin í stefnu jákvæðs $x-$áss er jákvæð, þ.e. $a(t) > 0$, þá er hluturinn að hægja ferðina. Hlutur eykur ferðina (e. speeding up) aðeins þegar hraði og hröðun hafa sama formerki, þ.e. þegar $v(t) \cdot a(t) > 0$.

■ **Dæmi 4.20** Hlutur í frjálsu falli. Annað lögmál Newtons segir $F = ma$, þar sem F er krafturinn sem verkar á hlutinn, m er massi hlutarins og $a = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$ er hröðun hans. Í góðri nálgun er krafturinn sem verkar á hlutinn $F = mg$, þar sem g er fasti (hnitakerfi með jörðina í jákvæðri stefnu x ássins. Með heildun fæst

$$x'(t) = \int x''(t)dt = \int g dt = gt + C_1$$

og

$$x(t) = \int (gt + C_1)dt = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2.$$

Ef hraðinn við $t = 0$ er $x'(0) = v_0$ og staðsetningin við $t = 0$ er $x(0) = x_0$, þá er $C_1 = v_0$ og $C_2 = x_0$. Svo staðsetning hlutar í frjálsu falli sem fall af tíma er gefin með

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0.$$

■

Æfingar 4.8

Æfing 4.8.1 Leysið upphafsgildisverkefnið $y' = \frac{1}{x^3}, \quad y(-1) = 1.$ ■

Æfing 4.8.2 Sýnið að fallið $y(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$ uppfyllir deildajöfnuna

$$y''(t) + 9y(t) = 0.$$

Einnig er gefið að $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$. Finnið fastana A og B. ■

Æfing 4.8.3 Ögn ferðast eftir $x-$ásnum þannig að staða hennar x á tíma t ákvarðast af fallinu $x(t) = t^2 - 4t + 3$. Leysið úr eftirfarandi liðum:

(a) Á hvaða tímabili ögnin ferðast til hægri?
(b) Á hvaða tímabili ögnin ferðast til vinstri?
(c) Á hvaða tímabilum fær ögnin jákvæða hröðun (hröðun til hægri)
(d) Á hvaða tímabilum fær ögnin neikvæða hröðun (hröðun til vinstri)
(e) Á hvaða tímabili eykst ferðin (*e. speeding up*)
(f) Á hvaða tímabili dregur úr ferðinni (*e. slowing down*)
(g) Hvenær er hröðunin núll ?
(h) Finnið meðalhraða yfir tímabilið $[0, 4]$.

(Lausn: Dæmi 4.41) ■

4.9 Lausnir á völdum dæmum

Snertilínur við gröf gefinna falla

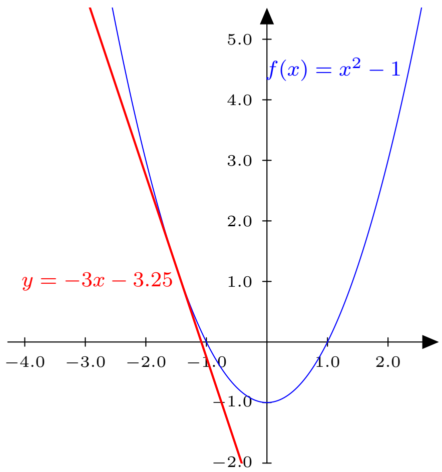
■ **Dæmi 4.21** Finnið hallatölu ferils $f(x) = x^2 - 1$ í punktinum $x = x_0$. Hver er jafna snertilínu við $f(x) = x^2 - 1$ sem hefur hallatölu $x = -3$?

■ **Lausn** Afleiða fallsins $f(x)$ er $f'(x) = 2x$, og afleiðan í punktinum x_0 er þá $m := 2x_0$. Jafna snertilínu í punktinum x_0 er þá

$$y = m(x - x_0) + f(x_0).$$

Ef hallatala snertilínu er $2x_0 = -3$ þá er $x_0 = -\frac{3}{2}$ og $f(x_0) = f(-\dfrac{3}{2}) = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{9}{4} - 1 = \dfrac{5}{4}$. Jafna snertilínu við $f(x) = x^2 - 1$ er þá

$$y = -3\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{4} = -3x - \frac{13}{4}.$$



■

■ **Dæmi 4.22** Finnið alla punkta á ferli fallsins $f(x) = x^3 - x + 1$ þar sem snertilínan er samsíða línunni $y = 2x + 5$.

■ **Lausn** Afleiða f er fallið $f'(x) = 3x^2 - 1$. Snertilínur eru samíða línunni $y = 2x + 5$ í öllum punktum x þannig að $3x^2 - 1 = 2$. Þá er $x = 1$ eða $x = -1$. Fallgildi í þessum punktum eru $f(1) = 1$ og $f(-1) = 1$.
Snertilínurnar eru

$$y_1 = 2(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1, \qquad \text{og}$$
$$y_1 = 2(x+1) + f(-1) = 2(x+1) + 1 = 2x + 3.$$

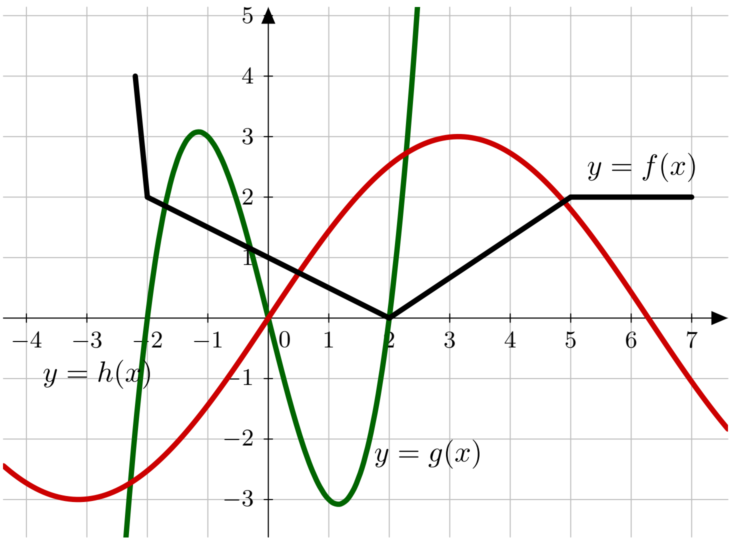
■ **Keyrsluskrá 9**

```
a =-2, b=2;
x = linspace(a,b,200);
m = 2;  % Hallatalan 2
 x0 = 1; x1 = -1;       % Punktar sem gefa hallatölu 2
y0 = x0.^3-x0 +1; y1 = x1.^3-x1+1; % Fallgildi
lina0 = m*(x-x0) + y0; % Snertilína
lina1 = m*(x-x1) + y1; % Snertilína
f = x.^3-x+1;          % Margliðan
figure
plot([-2.5 2.5], [0 0], 'k-', [0 0], [-3 4], 'k-') % Línur með hnitaásum
hold on
plot(x,lina0,'r',x,lina1,'r', x,f)
```

■

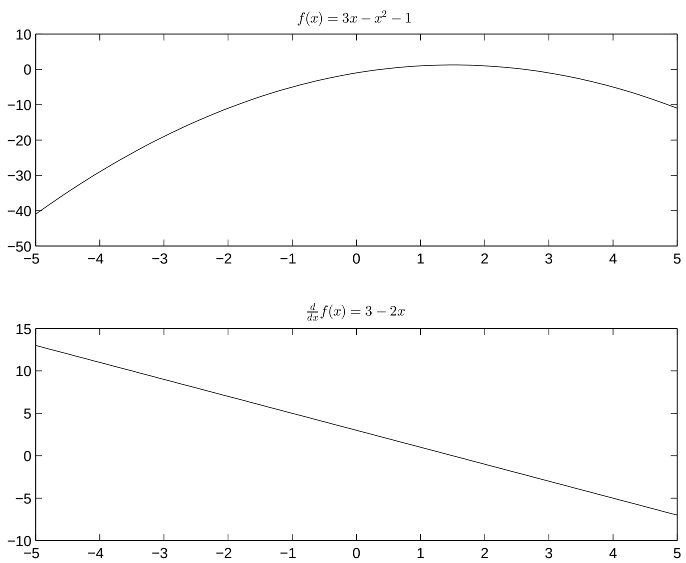
■ **Dæmi 4.23** Á myndinni sjást þrjú samfelld föll f,g og h og gefið að formengi þeirra allra er $[-5,8]$. Gefið er að föllin g og h eru deildanleg. Það þýðir að g og h eru deildanleg í öllum innri punktum á $[-5,8]$, þ.e. deildanleg á opna bilinu $]-5,8[$. Fallið

f er ekki deildanlegt samkvæmt skilgreiningu, af því að það er *ekki* deildanlegt *í öllum innri punktum* á formengi sínu. Nánar tiltekið sjáum við á myndinni að ekki er hægt að skilgreina afleiðu f í punktunum $x = -2, x = 2$ og $x = 5$. Látum nægja að skoða hallatölur nálægt $x = 5$: Látum t vera litla jákvæða stærð, segjum, $0 < t < {}^1\!/_{10}$, og með því að setja $x = 5 + t$ þá sést að $f'(x) = 0$; hins vegar ef við setjum $x = 5 - t$ þá er $4 < x < 5$ svo að myndin gefur til kynna að $f'(x) = \frac{2}{3}$. Þá fáum við annars vegar $\lim_{\tau \to 0} f'(5 + |\tau|) = 0$ og hins vegar $\lim_{\tau \to 0} f'(5 - |\tau|) = \frac{2}{3}$. Markgildi frá hægri ekki sama tala og markgildið frá vinstri en það þýðir samkvæmt skilgreiningu að markgildið $f'(5)$ er ekki til, m.ö.o. f er ekki deildanlegt í $x = 5$, sem þýðir að fallið er ekki deildanlegt (á þessu gefna formengi).



■

■ **Dæmi 4.24** Deildið fallið $f(x) = 3x - x^2 - 1$ og teiknið upp mynd af fallinu ásamt afleiðu þess. Takið eftir venslum á milli fallsins f og afleiðunnar f'. Hvaða eiginleika fallsins f sérðu út frá grafi afleiðunnar f'



Mynd 4.2

■ **Lausn** Veljum af handahófi bilið $[-5, 5]$ til að skoða venslin. Við sjáum að hallatala fallsins f er jákvæð á bilinu $[-5, 3/2[$ en hallatalan fer minnkandi á því bili. Hallatala fallsins er núll í $x = 3/2$ en fer síðan minnkandi á bilinu $]3/2, 5]$. Þetta sést á Mynd 4.2 af afleiðunni f': Ferillinn er fyrir ofan núll á bilinu $[-5, 3/2[$ en stranglega minnkandi; $f'(3/2) = 0$, og fallrit afleiðunnar er fyrir neðan núll á bilinu $]3/2, 5]$ og hallatalan eykst að tölugildi. Við ályktum að afleiðan f' lýsi hallatölu fallsins f í sérhverjum punkti $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Við sjáum líka að hallatala annars stigs margliðunnar breytist línulega.

■

■ **Dæmi 4.25** Notið reiknivél til þess að finna hallatölu snertilínu við fallið $f(x) = \sqrt{x+6}$ í punktinum $(3, 3)$ og skoðið $x = 3$ og $x = 3 + \Delta x$, fyrir nokkur gildi á Δx, t.d.

$$\Delta x = \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001.$$

Gerið töflu. Reiknið einnig út $\frac{d}{dx} f(x)$ með því að nota skilgreininguna á afleiðu.

■ **Lausn** Nota MATLAB til að gera töfluna

■ **Keyrsluskrá 10**

```
%% Dæmi 31 í kafla 2.2 í Adams
clc
Deltax = [-0.1 -0.01 -0.0001 -0.00001 0.00001 0.0001 0.001 0.01 0.1  ]; % ...
    Smíða Δ x
fdel = sqrt(3+Deltax+6);            % fallgildi í 3 + Δ x             % ...
    fallgildi í 3
mismkvoti = (fdel - 3)./Deltax;
disp('  3 + Δ x     |    (f(3 + Δ x) - f(3))/Δ x ')
fprintf('--------------------------------------------------- ')
for k = 1:length(Deltax)
fprintf('\n  %2.8f     |   %2.8f     ', 3+Deltax(k), mismkvoti(k))
```

```
  3 + delta x    |    (f(3 + delta x) - f(3))/delta x
-----------------------------------------------------
  2.90000000     |    0.16713222
  2.99000000     |    0.16671299
  2.99990000     |    0.16666713
  2.99999000     |    0.16666671
  3.00001000     |    0.16666662
  3.00010000     |    0.16666620
  3.00100000     |    0.16666204
  3.01000000     |    0.16662040
  3.10000000     |    0.16620626

>>
```

Reiknum núna afleiðu $f(x) = \sqrt{x+6}$ út frá skilgreiningu á afleiðu:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+6}-\sqrt{x+6}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+6}-\sqrt{x+6}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+6}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+h+6}+\sqrt{x+6}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+6})^2-(\sqrt{x+6})^2}{h(\sqrt{x+h+6}+\sqrt{x+6})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+6-x-6}{h(\sqrt{x+h+6}+\sqrt{x+6})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+6}+\sqrt{x+6})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+6}+\sqrt{x+6}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+6}}
\end{aligned}$$

Svo að $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}$ og þá $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3+6}} = \dfrac{1}{6} = 0.1666\ldots$ ■

■ **Dæmi 4.26** Reiknið afleiður fallanna. Einfaldið eins og skynsamlegt er.

1. $y = 3x^2 - 5x - 7$
2. $z = \dfrac{x-1}{x^{2/3}}$
3. $f(x) = \dfrac{3-4x}{3+4x}$

■ **Lausn**

1. $y' = 6x - 5$
2.

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{1\cdot x^{2/3}-(x-1)\frac{2}{3}x^{2/3-1}}{\left(x^{2/3}\right)^2} = \frac{x^{2/3}-\frac{2}{3}x^{2/3}+\frac{2}{3}x^{-1/3}}{x^{4/3}} \\
&= \frac{\frac{1}{3}x^{2/3}+\frac{2}{3}x^{-1/3}}{x^{4/3}} = \frac{1}{3}x^{2/3-4/3}+\frac{2}{3}x^{-1/3-4/3} \\
&= \frac{1}{3}x^{-2/3}+\frac{2}{3}x^{-5/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}+\frac{2}{3x^{5/3}}
\end{aligned}$$

Einnig má lengja fyrri liðinn í síðustu stæðunni með x og fá $z' = \dfrac{x+2}{3x^{5/3}}$.

3.

$$f'(x) = \frac{-4(3+4x)-(3-4x)\cdot 4}{(3+4x)^2} = \frac{-12-16x-12+16x}{(3+4x)^2} = \frac{-24}{(3+4x)^2}$$

Sannprófa útreikninga

■ **Keyrsluskrá 11**

```
clc
syms x
Y = 3*x^2-5*x-7;   Z = (x-1)/x^(2/3);   F = (3-4*x)/(3+4*x);
diffY = simplify(diff(Y)) % eða diff(Y,x)
diffZ = simplify(diff(Z))
diffF = simplify(diff(F))
%% Dæmi 2.4:  36
```

Skrifar út

```
diffY =
6*x - 5
diffZ =
(x + 2)/(3*x^(5/3))
diffF =
-24/(4*x + 3)^2
>>
```

■

■ **Dæmi 4.27** Finnið afleiður fallanna

1. $y = (2x+3)^6$
2. $y = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{99}$

Fyrst smá spjall: Föll á forminu $[f(x)]^n$ skrifum við oft á forminu $f^n(x)$ til að hafa viðaminna táknmál, sér í lagi ef $n \neq -1$. Höfum í huga, að **andhverfa** f er oft táknuð með f^{-1}. Til dæmis er oft skrifað $\sin^{-1}$ þegar átt er við andhverfu sínuss; arkarfallið $\arcsin$. Betra væri að skrifa andhverfur á forminu $f^{[-1]}(x)$ þó að það sé sjaldnast gert. Þess vegna skrifum við oft umhverfur falla sem $\frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}$. En oft sést rithátturinn f^{-1} þegar átt er við umhverfu fallsins f. Því þarf að gæta að samhengi hvort átt er við umhverfu eða andhverfu þegar maður sér $f^{-1}(x)$. Hins vegar leikur enginn vafi á því að $f^{-2}(x)$ þýðir $\dfrac{1}{[f(x)]^2}$.

■ **Lausn** Hér eru föllin á þessu formi $y = f^n(x)$. Samkvæmt Keðjureglu er $y' = nf^{n-1}(x)f'(x)$

1.
$$y' = 6(2x+3)^5 \cdot (2x+3)' = 6(2x+3)^5 \cdot 2 = 12(2x+3)^5.$$

2.
$$y' = 99\left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 99\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{99}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Einnig mætti gera samnefnt í síðustu stæðunni og gefa afleiðuna á forminu

$$y' = \frac{99}{x^3}(x-1).$$

Ath.: Afleiðu falla á forminu $y = \frac{1}{f(x)}$ er hægt að finna á a.m.k. tvo vegu; annars vegar skrifa $y = f(x)^{-1}$ og nota **grunnregluna**, $y' = -1 \cdot f^{-2}(x)f'(x)$, hinsvegar mætti nota **umhverfureglu** (e. reciprocal rule) beint $y' = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$

■

■ **Dæmi 4.28** Finnið jöfnu snertilínu við feril fallsins $y = \sqrt{1+2x^2}$ í punktinum $x = 2$.

■ **Lausn** Afleiða y er fallið $y' = \dfrac{(1+2x^2)'}{2\sqrt{1+2x^2}} = \dfrac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}} = \dfrac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}$ svo að afleiða y í $x=2$ er

$$y'(2) = \left.\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}}\right|_{x=2} = \frac{2\cdot 2}{\sqrt{1+2\cdot 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}.$$

Fallgildi í $x=2$ er $y(2) = \sqrt{1+2\cdot 2^2} = 3$. Snertilínan er

$$L(x) = \frac{4}{3}(x-2)+3 = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$$

■

■ **Dæmi 4.29** Finnið afleiður fallanna

1. $f(x) = \tan \pi x$
2. $f(t) = t\sin t - \sin t$

■ **Lausn**

1. $f(x) = \tan \pi x = \dfrac{\sin \pi x}{\cos \pi x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin \pi x)'\cos \pi x - (\cos \pi x)'\sin \pi x)}{\cos^2 \pi x} \\ &= \frac{\pi\cos \pi x\cdot \cos \pi x - (-\pi \sin \pi x)\sin \pi x}{\cos^2 \pi x} \\ &= \pi\frac{\cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x}{\cos^2 \pi x} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{\cos^2 \pi x}, & \text{eða} \\ \pi(1+\tan^2 \pi x). \end{cases} \end{aligned}$$

2. $f'(t) = (t)'\sin t + t(\sin t)' - (\sin t)' = \sin t + t\cos t - \cos t$.

■

Hærri afleiður falla

■ **Dæmi 4.30** Finnið y', y'', og y'''

1. $y = (3-2x)^7$
2. $y = x^2 - \frac{1}{x}$

■ **Lausn** 1.

$$\begin{aligned} y' &= 7(3-2x)^6\cdot(3-2x)' = 7(3-2x)^6(-2) = -14(3-2x)^6 \\ y'' &= (y')' = (-14(3-2x)^6)' = -14\cdot 6(3-2x)^5(3-2x)' = -84(3-2x)^5(-2) \\ &= -168(3-2x)^5 \\ y''' &= (y'')' = -128\cdot 5(3-2x)^4(3-2x)' = -624(3-2x)^4(-2) = 1680(3-2x)^4. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} y' &= 2x + \frac{1}{x^2} \\ y'' &= \left(2x+\frac{1}{x^2}\right)' = 2 + \frac{-2x}{x^4} = 2 - \frac{2}{x^3} \\ y''' &= \left(2-\frac{2}{x^3}\right)' = 0 - \frac{-2\cdot 3\cdot x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

Sannprófa útreikninga

■ **Keyrsluskrá 12**

```
syms x
Y = (3-2*x)^7;  Z = x^2-1/x;
DY = simplify(diff(Y,x)) % eða diff(Y,x)
D2Y = diff(DY,x)
D3Y = diff(D2Y,x)
DZ = simplify(diff(Z,x))
D2Z = simplify(diff(DZ,x))
D3Z = simplify(diff(D2Z,x))
```

MATLAB skrifar út

```
DZ =
2*x + 1/x^2
D2Y =
-168*(2*x - 3)^5
D3Y =
-1680*(2*x - 3)^4
DY =
-14*(2*x - 3)^6
D2Y =
-168*(2*x - 3)^5
D3Y =
-1680*(2*x - 3)^4
DZ =
2*x + 1/x^2
D2Z =
2 - 2/x^3
D3Z =
6/x^4
>>
```

■

■ **Dæmi 4.31** Giskið á formúlu fyrir $n-$tu afleiðuna $f^{(n)}(x), n = 1, 2, 3, \ldots,$ fyrir fallið $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &:= f(x) = \frac{1}{x}\\
f^{(1)}(x) &= \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1\frac{1!}{x^{1+1}}\\
f^{(2)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(1)}(x) = -1\cdot(-1)\frac{1\cdot 2}{x^3} = (-1)^2\frac{2!}{x^{2+1}}\\
f^{(3)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(2)}(x) = -1\cdot(-1)\cdot(-1)\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4} = (-1)^3\frac{3!}{x^{3+1}}\\
f^{(4)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(3)}(x) = -1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5} = (-1)^4\frac{4!}{x^{4+1}}.
\end{aligned}
$$

Giskum á að almenn formúla fyrir $n-$tu afleiðu sé

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \tag{4.11}$$

en hún er rétt fyrir $n = 1, 2, 3, 4$, og meira að segja líka fyrir $n = 0$, af því að $0! = 1$ og $(-1)^0 = 1$. Í staðinn fyrir að reikna fimmtu afleiðu eins og þær fyrstu fjórar þá fæst almennar ef við setjum n í staðinn fyrir 4 og deildum til að fá $(n+1)$-afleiðu (fimmtu afleiðu):

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx}(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \\ &= -1 \cdot (-1)^n \frac{n!(n+1)}{x^{n+1+1}} \qquad \text{þar sem } n!(n+1) = (n+1)! \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{(n+1)+1}}. \end{aligned}$$

og ef við setjum $N = n + 1$ sést

$$f^{(N)}(x) = (-1)^N \frac{N!}{x^{N+1}}$$

sem er greinilega sama formúlan og (4.11). Þetta þýðir þá að $f^{(n+1)}(x)$ er rétt formúla hvenær sem $f^{(n)}(x)$ gildir fyrir eitthvert n. Þar sem formúlan gildir fyrir $n = 0, 1, 2, 3, 4$, þá vitum við að formúlan gildir fyrir $n + 1 = 5$. Setjum þá $n = 5$ en þá gildir formúlan líka fyrir $n + 1 = 6$. Setjum þá $n = 6$, þá gildir formúlan gildir fyrir $n + 1 = 7$. Svona er hægt að halda áfram fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Nú má setja niðurstöðuna fram sem reglu:

$n-$ta afleiða $f(x) = \dfrac{1}{x}$ er gefin með formúlunni

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

■ **Dæmi 4.32** Reiknið út nógu margar afleiður fallsins $f(x) = \dfrac{1}{a+bx}$ til þess að hægt sé að giska á formúlu fyrir $n-$tu afleiðuna $f^{(n)}(x)$. Sannreynið síðan ágiskunina með því að skoða $f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x)$.

■ **Lausn** Setjum $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{a+bx}$ og deildum svo

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(0)}(x) = \cdot \frac{(-1) \cdot b}{(a+bx)^2} = (-1)^1 \cdot \frac{1!b^1}{(a+bx)^{1+1}} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(1)}(x) = \cdot \frac{(-1) \cdot (-2)b^2}{(a+bx)^3} = (-1)^2 \cdot \frac{2!b^2}{(a+bx)^{2+1}} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(2)}(x) = \cdot \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)b^3}{(a+bx)^4} = (-1)^3 \cdot \frac{3!b^3}{(a+bx)^{3+1}} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(3)}(x) = \cdot \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)b^4}{(a+bx)^5} = (-1)^4 \cdot \frac{4!b^4}{(a+bx)^{4+1}} \end{aligned}$$

Formúlan $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \dfrac{n!b^n}{(a+bx)^{n+1}}$ gengur fyrir $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Deilda nú formúl-una, og fæ

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\ &= (-1)^n \cdot (-(n+1)b) \frac{n!b^n}{(a+bx)^{n+1}} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!b^{n+1}}{(a+bx)^{n+1+1}} \end{aligned}$$

Við sjáum þá að ef formúlan $f^{(n)}$ er rétt fyrir eitthvert n, (sem og hún er; hún er rétt fyrir $n = 0, 1, 2, 3, 4$,) þá er hún rétt fyrir $n+1$. Sér í lagi er formúlan rétt fyrir $n = 4$, þá er hún rétt fyrir $n+1 = 5$. Við sjáum þá að formúlan hlýtur að vera rétt fyrir öll $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

ATH Þessi aðferð sem við notuðum hér, og í dæminu á undan, kallast ***þrepun*** (*e. induction*).

(i) Maður sýnir fram á að tiltekin formúla gildir fyrir $n = 0$, eða $n = 1$ eða almennar eitthvert minnsta $n = n_0$ sem við á.
(ii) Þá er hægt að fullyrða að formúlan gildi fyrir eitthvert n - þetta er kallað **þrepunarforsenda**.
(iii) Síðan er sýnt með rökleiðingu þar sem maður *notar þrepunarforsenduna*, að formúlan gildi þá nauðsynlega líka fyrir $n+1$.
(iv) Þá er búið að sýna með rakningu (þrepun) að formúlan gildir fyrir öll $n \geq n_0$.

■

Meðalgildissetningin

■ **Dæmi 4.33** Beitið Meðalgildissetningunni (*e. Mean Value Theorem*) á fallið $f(t) = \cos t + \dfrac{t^2}{2}$ á bilinu $[0, x]$, (Hér er x í hlutverki b í Meðalgildissetningunni; við lítum á $[0, x]$ sem lokað bil með endapunkta 0 og x og $t \in [0, x]$) og notið þá staðreynd að

$$\sin x < x, \quad \forall x > 0, \tag{4.12}$$

til að sanna að $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ fyrir öll $x > 0$. Reyndar er þessi ójafna líka rétt fyrir $x < 0$ (Hvernig ?)

■ **Lausn** Táknið $\forall$ lesist *fyrir öll* og er oft þægilegt til þess að stytta skriftir.

Fallið $f(t) = \cos t + \dfrac{t^2}{2}$ er samfellt á bilinu $[0, x]$, af því að það er summa samfelldra falla. Það er einnig deildanlegt á opna bilinu $]0, x[$ og hefur afleiðu $f'(t) = -\sin t + t$. Forsendum Meðalgildissetningarinnar er því fullnægt: Þá er til tala c_x á milli 0 og x þannig að

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x). \tag{4.13}$$

Nú er $f'(c_x) = -\sin(c_x) + c_x$ og ójafna (4.12) hefur í för með sér að $f'(c_x) > 0$. Nú er $f(0) = \cos 0 - \frac{0^2}{2} = 1$. Setjum þessar upplýsingar inn í jöfnu (4.13), og fáum

$$\frac{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}{x} > 0$$

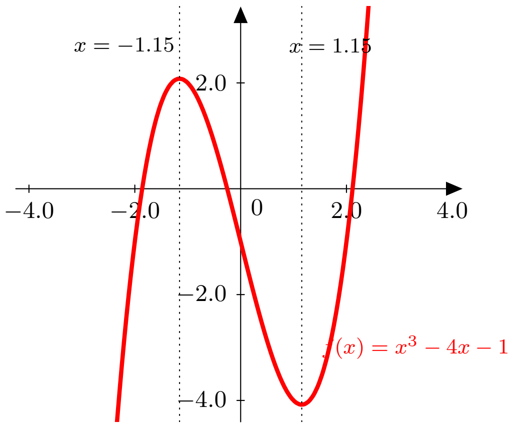
og þar sem $x > 0$ þá getum við margfaldað með x í gegnum síðustu jöfnu og röðunin ($>$) heldur sér. Færum svo liði yfir á hægri hlið og fáum

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \forall x > 0.$$

Ljóst er að ójafnan gildir ekki ef $x = 0$, en fullyrt er að þessi ójafna gildi líka fyrir $x < 0$. *Ábending: Notið að föllin* $\cos t$ *og* $1 - \frac{t^2}{2}$ *eru jafnstæð.*

■

Vaxandi og minnkandi föll



■ **Dæmi 4.34** Finnið hvar (á hvaða bilum) fallið $f(x) = x^3 - 4x + 1$ er vaxandi og hvar minnkandi.

■ **Lausn** Afleiða f er fallið $f'(x) = 3x^2 - 4$. Fallið f er vaxandi á þeim bilum þar sem $f'(x) \geq 0$ og f er minnkandi á þeim bilum þar sem $f'(x) \leq 0$. Við skulum frekar finna bilin þar sem f er stranglega vaxandi $f'(x) > 0$ og stranglega minnkandi $f'(x) < 0$, það er þá ekkert mál að loka bilunum í lokin. Þáttum $3x^2 - 4$ og fáum $3\left(x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Núllstöðvarnar $x_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ og $x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ákvarða bilin þrjú sem þarf að rannsaka; $x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\quad -\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ og $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$:

1. Ef $x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$ þá er $\operatorname{sgn}(x - \frac{2}{\sqrt{3}}) \cdot \operatorname{sgn}(x + \frac{2}{\sqrt{3}}) = (-1)(-1) = +1$.
2. Ef $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ þá er $\operatorname{sgn}(x - \frac{2}{\sqrt{3}}) \cdot \operatorname{sgn}(x + \frac{2}{\sqrt{3}}) = (+1)(-1) = -1$.
3. Ef $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$ þá er $\operatorname{sgn}(x - \frac{2}{\sqrt{3}}) \cdot \operatorname{sgn}(x + \frac{2}{\sqrt{3}}) = (+1)(+1) = +1$.

Þá sjáum við að fallið f er stranglega vaxandi á hálflínunni $x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$, stranglega minnkandi á bilinu $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ og stranglega vaxandi á hálflínunni $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$. Þá getum við eins svarað því hvar fallið er vaxandi og minnkandi:
<u>Vaxandi ef</u> $x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$ <u>eða</u> $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$ og <u>minnkandi ef</u> $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

■

Fólgin deildun

■ **Dæmi 4.35** Finnið $\frac{dy}{dx}$ sem fall af x og y, þar sem $xy - x + 2y = 1$.

■ **Lausn** Deildum fólgið:

$$1 \cdot y + x\frac{dy}{dx} - 1 + 2\frac{dy}{dx} = 0,$$

Tökum saman liði með $\frac{dy}{dx}$ og þáttum, færum svo aðra liði á hægri hlið; fáum

$$\frac{dy}{dx}(x+2) = 1-y$$

Ef $x=-2$ þá fáum við enga hallatölu; aðeins að $y=1$, en ef $x \neq -2$ þá fæst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{2+x}.$$

■

■ **Dæmi 4.36** Finnið jöfnu snertils við feril jöfnunnar $2x^2+3y^2=5$ í punktinum $(1,1)$.

■ **Lausn**

1. Athugum fyrst hvort $(1,1)$ liggi í ferlinum: $2\cdot 1^2+3\cdot 1^2 = 2+3 = 5$. Já, punkturinn $(1,1)$ uppfyllir jöfnuna, svo að hann er á ferlinum.
2. Deildum fólgið: $4x+6y(x)\cdot y'(x)=0$.
3. Setjum punktinn inn: $4+6y'(1)=0 \Rightarrow y'(1)=-\frac{2}{3}$ er hallatala snertilínu í $(1,1)$.
4. Jafna snertilínunnar er $L(x)=1-\frac{2}{3}(x-1)$.

■

■ **Dæmi 4.37** Finnið jöfnu snertilínu við feril jöfnunnar $x\sin(xy-y^2)=x^2-1$ í punktinum $(1,1)$.

■ **Lausn**

1. Athugum fyrst hvort $(1,1)$ liggi í ferlinum:
   Vinstri hlið jöfnunnar, $1\sin(1\cdot 1-1^2)=\sin(0)=0$.
   Hægri hlið jöfnunnar, $1^2-1=0$.
   Jafnan er uppfyllt, svo að $(1,1)$ á ferlinum.
2. Deildum fólgið: $1\cdot\sin(xy-y^2)+x\cos(xy-y^2)(xy-y^2)'=2x$. Hér notuðum við reglu um afleiðu margfeldis og keðjureglu. Setjum $(xy-y^2)'=y+xy'-2yy'$, inn í fyrri jöfnuna og fáum

$$\sin(xy-y^2)+x\cos(xy-y^2)(y+xy'-2yy')=2x$$

3. Setjum punktinn inn: $\sin(0)+\cos(0)(1+y'-2y')=2 \Leftrightarrow 1-y'=2 \Leftrightarrow y'=-1$ er hallatala snertilínu við feril jöfnunnar í $(1,1)$.
4. Jafna snertilínunnar er $L(x)=1-1(x-1)=-x+2$.

■

Stofnföll

■ **Dæmi 4.38** Finnum $\int\cos(2x)\,dx$ með því að giska á að stofnfallið sé af gerðinni $k\sin(2x)+C$ þar sem C er fasti.

■ **Lausn** Ef $k\sin(2x)$ er stofnfall $\cos(2x)$ þá þarf að gilda, að $(k\sin(2x))'=k\cdot 2\cos 2x \overset{!}{=} \cos 2x$. Þá er $k=\frac{1}{2}$, og

$$\int\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2)x+C.$$

■

■ **Dæmi 4.39** Notið að $\cos^2(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}$ til þess að reikna heildið $\int\cos^2(x)\,dx$.

■ **Lausn** Notum niðurstöðuna úr síðasta dæmi og gefnu jöfnuna og fáum

$$
\begin{aligned}
\int \cos^2(x)\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C \\
&= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C
\end{aligned}
$$

■

Afleiðujöfnur, upphafsgildisverkefni

■ **Dæmi 4.40** Finnið lausn $y = y(x)$ á upphafsgildisverkefninu

$$
\begin{cases} y' = x - 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}
$$

Á hvaða bili er lausnin skilgreind ?

■ **Lausn** Almenna lausnin er

$$
y(x) = \int y'(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + C
$$

þar sem C er óákvarðaður fasti. Notum upphafsgildið til að ákvarða C:

$$
y(0) = \frac{0^2}{2} - 2\cdot 0 + C \overset{!}{=} 3
$$

svo að $C = 3$. Þá er lausn upphafsgildisverkefnisins

$$
y(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 3.
$$

Lausnarfallið er annarsstigs margliða, sem er skilgreind fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Lausnin er því skilgreind á $\mathbb{R}$.

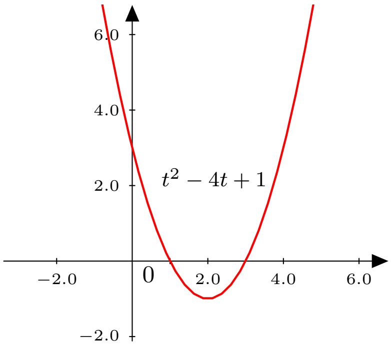
■

Staða, hraði, ferð og hröðun

■ **Dæmi 4.41** Ögn ferðast eftir $x-$ásnum þannig að staða hennar x á tíma t ákvarðast af fallinu $x(t) = t^2 - 4t + 3$. Leysið úr eftirfarandi liðum:

(a) Á hvaða tímabili ögnin ferðast til hægri?
(b) Á hvaða tímabili ögnin ferðast til vinstri?
(c) Á hvaða tímabilum fær ögnin jákvæða hröðun (hröðun til hægri)
(d) Á hvaða tímabilum fær ögnin neikvæða hröðun (hröðun til vinstri)
(e) Á hvaða tímabili eykst ferðin (*e. speeding up*)
(f) Á hvaða tímabili dregur úr ferðinni (*e. slowing down*)
(g) Hvenær er hröðunin núll ?
(h) Finnið meðalhraða yfir tímabilið $[0, 4]$.

Höfum mynd af fallinu til hliðsjónar: Athugið að ögnin ferðast tímaháð eftir $x-$ásnum, þannig að við þurfum að túlka grafið út frá því (látrétti ásinn er tíminn t og lóðrétti ásinn er staðsetningin x)



■ **Lausn**

(a) Höfum $x(t) = t^2 - 4t + 3$. Þegar $v(t) > 0$ þá fer ögnin til hægri. Nú er $v(t) = x'(t) = 2t - 4 > 0$ þegar $t > 2$. Ögnin ferðast því til hægri þegar $t \in]2, +\infty[$

(b) Við sjáum af liðnum á undan að $v(t) < 0$ þegar $t < 2$, það þýðir að ögnin ferðast til vinstri þegar $t \in] - \infty, 2[$.

(c) Hröðun agnarinnar er $a(t) = v'(t) = 2 > 0$, sem þýðir að hröðun er jákvæð fyrir öll t

(d) Skv. (c) lið er hröðun agnarinnar aldrei neikvæð.

(e) Ferð agnarinnar (*e. speed*) er að aukast þegar $v(t) \cdot a(t) > 0$. Þar sem $a(t) > 0$ fyrir öll t og $v(t) > 0$ þegar $t > 2$ þá er hraðinn að aukast þegar $t > 2$.

(f) Ferð agnarinnar fer minnkandi þegar $v(t) \cdot a(t) < 0$. Þar sem $a(t) > 0$ fyrir öll t þá hægir á ögninni þegar $v(t) < 0$, þ.e. þegar $t < 2$.

(g) Meðalhraði á tímabilinu $t \in [0, 4]$ er $\overline{v} = \frac{x(4)-x(0)}{4-0} = \frac{4^2-4\cdot4+1-(0^2-4\cdot0+1)}{4} = 0/4 = 0$

■

5. Torræð föll

Torræðar tölur og torræð föll (*e. transcendental functions*).
Tölur sem eru lausnir á margliðum með ræða stuðla kallast algebraískar tölur (*e. algebraic numbers*). Talan -3 er algeabraísk af því að hún uppfyllir jöfnuna $x+3=0$, og $\sqrt{5}$ er algebraísk tala af því að hún er lausn á jöfnunni $x^2-5=0$. Tölur sem ekki eru algebraískar eru sagðar vera torræðar (*e. transcendental numbers*). Árið 1873 sannaði Charles Hermite að e væri torræð tala og árið 1882 sannaði C.L. Ferdinand Lindemann að π væri torræð tala. Fall $y=f(x)$ er sagt vera algebraískt ef það uppfyllir jöfnu af gerðinni $P_ny^n+\cdots P_1y+P_0=0$ þar sem P_i eru margliður í breytunni x með ræðum stuðlum. Fallið $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ er algebraískt af því að það uppfyllir jöfnuna $(x+1)y^2-1=0$. Hér eru margliðurnar $P_2=x+1, P_1=0$ og $P_0=-1$. Föll sem ekki eru algeabrísk eru kölluð torræð föll (*e. transcendental tunctions*). Sínus og kósínus eru dæmi um torræð föll. Í þessum kafla kynnumst við fleiri mikilvægum torræðum föllum eins og veldisvísisfallinu $\exp$, náttúrulega logranurm $\ln$ og andhverfum hornafallanna svo sem $\arcsin$, $\arccos$ og $\arctan$.

5.1 Gagntæk föll

Látum $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ vera fall þar sem $\mathrm{Dom}(f)=I\subset\mathbb{R}$. Setjum $J\equiv f(I)$. Við höfum áhuga á því hvenær til er fall $g:J\longrightarrow I$ þ.a. $g(f(x))=x$ fyrir öll $x\in I$ og $f(g(y))=y$ fyrir öll $y\in J$. Jafngilt þessu er:

$$f(x)=y \Longleftrightarrow g(y)=x$$

Athugið að varpmengið $f(I)$ er myndmengi fallsins, en þá gildir um fallið $f:I\longrightarrow f(I)$ að það sé **átækt**, og við gerum alltaf ráð fyrir að við vinnum með myndmengi fallanna hér í framhaldinu, en ekki almennt varpmengi. Þetta þýðir í raun ekkert annað en að við vinnum ekki með stærra varpmengi en nauðsynlegt er.

■ **Dæmi 5.1** Við vitum að myndmengi sínuss er $[-1,1]$, en maður skrifar oft almennt að $\sin:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, m.ö.o. sínusfallið er raungilt fall (fallgildið y er rauntala) af einni raunbreytu (x er rauntala). Tökum nú eitthvert fallgildi af handahófi úr varpmenginu $\mathbb{R}$, segjum $y = 7$, en auðvitað er ekki til neitt $x \in \mathbb{R}$, þannig að $\sin(x) = 7$, af því að $y = 7$ ekki í myndmengi sínussins. Þess vegna segjum við að $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sé ekki átækt fall. Hins vegar er fallið

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

átækt fall, af því að ef við veljum einhverja tölu úr myndmenginu t.d. $y = 0.9$, þá er til tala x úr formenginu þannig að $y = \sin(x)$; reyndar eru til óendanlega margar tölur úr formenginu $\mathbb{R}$ þannig að $\sin(x) = 0.9$ af því að $\sin(x) = \sin(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

*Fall $f : A \longrightarrow B$ er sagt vera **gagntækt** (*e. bijective, one-to-one onto*) þá og því aðeins að það sé **eintækt** (e. one-to-one, injective) og **átækt** (e. onto, surjective), þ.e. $f(A) = B$.*

Setjum þetta fram í tveimur jafngildum skilgreiningum:

Skilgreiningar 5.1.1 og 5.1.2 eru jafngildar.

Skilgreining 5.1.1 Fall $f : I \longrightarrow J$, þar sem $J = f(I)$, er sagt vera **gagntækt** þá og því aðeins að, ef af $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, leiðir að $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Skilgreining 5.1.2 Að því gefnu að f sé átækt fall, þá er f **gagntækt** fall, ef

$$\text{af } \; f(x_1) = f(x_2) \text{ leiðir, að } \; x_1 = x_2.$$

ATH Fall $f : I \longrightarrow J$ er gagntækt þá og því aðeins að fyrir sérhvert $y \in J$ hafi jafnan $y = f(x)$ ótvírætt ákvarðaða lausn $x \in I$. Ef til er $y \in J$ þ.a. $y = f(x)$ hafi enga lausn $x \in I$, þá er f ekki átækt fall, og ef jafnan $y = f(x)$ hefur fleiri en eina lausn í I, segjum $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, og $y = f(x_1) = f(x_2)$, þá ef f ekki eintækt fall.

Þetta síðara þýðir fyrir feril fallsins að sérhver lárétt lína sker grafið í mesta lagi einu sinni.

■ **Dæmi 5.2** Gefið er fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ og $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x - 3)/2$. Þá er ljóst að $g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3 - 3)/2 = x$ og $f(g(x)) = f((x - 3)/2) = 2(x - 3)/2 + 3 = x$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. ■

■ **Dæmi 5.3** Sýnum að $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ sé gagntækt fall. Jafnan $y = 2x + 3$ hefur ótvírætt ákvörðuðu lausnina $x = (y - 3)/2$ fyrir sérhvert $y \in \mathbb{R}$ svo f er gagntækt. Sjá dæmið á undan. ■

■ **Dæmi 5.4** Fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ er ekki gagntækt fall. Við sjáum t.d. að lárétt lína ofan við $x-$ás sker feril fallsins tvisvar, svo fallið getur ekki verið gagntækt. Einnig hefur jafnan ekki ótvírætt ákvarðaða lausn; ef við leysum $y = x^2$ fyrir x fáum við $x = \pm\sqrt{y}$. Einnig sjáum við t.d. að af $-1 \neq 1$ leiðir ekki $f(1) \neq f(-1)$, því $f(1) = f(-1) = 1$.

Einnig: Ef maður tekur eftir því áður en nokkuð annað er gert, að myndmengi $f(x) = x^2$ er $[0, +\infty[$, þá brestur forsendan fyrir því að fallið geti verið gagntækt strax í byrjun. ■

Skilgreining 5.1.3 Fyrir gagntækt fall $f : I \longrightarrow J$ skilgreinum við fallið $f^{-1} : J \longrightarrow I$ með formúlunni $f^{-1}(y) = x$ ef $y = f(x)$. Fallið f^{-1} er kallað **andhverfa fall** f eða bara **andhverfa** (*e. inverse*) f. Það er ekki erfitt að sjá að

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

■ **Dæmi 5.5** Fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, hefur andhverfuna $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = (x - 3)/2$. ■

■ **Dæmi 5.6** Fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ er ekki gagntækt fall því jafnan $y = \sin(x)$ hefur óendanlega margar lausnir fyrir sérhvert $y \in [-1, 1]$. Af hverju hafa samt margar reiknivélar takka sem á stendur $\sin^{-1}$? Við skoðum þetta nánar síðar. ■

Nokkrir mikilvægir eiginleikar gagntæks falls $f : I \longrightarrow J$ og andhverfu þess $f^{-1} : J \longrightarrow I$ eru:

Regla 5.1.1

(1) $f(x) = y \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x$.
(2) Formengi f^{-1} er myndmengi f.
(3) Myndmengi f^{-1} er formengi f.
(4) $f^{-1}(f(x)) = x$ fyrir öll $x \in I = \text{Dom}(f)$.
5. $f(f^{-1}(y)) = y$ fyrir öll $y \in J = \text{Dom}(f^{-1})$.
6. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in J = \text{Dom}(f)$ svo $(f^{-1})^{-1} = f$.
7. Graf fallsins f^{-1} fæst með því að spegla graf fallsins f um línuna $y = x$.

Eins og við sáum áður er fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, $f(x) = x^2$, ekki gagntækt og hefur því enga andhverfu. Með því að minnka formengi f á $[0, +\infty[$ (annar möguleiki væri $]-\infty, 0]$) getum við samt skilgreint andhverfu þessarar svokölluðu **einskorðunar** (*e. restriction*) fallsins f á $[0, +\infty[$. Andhverfa þessarar einskorðunar er $g(x) = \sqrt{x}$. Svipað er gert fyrir hornaföllin $\sin$, $\cos$ og $\tan$; við tökum minna formengi.

Æfingar 5.1

Æfing 5.1.1 Skoðum fallið $f(x) = x^3 + x^5$.

(i) Sýnið að fallið er andhverfanlegt.
(ii) Finnið $f^{-1}(2)$.
(iii) Finnið $\dfrac{df^{-1}}{dx}(2)$
Ábending: hægt er að leiða út jöfnu fyrir afleiðu andhverfunnar í $f(x)$ með því að nota $f^{-1}(f(x)) = x$ og keðjuregluna.

■

Æfing 5.1.2 Ákvarðið formengi I og myndmengi J eftirfarandi falla og ákvarðið andhverfur $f^{-1} : J \longrightarrow I$.

(i)

$$f(x) = x - 1$$

(ii)

$$f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$$

(iii)

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

(iv)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

■

Æfing 5.1.3 Skoðum fallið $f : I \longrightarrow J$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

(i) Ákvarðið stærsta mögulega I (formengishefðin) og minnsta mögulega J (myndmengið).
(ii) Sýnið að $f(x)$ sé andhverfanlegt og finnið formúlu fyrir andhverfunni $f^{-1}(x)$.
(iii) Hvert er formengi og myndmengi fallanna $f(x)$ og $f^{-1}(x)$.
(iv) Teiknið $f(x)$, $f^{-1}(x)$ og $g(x) = x$ á sömu mynd.

■

Æfing 5.1.4 Sýnið að fallið $f(x) = x + x^3$ er andhverfanlegt og finnið $f^{-1}(-2)$. ■

5.2 Andhverfur hornafalla

Fallið $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ einskorðar maður á $[-\pi/2, \pi/2]$ og kallar andhverfu einskorðunarinnar $\arcsin$. Þ.e. $\arcsin(y) = x$, þar sem $-1 \leq y \leq 1$, er það ótvírætt ákvarðaða $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ þ.a. $\sin(x) = y$.

Fallið $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ einskorðar maður á $[0, \pi]$ og kallar andhverfu einskorðunarinnar $\arccos$. Þ.e. $\arccos(y) = x$, þar sem $-1 \leq y \leq 1$, er það ótvírætt ákvarðaða $x \in [0, \pi]$ þ.a. $\cos(x) = y$.

Fallið $\tan$ einskorðar maður á $]-\pi/2, \pi/2[$ og kallar andhverfu einskorðunarinnar $\arctan$. Þ.e. $\arctan(y) = x$, þar sem $y \in \mathbb{R}$, er það ótvírætt ákvarðaða $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ þ.a. $\tan(x) = y$.

Sumar reiknivélar nota $\sin^{-1}$ fyrir $\arcsin$, $\cos^{-1}$ fyrir $\arccos$ og $\tan^{-1}$ fyrir $\arctan$, þó að það sé ekki alveg rökrétt.

■ **Dæmi 5.7** $\arcsin(\sin(2\pi)) = 0$ því $\sin(2\pi) = \sin(0)$ og $0 \in [-\pi/2, \pi/2]$. ■

■ **Dæmi 5.8** Látum $f : I \longrightarrow J$ vera gagntækt deildanlegt fall. Nú er $f^{-1}(f(x)) = x$ fyrir öll $x \in I$ og með keðjureglunni fæst

$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}f^{-1}(f(x)) = \frac{df^{-1}}{dx}(f(x))f'(x)$$

svo

$$\frac{df^{-1}}{dx}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Notum þetta til þess að deilda $\arccos$. Nú er

$$1 = \frac{d}{dx}\arccos(\cos(x)) = \arccos'(\cos(x))(-\sin(x))$$

svo

$$\arccos'(\cos(x)) = \frac{-1}{\sin(x)},$$

notum nú regluna $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ sem við umritum $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$ (Ath. $x \in [0,\pi]$ svo $\sin(x) \geq 0$). Látum $y = \cos(x)$, þá verður jafnan hér að ofan

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

■

■ **Dæmi 5.9** Látum $I \subset \mathbb{R}$ vera opið bil og $f : I \longrightarrow J$, $J = f(I)$, vera deildanlegt fall þ.a. $f'(x) > 0$ fyrir öll $x \in I$. Sýnið að f er gagntækt fall?

■ **Lausn** Samkvæmt Reglu 4.4.1 bls. 121 er f stranglega vaxandi, sem þýðir að ef $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, þá er $f(x_1) < f(x_2)$, svo jafnan $y = f(x)$, þar sem $y \in f(I)$, hefur ótvírætt ákvarðaða lausn x.

■

Æfingar 5.2

Æfing 5.2.1 Látum $f : I \longrightarrow J$ vera gagntækt deildanlegt fall. Þá er $f^{-1}(f(x)) = x$ fyrir öll $x \in I$ og með Keðjureglunni fæst

$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}f^{-1}(f(x)) = \frac{df^{-1}}{dx}(f(x))f'(x)$$

svo

$$\frac{df^{-1}}{dx}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Notið þetta til þess að leiða út hver afleiða fallsins arcsin er.
Ábending: Það gæti komið að gagni að skoða dæmi 5.8. ■

Æfing 5.2.2

(i) Færið rök fyrir því að $\tan x$ sé andhverfanlegt ef formengi þess er einskorðað við bilið $]-\pi/2, \pi/2[$.

(ii) Sýnið að $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(iii) Notið Keðjuregluna til að sýna að afleiða $\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$ m.t.t. x er $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ ef $a \neq 0$.

■

Æfing 5.2.3 Látum $|x| < 1$. Teiknið mynd af rétthyrndum þríhyrningi með lárétta skammhlið með lengd x og lóðrétta skammhlið með lengd $\sqrt{1-x^2}$ og þá langhlið af lengd 1. Veljum horn θ þannig að $\sin\theta = x$. Þá er $\theta = \arcsin x$.

(i) Sýnið (myndrænt) að einnig gildi

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

(ii) Er hægt að gefa θ með $\arccos$ fallinu ?

■

5.3 Veldisföll og lograföll

Byrjum á að rifja upp veldisreglur og reiknireglur fyrir veldisföll.

Veldareglur

Ef $a > 0$, þá er

$$\begin{aligned} &a^0 = 1 \\ &a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ sinnum} \quad \text{fyrir} \quad n \in \mathbb{N} \\ &a^{-n} = \tfrac{1}{a^n} \quad \text{fyrir} \quad n \in \mathbb{N} \\ &a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{fyrir} \quad n \in \mathbb{N} \ \text{ og } \ m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Reiknireglur fyrir veldisföll

Ef $a > 0$ og $b > 0$ og $x, y \in \mathbb{R}$, þá er

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & a^0 = 1 & \text{(ii)} & a^{x+y} = a^x a^y \\ \text{(iii)} & a^{-x} = \frac{1}{a^x} & \text{(iv)} & a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \\ \text{(v)} & (a^x)^y = a^{xy} & \text{(vi)} & (ab)^x = a^x b^x \end{array}$$

Við skoðum nú nokkur markgildi fyrir fallið a^x:

■ **Dæmi 5.10**

$$\text{Ef } \ a > 1, \ \text{ þá er } \ \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \ \text{ og } \ \lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

og

$$\text{Ef } \ 0 < a < 1, \ \text{ þá er } \ \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \ \text{ og } \ \lim_{x \to \infty} a^x = 0.$$

■

Skilgreining 5.3.1 Ef $a > 0$ og $a \neq 1$, þá köllum við fallið $\log_a(x)$ **lograrnn** af x með grunntölu a og skilgreinum það sem andhverfu fallsins a^x. Sem sagt

$$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

Reiknireglur fyrir logra

Ef $x > 0$ og $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ og $b \neq 1$, þá er

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & \log_a 1 = 0 & \text{(ii)} & \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \\ \text{(iii)} & \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) & \text{(iv)} & \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \\ \text{(v)} & \log_a(x^y) = y\log_a(x) & \text{(vi)} & \log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \end{array}$$

Sérstaklega er jafna (vi) gagnleg því í einn logri, hinn svokallaði náttúrulegi logri eða $\ln$ fallið, gefur með henni af sér alla aðra logra. Meira um það í næsta kafla.

Skoðun nú nokkur markgildi fyrir logra fallið:

$$\text{Ef } a > 1, \text{ þá } \lim_{x\to 0+} \log_a(x) = -\infty \text{ og } \lim_{x\to +\infty} \log_a(x) = \infty$$

og

$$\text{Ef } 0 < a < 1, \text{ þá } \lim_{x\to 0+} \log_a(x) = \infty \text{ og } \lim_{x\to \infty} \log_a(x) = -\infty.$$

Æfingar 5.3

Æfing 5.3.1 Einfaldið eins og skynsamlegt er:

(a) $\log_{\frac{1}{3}} 3^{2x}$

(b) $a^{-4}b^3/2^{-2}/(ab^{-2})^{-4}$

(c) $2^{\log_4 8}$

(d) $2\log_3 12 - 4\log_3 6$

■

5.4 Náttúrlegi logrinn $\ln$ og $\exp$ fallið

Í þessum kafla sönnum við meira en hingað til í þeim tilgangi að æfa stærðfræðilega röksemdafærslu.

Skilgreining 5.4.1 Við skilgreinum fallið $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ fyrir $t \geq 1$ sem flatarmálið á milli ferlanna $x = 1$, $x = t$ og $y = 1/t$, og fyrir $0 < t < 1$ sem mínus flatarmálið á milli ferlanna $x = 1$, $x = t$ og $y = 1/t$.

Flatarmálið er yfirleitt ritað sem ákveðið heildi

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Fallið $\ln$ er kallað **náttúrlegi logrinn** eða **náttúrlegi lógariþminn** (e. natural logarithm).

Regla 5.4.1 Fallið $\ln$ er deildanlegt og

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Sönnun. Með því að bera saman flatarmál, sjá Mynd 5.1, sést að fyrir $h > 0$ gildir

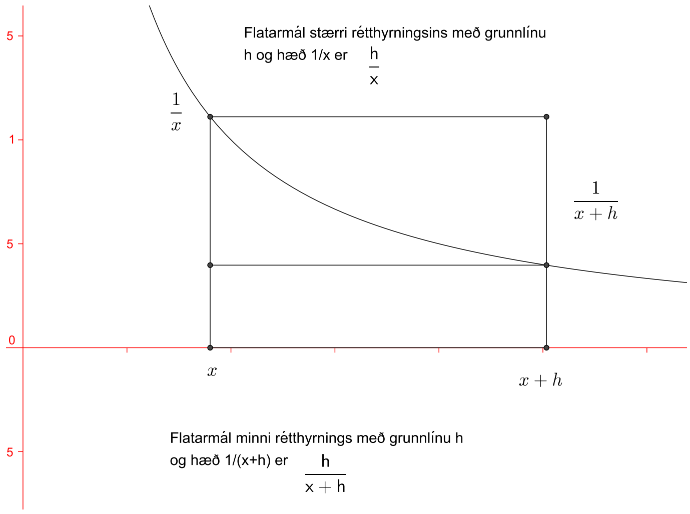
$$\frac{h}{x+h} < \ln(x+h) - \ln(x) < \frac{h}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} < \frac{1}{x}$$

og þar sem

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{x+h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad \text{þá gildir samkvæmt Klemmureglunni að}$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

Mynd 5.1: Flatarmálið sem afmarkast af ferli fallsins $f(x) = 1/x$ og $x-$ásnum á bilinu $[x, x+h]$ er minna en flatarmál rétthyrnings grunnlínu $h \neq 0$ og hæð $\frac{1}{x}$ en er stærra en flatarmál rétthyrnings með grunnlínu h og hæð $\frac{1}{x+h}$



Tilvikið $h < 0$ er skoðað með sömu aðferð sem gefur $\lim_{h\to 0-} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$. Því er $\ln$ deildanlegt og hefur afleiðu $\ln'(x) = 1/x$. ■

Mikilvægustu eiginleikar fallsins $\ln$ eru:

Regla 5.4.2 Ef $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ og $y > 0$, þá er:

(i)
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

(ii)
$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$$

(iii)
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

(iv)
$$\ln(x^n) = n \ln x \ \text{ fyrir } n \in \mathbb{Z}$$

Sönnun. Augljóst er að liðir (iii) og (iv) leiða beint af liðum (i) og (ii). Sönnun fyrst (i):

Látum $y > 0$ vera fasta og skoðum fallið $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(xy) - \ln x.$$

Þá er f deildanlegt og samkvæmt Keðjureglunni er

$$f'(x) = \ln'(xy)\, y - \ln' x = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

En þá er fallið f fastafall, $f(x) = C$ fyrir öll $x > 0$, og þar sem

$$C = f(1) = \ln y - \ln 1 = \ln y - 0 = \ln y$$

er

$$f(x) = \ln(xy) - \ln x = C = \ln y$$

fyrir öll $x > 0$. Þar sem þessi röksemdafærsla er óháð y, þá er

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

fyrir öll $x, y > 0$.

Sönnum (ii) – Sýnum að $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$:
Skilgreinum fallið $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
Fallið g deildanlegt og samkvæmt Keðjureglunni gildir

$$g'(x) = \ln' x + \ln'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1/x}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0,$$

svo að g er fastafall, þ.e. $g(x) = C$ fyrir öll $x > 0$. Af því að

$$g(1) = \ln 1 + \ln\left(\frac{1}{1}\right) = 0 + 0 = 0 \quad \text{þá er}$$

$$0 = g(x) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

fyrir öll $x > 0$. ■

Í Reglu 5.4.1 sáum við að $\ln$ er deildanlegt fall og að

$$\ln' x = \frac{1}{x} > 0$$

fyrir öll $x > 0$, svo að $\ln$ er stranglega vaxandi fall á $]0, +\infty[$. Auk þess er $\ln 2 > \ln 1 = 0$ og fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$ gildir

$$\lim_{n\to+\infty} \ln 2^n = \lim_{n\to+\infty} n \ln 2 = +\infty$$

svo við höfum nauðsynlega að

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Einnig gildir að $\ln 1/2 < \ln 1 = 0$ og fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$ er

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} -n \ln 2 = -\infty$$

svo við höfum nauðsynlega að

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty.$$

Af því að $\ln$ er stranglega vaxandi samfellt fall er það einnig gagntækt, sem sagt, er fyrir sérhverja tölu $y \in \mathbb{R}$ til nákvæmlega eitt $x > 0$ þ.a. $\ln x = y$.

Nú nýtum við þetta til að skilgreina nýtt fall, $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ með

$$\exp(x) = y \quad \text{nákvæmlega þegar} \quad \ln y = x, \tag{5.1}$$

þ.e. $\exp$ er andhverfa $\ln$. Það þýðir að

$$\exp(\ln(x)) = x \quad \text{fyrir öll } x > 0$$

og

$$\ln(\exp(y)) = y \quad \text{fyrir öll } y \in \mathbb{R}.$$

Mikilvægustu eiginleikar $\exp$ fallsins eru:

Regla 5.4.3 Fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}$ gildir

(i) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$

(ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Sönnun. Við höfum

$$\ln(\exp(x + y)) = x + y \quad \text{og} \quad \ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y$$

og af því að $\ln$ er eintækt fall þá fæst að

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

Við höfum líka að

$$\ln(\exp(-x)) = -x \quad \text{og} \quad \ln\left(\frac{1}{\exp(x)}\right) = -\ln(\exp(x)) = -x$$

svo að

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

■

Regla 5.4.4 $\exp'(x) = \exp(x)$

Sönnun.

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{x + h - x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{\ln(\exp(x+h)) - \ln(\exp(x))} \\
&= \frac{1}{\lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(\exp(x+h)) - \ln(\exp(x))}{\exp(x+h) - \exp(x)}} \\
&= \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x).
\end{aligned}$$

■

Við notum núna $\exp$ fallið til þess að skilgreina almenna veldisvísa á stærðfræðilega nákvæman hátt:

Skilgreining 5.4.2 Fyrir allar rauntölur a og x þ.a. $a > 0$ skilgreinum við

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Fyrir alla veldisvísa þar sem

$$x \equiv \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

kemur þetta heim og saman við veldisvísa eins og við þekkjum þá,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \exp(\frac{m}{n} \ln(a)).$$

Ef við skilgreinum núna töluna

$$e \equiv \exp(1) = 2.718281828459\ldots,$$

þ.e.

$$\ln(e) = 1,$$

þá gildir

$$e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x).$$

Þetta er ástæðan fyrir því að maður ritar oft

$$e^x \quad \text{í stað} \quad \exp(x).$$

Talan e er kölluð *tala Eulers* (e. Euler's number).

Æfingar 5.4

Æfing 5.4.1 Leysið fyrir x:

(a) $2^{x+1} = 3^x$
(b) $2^{-x} = 7/8^{x+4}$
(c) $3^x = 27$
(d) $3^{4-x} = 4^{x-3}$

■

Æfing 5.4.2 Leysið ójöfnuna $\ln(x^2 - 2) \leq \ln x$ ■

5.5 Veldisvöxtur og logravöxtur

Við ætlum að sýna að fyrir $a, b > 0$ vex veldisvísisfallið $\exp(bx)$ hraðar en nokkurt veldi x^a þegar x stefnir á $+\infty$ og að lografallið $\ln(x^b)$ vex hægar en nokkurt veldi x^a þegar x stefnir á $+\infty$. Nákvæmlega ætlum við að sýna að

Regla 5.5.1 Veldisföll vaxa miklu hraðar en margliður og margliður vaxa miklu raðar en lograr.

(A)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = +\infty$$

(B)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln(x^b)} = +\infty.$$

Skoðum fyrst fyrra markgildið

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{bx}}{x^a}, \quad \text{þar sem } \ a, b > 0.$$

Fyrst áttum við okkur á því að með breytuskiptunum $t = bx/2$ (ath. t stefnir á $+\infty$ þegar x stefnir á $+\infty$) fæst

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(bx/2) = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty.$$

Skilgreinum fallið $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{bx/2}}{x^a} = \frac{e^{bx/2}}{e^{a\ln(x)}} = e^{bx/2} \cdot e^{-a\ln(x)} = \exp(bx/2 - a\ln(x)).$$

Fallið f er deildanlegt og

$$f'(x) = \exp(bx/2 - a\ln(x)) \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{x}\right) > 0 \quad \text{fyrir } x > \frac{2a}{b},$$

svo f er stranglega vaxandi á bilinu $]2a/b, +\infty[$ og þar með $f(x) > f(2a/b) > 0$ fyrir öll $x > 2a/b$. Þar með er ljóst að

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} e^{bx/2} f(x) \geq f(2a/b) \cdot \lim_{x\to+\infty} e^{bx/2} = f(2a/b) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Skoðum nú seinna markgildið. Með því að nota breytuskiptin $t = \ln(x)$, jafngilt $x = e^t$, (ath. t stefnir á $+\infty$ þegar x stefnir á $+\infty$) fæst nú

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln(x^b)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(e^t)^a}{\ln((e^t)^b)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{at}}{bt} = \frac{1}{b} \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{at}}{t} = \frac{1}{b} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

■ **Dæmi 5.11** Reiknum fyrir $a > 0$ að

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x^a} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} e^x/x^a} = 1/(+\infty) = 0.$$

■

■ **Dæmi 5.12** Reiknum fyrir $a > 0$ að

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a/\ln(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} x^a/\ln(x)} = 1/(+\infty) = 0.$$

■

■ **Dæmi 5.13** Reiknum fyrir $a > 0$ með breytuskiptunum $t = -x$ að

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}|-t|^a = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^a}{e^t} = 0.$$

■

■ **Dæmi 5.14** Reiknum fyrir $a > 0$ með breytuskiptunum $t = 1/x$ að

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1/t)}{t^a} = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t^a} = 0.$$

■

Æfingar 5.5

Æfing 5.5.1 Finnið markgildin

(i)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - 2}{4e^x + 1}$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x)$$

■

5.6 Lausnir á völdum dæmum

■ **Dæmi 5.15** Sýnið að föllin f séu eintæk og reiknið út andhverfur þeirra f^{-1}. Tilgreinið formengi og myndmengi f og f^{-1}.

(i) $f(x) = (1-2x)^3$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

■ **Lausn**

(i) Fallið $f(x) = (1-2x)^3$ hefur formengi $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, og afleiða f er fallið $f'(x) = 3(1-2x)^2 \cdot (-2) = -6(1-2x)^2 < 0$ fyrir öll $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Þar sem að $f'(x) < 0$ fyrir öll $x > \frac{1}{2}$ og öll $x < \frac{1}{2}$ þá er $f(1/2)$ hvorki hágildi né lággildi (heldur er $x = \frac{1}{2}$ söðulpunktur). Þá er fallið eintækt á öllu $\mathbb{R}$ og þar með andhverfanlegt.

Myndmengið er greinilega allt $\mathbb{R}$; táknum það $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$. Við vitum núna að andhverfan f^{-1} er til, sem er skilgreind á myndmengi f og tekur gildi í formengi f. Setjum því $y = f^{-1}(x)$ sem er jafngilt $f(y) = x$. Þetta gefur jöfnuna $x = (1-2y)^3$. Drögum þriðju rætur og fáum $x^{1/3} = 1-2y$, einangrum svo y úr jöfnunni og fáum

$$f^{-1}(x) = y = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{2}.$$

Nú er $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ og $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

ATH Önnur leið til að sjá að fallið er eintækt, en það er meiri vinna, er að gefa sér x_1 og x_2 úr $\mathbb{R}$ þannig að $f(x_1) = f(x_2)$. Svo þarf að sýna að þá gildi nauðsynlega $x_1 = x_2$. Fyrir dæmið hér að ofan fæst að ef $f(x_1) = (1-2x_1)^3 = (1-2x_2)^3 = f(x_2)$, þá er $(1-2x_1)^3 - (1-2x_2)^3 = 0$. Við getum svo notað regluna um mismun teninga $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ með $a = 1-2x_1$ og $b = 1-2x_2$, og af því að $a^2+ab+b^2 \neq 0$ þá fæst $a = b$ þ.e. $1-2x_1 = 1-2x_1$ sem gefur loks að $x_1 = x_2$.

(ii) Fallið $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ er skilgreint alls staðar nema í punktinum $x = -1$, svo $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Afleiða f er fallið

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2};$$

og þar sem $(1+x)^2 > 0$ á formengi f þá er $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$. Þá er fallið stranglega einhalla (stranglega minnkandi) og er þar með gagntækt; hefur þar með andhverfu f^{-1} sem er skilgreind á myndmengi f, og myndmengi f^{-1} er $\mathrm{Dom}(f)$. Setjum þá $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$. Fáum

$$x = \frac{1}{1+y} \Leftrightarrow 1+y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} - 1.$$

Þá er $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 1$. Við sjáum að $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Þá fæst

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{og} \quad \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

ATH Nokkur orð um myndmengi falls f. Nákvæmara orðalag er; myndin af menginu A undir fallinu f er mengið $f(A)$. Þegar talað er um myndmengi falls f án þess að geta formengis f, þá fellur það undir formengishefðina að alltaf er átt við stærsta mögulega formengið sem formúlan fyrir fallinu f leyfir. Útgildissetningin segir nákvæmlega að ef f er samfellt fall á *lokuðu* og *takmörkuðu* bili $[a, b]$ þá er myndin af bilinu, undir f, lokaða takmarkaða bilið $[f_{\min}, f_{\max}]$, þar sem $f_{\min}$ er lægsta gildi sem fallið f tekur á bilinu $[a, b]$ og $f_{\max}$ er hæsta gildi sem fallið f tekur á $[a, b]$. Knöpp framsetning á útgildissetningunni er:

Ef $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ er samfellt, þá er $f([a, b]) = [f_{\min}, f_{\max}]$.

■

■ **Dæmi 5.16** Metið $\arcsin(\sqrt{3}/2)$ án þess að nota vasareikni.

■ **Lausn** Fallið $\arcsin x$ er skilgreint á bilinu $[-1, 1]$ og hefur myndmengi $[-\pi/2, \pi/2]$. Þar sem $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ þá er $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

■

■ **Dæmi 5.17** Sýnið að föllin $\arcsin(x)$ og $\arctan(x)$ eru stranglega vaxandi föll á formengjum sínum, en $\arccos(x)$ er stranglega minnkandi á sínu formengi.

■ **Lausn** Setjum $f(x) = \arcsin(x)$, $g(x) = \arctan(x)$ og $h(x) = \arccos(x)$.

(i) Fallið $f(x) = \arcsin(x)$ hefur formengi $\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1]$ og afleiðu $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Við sjáum að f' er skilgreint á opna bilinu $]-1, 1[$. Á því bili er $\sqrt{1-x^2} > 0$ og þar með er $f'(x) > 0$ á $]-1, 1[$. Varðandi endapunktana -1 og 1, þá höfum við að

$f(-1) = -\pi/2$ og fyrir $h > 0$ gildir að $f(-1+h) > f(-1)$. Til að sjá þetta alveg óyggjandi þá getum við notað Meðalgildissetninguna: f er samfellt á $[-1,1]$, og deildanlegt á $]-1,1[$, svo að að til er c á milli -1 og $-1+h$ þannig að

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = f'(c).$$

Þar sem $f'(c) > 0$ og $h > 0$ þá verður að gilda að $f(-1+h) - f(-1) > 0$, sem gefur að $f(-1+h) > f(-1)$. Með samskonar rökum fæst að $f(1) > f(1-h)$ þar sem $h > 0$. Samantekið þýðir þetta að f er stranglega vaxandi á $\mathrm{Dom} f = [-1,1]$.

(ii) Fallið $g(x) = \arctan(x)$ er skilgreint á bilinu $]-\pi/2, \pi/2[$ og hefur afleiðu $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Þar sem $1 + x^2 > 0$ fyrir öll x, þá er $g'(x) > 0$ fyrir öll $x \in \mathrm{Dom}(g)$. Þetta þýðir að g er stranglega vaxandi fall á $]-\pi/2, \pi/2[$

(iii) Fallið $h(x) = \arccos(x)$ hefur formengi $\mathrm{Dom}(h) = [-1,1]$ og afleiðu $h'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Þetta er hallatala $\arcsin$ fallsins með neikvæðu formerki. Við fáum því með samskonar reikningunum og í (a) lið að h er stranglega minnkandi á formengi sínu.

■

■ **Dæmi 5.18** Leysið upphafsgildisverkefnið

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

■ **Lausn** Stofnfall $y'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ er $y(x) = \arctan(x) + C$, þar sem C er óákvarðaður fasti. Þetta er því **almenn lausn**. Til að leysa upphafsgildisverkefnið þurfum við að ákvarða C. Notum okkur að lausnarferillinn liggur í gegnum punktinn $(0,1)$ og fáum

$$y(0) = \arctan(0) + C = 0 + C \stackrel{!}{=} 1.$$

Lausn á UGV er þá

$$y(x) = \arctan(x) + 1.$$

■

■ **Dæmi 5.19** Einfaldið

(i) $\dfrac{3^3}{\sqrt{3^5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x 4^{x/2}$ (iii) $10^{-\log_{10}(1/x)}$

■ **Lausn**

(i)
$$\frac{3^3}{\sqrt{3^5}} = \frac{3^3}{3^{5/2}} = 3^{3-5/2} = 3^{1/2}.$$

(ii)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x 4^{x/2} = \frac{1^x}{2^x}\left(4^{1/2}\right)^x = \frac{1}{2^x}2^x = 1.$$

(iii) Athugum fyrst að fyrir $a > 0$ og $x > 0$ eru föllin $\log_a(x)$ og a^x andhverfur og þess vegna gildir sér í lagi að $a^{\log_a(x)} = x$. Einnig notum við lograregluna $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$ eða regluna $\log_a(1/x) = \log_a(x^{-1}) = -1 \cdot \log(x)$. Við fáum með þessum reglum að

$$10^{-\log_{10}(1/x)} = 10^{\log_{10}(x)} = x.$$

■

■ **Dæmi 5.20** Notið veldisfallið 10^x og $\log(x) \equiv \log_{10}(x)$ og reiknivél til að reikna út:

$$\text{(i)}\quad 3^{\sqrt{2}} \qquad \text{(ii)}\quad \log_x(3) = 5.$$

■ **Lausn**

(i) Setjum um $y = 3^{\sqrt{2}}$. Tökum tíulogra af báðum hliðum, notum lograregluna $\log(a^b) = b\log(a)$, og fáum

$$\begin{aligned}\log(y) &= \sqrt{2}\log(3)\\ &= 1.414213562373095 \cdot 0.477121254719662\\ &= 0.674751349321015.\end{aligned}$$

Þá fæst

$$y = 10^{0.674751349321015} = 4.728804387837413.$$

(ii) Lausn 1: Athugum fyrst að $\log_x(3) = 5$ þýðir það sama og $x^5 = 3$. Tökum tíulogra af seinni jöfnunni og fáum

$$\log(x^5) = \log(3) \text{ þ.e. } \log(x) = \frac{\log(3)}{5} = 0.095424250943932.$$

Þá er

$$x = 10^{\log(x)} = 10^{0.095424250943932} = 1.245730939615517.$$

Lausn 2: Athugum að samkvæmt lograreglu er $\log_x(3) = \frac{\log_a(3)}{\log_a(x)}$. Hér er $a = 10$ og við fáum því

$$\begin{aligned}\log_x(3) = \frac{\log(3)}{\log(x)} &\stackrel{!}{=} 5 \quad\Leftrightarrow\quad \log(x) = \log(3)/5 \quad\Leftrightarrow\\ x = 10^{\log(x)} &= 10^{\log(3)/5} = 10^{0.477121254719662/5} = 10^{0.095424250943932}\end{aligned}$$

sem gefur $x = 1.245730939615517$.

ATH Í MATLAB þá þýðir `log` það sama og $\ln$, það er að segja logri með grunntölu e. Til þess að MATLAB skili tíulogra af tölunni 3 þarf annað hvort að skrifa `log(3)/log(10)` eða `log10(3)`. Hvort tveggja gefur 0.477121254719662. Til að sjá það svart á hvítu að `log` sé náttúrlegi logrinn í MATLAB þá viljum sjá að $\ln(e) = 1$ gildir. Þá þarf að skrifa $\exp(1)$ í staðinn fyrir e, og `log(exp(1))` gefur 1.

■

■ **Dæmi 5.21** Einfaldið án vasareiknis:

(i) $e^3/\sqrt{e^5}$ (ii) $\ln\left(e^{1/2}e^{2/3}\right)$ (iii) $e^{5\ln(x)}$

■ **Lausn**

(i)
$$e^3/\sqrt{e^5} = e^3/e^{5/2} = e^{3-5/2} = e^{1/2}.$$

(ii)
$$\ln\left(e^{1/2}e^{2/3}\right) = \ln e^{1/2} + \ln e^{2/3} = \frac{1}{2}\ln e + \frac{2}{3}\ln e = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

(iii) $e^{5\ln(x)} = e^{\ln(x^5)} = x^5$. Einnig með veldareglum: $e^{5\ln(x)} = \left(e^{\ln(x)}\right)^5 = x^5$.

■

■ **Dæmi 5.22** Deildið föllin og einfaldið eins og skynsamlegt er

(i) $y = e^{5x}$ (ii) $y = \ln(3x-2)$ (iii) $y = \ln|\sec x + \tan x|$

■ **Lausn**

(i) $y' = \frac{d}{dx}(e^{5x}) = e^{5x}\cdot\frac{d}{dx}(5x) = 5e^{5x}$.

(ii) $y' = \frac{d}{dx}(\ln(3x-2)) = \dfrac{1}{3x-2}\cdot\frac{d}{dx}(3x-2) = \dfrac{3}{3x-2}$.

(iii) Rifjum upp að $\frac{d}{dx}|x| = \dfrac{|x|}{x}$. Notum einnig

(a) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ og þá $(\sec x)' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\tan x}{\cos x} = \tan x \sec x$,

(b) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

Fáum

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\ln|\sec x + \tan x|\right)\\
&= \frac{1}{|\sec x + \tan x|}\cdot\frac{d}{dx}\left(|\sec x + \tan x|\right)\\
&= \frac{1}{|\sec x + \tan x|}\cdot\frac{|\sec x + \tan x|}{\sec x + \tan x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sec x + \tan x\right)\\
&= \frac{1}{\sec x + \tan x}\cdot\left(\tan x \sec x + \sec^2 x\right)\\
&= \frac{\sec x}{\sec x + \tan x}\cdot\left(\tan x + \sec x\right)\\
&= \sec x = \frac{1}{\cos x}.
\end{aligned}$$

Við vitum þá framvegis að

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$$

■

■ **Dæmi 5.23** Notið Reglu 5.5.1 til að meta markgildin

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-3}e^{x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

■ **Lausn** Við notum e.f. niðurstöður:

Regla 5.5.1, $a, b \in \mathbb{R}$

(A) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{bx}}{x^a} = +\infty,$$ (B) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln(x^b)} = +\infty.$$

(i)

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x^3} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x/x^3} \overset{\text{skv. (A)}}{=} 0$$

Hér notuðum við Reglu 5.5.1 (A) í síðustu jöfnunni með $b = 1$ og $a = 3$.

(ii)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-3} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} \overset{\text{skv. (A)}}{=} +\infty$$

(iii)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x \overset{x=1/t}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(1/t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t} = -\frac{1}{\lim\limits_{t\to+\infty} t/\ln t} \overset{\text{skv. (B)}}{=} 0.$$

■

6. Hagnýting deildunar

6.1 Hágildi og lággildi

Regla 6.1.1 Látum f vera raungilt fall. Maður segir að fallið f hafi:

i) Hæsta gildi í punktinum $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ ef $f(x_0) \geq f(x)$ fyrir öll $x \in \mathrm{Dom}(f)$.
ii) Lægsta gildi í punktinum $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ ef $f(x_0) \leq f(x)$ fyrir öll $x \in \mathrm{Dom}(f)$.
iii) Staðbundið hágildi í punktinum $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ ef til er $h > 0$ þ.a. $f(x_0) \geq f(x)$ fyrir öll $x \in]x_0 - h, x_0 + h[\cap \mathrm{Dom}(f)$.
iv) Staðbundið lággildi í punktinum $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ ef til er $h > 0$ þ.a. $f(x_0) \leq f(x)$ fyrir öll $x \in]x_0 - h, x_0 + h[\cap \mathrm{Dom}(f)$.

Ef f hefur hágildi í $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, þá hefur f eðlilega staðbundið hágildi í x_0 og ef f hefur lággildi í $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, þá hefur f eðlilega staðbundið lággildi í x_0.

Við skoðum hér bara föll $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, sem eru samfelld á $[a, b]$ og deildanleg á $]a, b[$. Í þessu mikilvæga sértilfelli gildir

Regla 6.1.2

i) Ef f hefur staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi í $x_0 \in]a, b[$ (ath. innri punktur), þá gildir $f'(x_0) = 0$.
ii) Ef til er $h > 0$ þ.a. $f'(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in]x_0 - h, x_0[$ og $f'(x) \leq 0$ fyrir öll $x \in]x_0, x_0 + h[$, þá hefur f staðbundið hágildi í x_0.
iii) Ef til er $h > 0$ þ.a. $f'(x) \leq 0$ fyrir öll $x \in]x_0 - h, x_0[$ og $f'(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in]x_0, x_0 + h[$, þá hefur f staðbundið lággildi í x_0.
iv-a) Ef til er $h > 0$ þ.a. $f'(x) \leq 0$ fyrir öll $x \in]a, a+h[$, þá hefur f staðbundið hágildi í a.
iv-b) Ef til er $h > 0$ þ.a. $f'(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in]b - h, b[$, þá hefur f staðbundið hágildi í b.
v-a) Ef til er $h > 0$ þ.a. $f'(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in]a, a+h[$, þá hefur f staðbundið lággildi

í a.

v-b) Ef til er $h > 0$ þ.a. $f'(x) \leq 0$ fyrir öll $x \in]b-h, b[$, þá hefur f staðbundið lággildi í b.

Sönnun. Leiðir allt af Reglu 4.2.5 um útgildispunkta á bls. 116 og Reglu 4.4.1 um vaxandi og minnkandi föll á bls. 121 í kafla 4. Til dæmis hefur f staðbundið lággildi í $x_0 \in]a, b[$ ef f er minnkandi á bili $]x_0 - h, x_0]$ og vaxandi á bili $[x_0, x_0 + h[$. ■

Athugið að fjögur síðustu atriðin fjalla um endapunkta bilsins $[a, b]$.

Hvernig er þessi regla notuð til þess að finna staðbundin hágildi og staðbundin lággildi samfellds falls $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sem er deildanlegt á $]a, b[$ og hefur samfellda afleiðu $f' :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$? Maður deildar fallið, finnur síðan öll $x \in]a, b[$ þ.a. $f'(x) = 0$ og athugar síðan hvort f' er jákvætt eða neikvætt á milli þessara gilda og a og b.

■ **Dæmi 6.1** Finnum öll staðbundin hágildi og öll staðbundin lággildi fallsins $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ á bilinu $[-2, 2]$. Finnum síðan hæsta gildi og lægsta gildi.

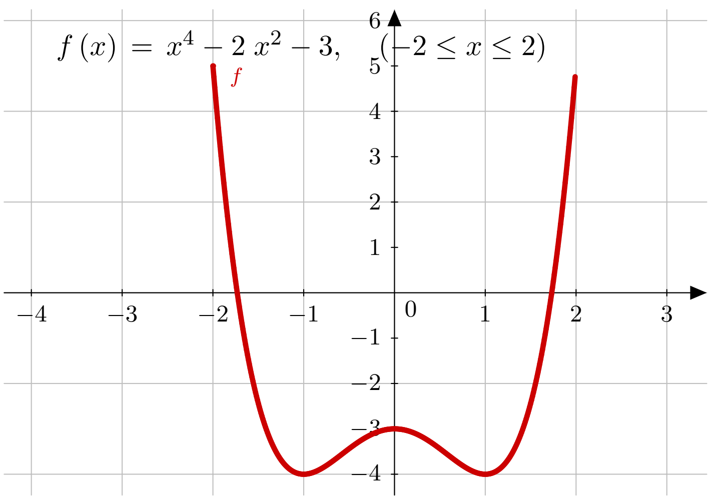
■ **Lausn** Byrjum á því að deilda f og fáum

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1).$$

Við höfum $f'(x) = 0$ ef $x = -1$, $x = 0$ og $x = 1$. Við gerum formerkjatöflu og sjáum að f hefur staðbundin hágildi í -2, 0 og 2 og staðbundin lággildi í -1 og 1. Til þess að finna hæsta gildi fallsins reiknum við út f í öllum staðbundnum hágildum og fáum $f(-2) = f(2) = 5$ og $f(0) = -3$ svo f hefur hæsta gildi 5 og þetta gildi er tekið í $x = -2$ og $x = 2$. Til þess að finna lægsta gildi fallsins reiknum við út f í öllum staðbundnum lággildum og fáum $f(-1) = f(1) = -4$ svo f hefur lággildið -4 og þetta gildi er tekið í $x = -1$ og $x = 1$.

`Geogebra` Skoðum feril fallsins á mynd. Sláum inn:

```
if(-2<= x <=2, x^4-2x^2-3)
```



Mynd 6.1

■

■ **Dæmi 6.2** Finnum öll staðbundin hágildi og öll staðbundin lággildi fallsins $f(x) = x^3$ á bilinu $[-1, 1]$.

■ **Lausn** Deildum f og fáum $f'(x) = 3x^2$, þ.e. $f(x) = 0$ þþaa. $x = 0$ svo **ef** f hefur staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi á opna bilinu $]-1, 1[$, þá er það tekið í $x = 0$. Ef við gerum formerkjatöflu er auðvelt að sjá að f hefur hágildi í 1 og lággildi í -1 og hefur hvorki staðbundið lággildi né staðbundið hágildi í 0.

■

Æfingar 6.1

Æfing 6.1.1 Finnið öll staðbundin hágildi og lággildi eftirfarandi falla auk hæsta gildis og lægsta gildis.

(i) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ á bilinu $[-5, 5]$.

(ii) $f(x) = \sin(x^2)$ á bilinu $[0, \pi]$.

(iii)
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} \quad \text{â bilinu } [0, 4].$$

■

6.2 Útgildisverkefni

Skoðum nú hvernig við getum notað það sem við höfum lært til að hámarka eða lágmarka. Tökum nokkur dæmi.

■ **Dæmi 6.3** Viti L er staddur á eyju 5 km norður af punkti A á fastlandinu. Við þurfum leiðslu frá vitanum L til punktsins B sem liggur 10 km austan við A. Við getum lagt leiðsluna í beinni línu í sjó að punkti C og þaðan á landi í punkt B. Það kostar 5000 kr/km að leggja leiðslu í sjó og 3000 kr/km að leggja leiðsluna á landi. Hvar eigum við að velja punktinn C til að lágmarka kostnað?

■ **Lausn** Við byrjum á að setja upp jöfnu fyrir hvað kostar að leggja kapalinn sem fall af stærðinni x sem er fjarlægðin frá C til A. Þá er $x \in [0, 10]$ og lengdin LC er $\sqrt{25 + x^2}$ km og lengdin CB er $(10 - x)$ km. Kostnaður við að leggja leiðsluna er því

$$T(x) = 5000\sqrt{25 + x^2} + 3000(10 - x)$$

Við viljum nú finna fyrir hvaða x kostnaðurinn T er minnstur. Sjáum fyrst að T er samfellt fall á bilinu $[0, 10]$, svo fallið hefur lægsta gildi, annað hvort í útgildispunktum eða í endapunktum bilsins. Við höfum nú að afleiða fallsins er

$$T'(x) = \frac{5000 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + 25}} - 3000 = \frac{5000x}{\sqrt{x^2 + 25}} - 3000$$

og leysum nú

$$
\begin{aligned}
\frac{5000x}{\sqrt{x^2+25}} - 3000 = 0 &\iff 5000x = 3000\sqrt{x^2+25} \\
&\iff 5x = 3\sqrt{x^2+25}
\end{aligned}
$$

Hefjum hægri og vinstri hlið síðustu jöfnu í annað veldi til að losna við ferningsrótina. Fáum

$$
\begin{aligned}
25x^2 = 9(x^2+25) &\iff 16x^2 = 225 \\
&\iff x^2 = \frac{225}{16} \\
&\iff x = \pm\frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

Punkturinn $-15/4$ er ekki á bilinu $[0,10]$ og kemur því ekki til greina. Við skoðum nú fallgildið í punktinum $x = 15/4$ og endapunktum bilsins.

$$
\begin{aligned}
T(0) &= 55000 \\
T(15/4) &= 50000 \\
T(10) &\approx 55902
\end{aligned}
$$

Við sjáum því að ódýrast er að láta punktinn C vera $15/4$ km austan við punkt A.

Skoðum nú hver lausnin væri ef punkturinn B er aðeins 3 km austan við A. Þá er jafnan

$$
T_2(x) = 5000\sqrt{25+x^2} + 3000(3-x)
$$

sem hefur sömu útgildi og fallið T en hvorugt þeirra liggur á bilinu $[0,3]$ svo einu möguleikarnir eru endapunktar bilsins. Reiknum nú þeirra gildi

$$
\begin{aligned}
T(0) &= 34000 \\
T(3) &\approx 29155
\end{aligned}
$$

Kostnaðurinn er því lágmarkaður ef við veljum $x = 3$; svo að leiðslan á að fara beint frá vitanum til B.

■

■ **Dæmi 6.4** Maður nokkur hleypur tvisvar sinnum hraðar en hann syndir. Hann stendur í punkti A á bakka hringlaga sundlaugar (A er á jaðri hringskífu). Sundlaugin er 40 m í þvermál og hann þarf að komast þvert yfir laugina að punkti B (í gegnum miðju hringsins). Hann getur hlaupið meðfram jaðri laugarinnar, eða hann getur synt yfir laugina eftir beinni línu, eða hann hleypur spottakorn meðfram bakkanum að punkti C og stingur sér þaðan til sunds og syndir í B. Hvaða leið á hann að fara til að verða sem fljótastur yfir?

■ **Lausn** Látum C vera punkt þar sem hann gæti valið að stökkva í laugina og synda yfir. Punktinn mitt á milli B og C köllum við M. Látum O vera miðju hringsins og táknum með θ hornið AOC. Það er hentugt að gefa tímann upp sem fall af þessu horni θ. Við vitum að $\theta \in [0,\pi]$, ef $\theta = 0$ þá syndir hann beint yfir laugina, ef $\theta = \pi$ þá hleypur hann meðfram bakkanum. Vegalengdin BC fæst með $BC = 2BM = 40\sin((\pi-\theta)/2)$.

Ef við segjum að maðurinn syndi á k km/klst, þá hleypur hann á $2k$ km/klst, svo það tekur hann (tími í sund + hlaupatími)

$$t(\theta) = \frac{20\theta}{2k} + \frac{40}{k}\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

að komast frá A til B. Finnum nú útgildi fyrir þetta fall, þ.e. leysum

$$t'(\theta) = \frac{10}{k} - \frac{20}{k}\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = 0$$

sem sagt

$$\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

á bilinu $[0,\pi]$ hefur þessi jafna eina lausn, nefnilega $\theta = \frac{\pi}{3}$. Reiknum nú fallgildin í þessum punkti og endapunktunum,

$$\begin{aligned} t(0) &= \frac{40}{k} \\ t(\pi/3) &\approx \frac{45.11}{k} \\ t(\pi) &\approx \frac{31.4}{k} \end{aligned}$$

Það er þá hentugast að velja $\theta = \pi$, svo maðurinn er fljótastur frá A til B ef hann hleypur alla leiðina meðfram bakkanum.

■

■ **Dæmi 6.5** Finnið lengd stysta stiga sem á að liggja að háum vegg yfir grindverk sem stendur 1m frá veggnum og er 2m að hæð.

■ **Lausn** Látum θ vera hornið milli stigans og jarðarinnar. Segjum að fjarlægðin frá veggnum að stiganum sé $m+1$, notum nú hornafallareglur fyrir þessa 2 rétthyrndu þríhyrninga sem myndast

$$\cos(\theta) = \frac{m+1}{L} \quad \text{og} \quad \tan\theta = \frac{2}{m}.$$

Seinni jafnan gefur að

$$m = \frac{2}{\tan(\theta)}$$

og ef við einangrum L í fyrri jöfnunni og setjum m inn fáum við

$$L(\theta) = \frac{m+1}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{2}{\tan(\theta)}+1}{\cos(\theta)} = \frac{2}{\sin(\theta)} + \frac{1}{\cos(\theta)}$$

þar sem $\theta \in [0,\pi/2]$. Við leysum nú jöfnuna

$$L'(\theta) = \frac{\sin^3(\theta) - 2\cos^3(\theta)}{\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)} = 0$$

sem er jafngilt

$$\sin^3(\theta) - 2\cos^3(\theta) = 0$$

eða

$$\tan^3(\theta) = 2$$

sem gefur okkur lausnina $\theta = \tan^{-1}(2^{1/3}) \approx 0.9$. Við vitum að þetta gildi gefur okkur lægsta fallsins L (en ekki hágildi) því

$$\lim_{\theta \to 0+} L(\theta) = \lim_{\theta \to (\pi/2)-} L(\theta) = +\infty$$

og lægsta gildið er er

$$L(0.9) = \frac{2}{\sin(0.9)} + \frac{1}{\cos(0.9)} \approx 4.16.$$

Stiginn verður þá í minnsta lagi að vera 4.16 m að lengd.

■

Æfingar 6.2

Æfing 6.2.1 Kassi með ferningslaga botn en ekkert lok hefur rúmmálið 4 m^3. Finnið víddir kassans þannig að flatarmálið verði sem minnst. ■

Æfing 6.2.2

(1) Anna útivistarkona er á fjórhjóli á Söndunum. Hún er stödd í punkti A og þaðan eru 12 km í hásuður í punkt O á þjóðveginum. Þjóðvegurinn liggur austur-vestur. Anna vill komast í punkt B á þjóðveginum sem er 10 km austan við A. Ef meðalhraði Önnu á fjórhjólinu yfir sandana er 15 km/klst en 39 km/klst á þjóðveginum, í hvaða punkt X á veginum á Anna að stefna til þess að lágmarka ferðatímann frá A til B?
Ábending: Setjið upp hnitakerfi þannig að þjóðvegurinn liggi með $x-$ ásnum. Setjið $A = (0, 12)$, $O = (0, 0)$ og $B = (10, 0)$. Látið $T_{AX}(x)$ vera tímann sem það tekur að komast í punkt $X = (x, 0)$ á þjóðveginum; og $T_{XB}(x)$ vera tímann sem það tekur að komast frá X til B. Ljóst er að heildartíminn er $T(x) = T_{AX}(x) + T_{XB}$. Þú vilt lágmarka $T(x)$ þar sem $x \in [0, 10]$. Mundu eftir að skoða lengstu og stystu vegalengd: (i) Anna fer í hásuður eftir söndunum og síðan eftir þjóðveginum (þá er $X = O$), og (ii) Anna keyrir beint í punktinn B (þá er $X = B$).

(2) Endurtakið (1) lið með þeirri breytingu að nú er B aðeins 4 km austan við A. Þetta þýðir $\overline{OB} = 4$ (Eftir sem áður er $\overline{AO} = 12$).

■

6.3 Línuleg nálgun

Hér notum við Almennu Meðalgildissetninguna (Reglu 4.3.3 á bls. 119) talsvert. Til upprifjunar:

Almenna Meðalgildissetningin
Látum f og g vera föll sem eru samfelld á $[a,b]$ og deildanleg á $]a,b[$, $a<b$. Ef $g'(x) \neq 0$ fyrir öll $x \in]a,b[$, þá er til $c \in]a,b[$ þ.a.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Látum f vera fall sem er tvisvar sinnum deildanlegt á bilinu $]a,b[$ og látum $c \in]a,b[$. Látum

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x-c) \tag{6.1}$$

vera snertilínu við feril fallsins f í punktinum $(c, f(c))$. Við köllum jöfnu (6.1) **línulega nálgun við fallið f í grennd við** c eða einfaldar **línulega nálgun f um** c.

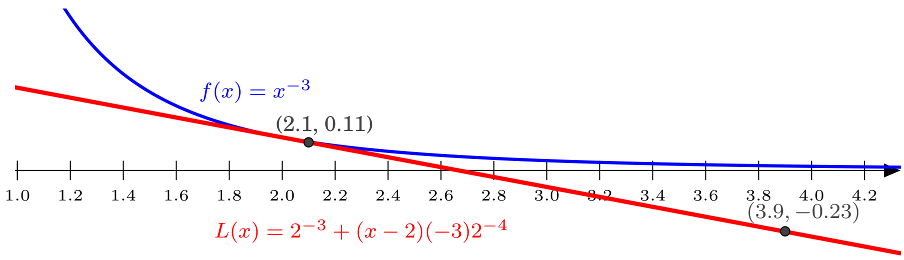
■ **Dæmi 6.6** Finnum línulega nálgun við fallið $f(x) = x^{-3}$ í grennd við 2.

■ **Lausn** Afleiðan er $f'(x) = -3x^{-4}$ svo línulega nálgunin er

$$L(x) = 2^{-3} + (x-2)(-3)2^{-4} = -\frac{3}{16}x + \frac{1}{2}.$$

Skoðum nú hversu vel þetta fall L nálgar fallið f fyrir nokkur gildi (sjá líka mynd)

$$\begin{aligned} &L(2.1) = 0.10625, && f(2.1) = 0.10798 && \text{nálgun ágæt} \\ &L(3.9) = -0.23125, && f(3.9) = 0.016858 && \text{nálgun ekki góð} \end{aligned}$$



Mynd 6.2: Á myndinni sést graf fallsins $f(x) = x^{-3}$ og línulegrar nálgunar þess um $x = 2.0$, $L(x) = \frac{-3}{16}x + \frac{1}{2}$. Gildin í punktunum 2.1 og 3.9 eru merkt inn á myndina. Línulega nálgunin virðist ágæt í punktinum $x = 2.1$ en hún er ekki góð þegar $x = 3.9$.

■

Nú er spurningin: Hversu góð er þessi línulega nálgun? Við leiðum út mikilvæga formúlu sem segir okkur hversu vel fallið L nálgar fallið f. Við fáum reglu um **línulega nálgun.**

Regla 6.3.1 — Línuleg nálgun. Ef fallið f er tvisvar sinnum deildanlegt á $]a,b[$ og $c \in]a,b[$, þá er fyrir sérhvert $x \in]a,b[$ til s á milli c og x þ.a.

$$f(x) = L(x) + \frac{1}{2}f''(s)(x-c)^2, \tag{6.2}$$

þar sem

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

er jafna snertilínu við feril fallsins f í $(c, f(c))$.

Sönnun. Skekkja er skilgreind sem mismunur á réttu gildi og nálgunargildi: Skoðum föllin

$$E(t) = f(t) - L(t) \quad \text{(skekkja nálgunarinnar)} \quad \text{og} \quad h(t) = (t - c)^2$$

og gerum til einföldunar ráð fyrir því að $x > c$ (tilvikið $x < c$ er svipað). Föllin E og h eru bæði samfelld á $[c, x]$ og deildanleg á $]c, x[$. Að auki er $h'(t) = 2(t - c) \neq 0$ fyrir öll $t \in]c, x[$, $E(c) = 0$ og $h(c) = 0$. Skv. Almennu meðalgildissetningunni er til $s^* \in]c, x[$ þ.a.

$$\frac{f(x) - L(x)}{(x - c)^2} = \frac{E(x)}{h(x)} = \frac{E(x) - E(c)}{h(x) - h(c)} = \frac{E'(s^*)}{h'(s^*)} \left(= \frac{f'(s^*) - f'(c)}{2(s^* - c)} \right).$$

Nú er

$$E'(c) = f'(c) - L'(c) = f'(c) - f'(c) = 0 \quad \text{og} \quad h'(c) = 2(c - c) = 0.$$

Þar sem E' og h' eru samfelld á $[c, s^*]$ og deildanleg á $]c, s^*[$ og $h''(t) = 2 \neq 0$ getum við notað Almennu meðalgildissetninguna aftur. Til er s á milli c og s^* þannig að

$$\frac{f(x) - L(x)}{(x - c)^2} = \frac{E'(s^*)}{h'(s^*)} = \frac{E'(s^*) - E'(c)}{h'(s^*) - h'(c)} = \frac{E''(s)}{h''(s)} = \frac{f''(s)}{2}.$$

En þá er

$$\frac{f(x) - L(x)}{(x - c)^2} = \frac{f''(s)}{2}.$$

Leysum fyrir $f(x)$ og fáum að

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2} f''(s)(x - c)^2$$

þar sem s er einhver tala á milli x og c. ■

■ **Dæmi 6.7** Finnum bestu línulegu nálgun $L(x)$ við $f(x) = \sin(x)$ um 0 og finnum efri mörk á skekkjuna

$$E(x) = \sin(x) - L(x)$$

■ **Lausn** Byrjum á að reikna út fyrstu og aðra afleiðu $f(x) = \sin x$. Fyrsta afleiða er $f'(x) = \cos x$ og önnur afleiða er $f''(x) = -\sin x$. Við eigum að taka línulegu nálgunina í núlli, svo að við reiknum út fallgildin

$$f(0) = \sin 0 = 0 \quad \text{og}$$
$$f'(0) = \cos 0 = 1.$$

Besta línulega nálgun við $\sin x$ um 0 er þá

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0 + 1 \cdot x = x.$$

Nú er skekkjan skv. Reglu 6.3.1 um línulega nálgun

$$\sin(x) - L(x) = \frac{\sin''(s)}{2}x^2 = -\frac{\sin(s)}{2}x^2 \tag{6.3}$$

fyrir eitthvert s á milli 0 og x (þetta þýðir að til er s sem tryggir fyrra jafnaðarmerkið í (6.3)). Þar sem $|\sin x| \leq 1$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, þá gildir auðvitað einnig $|\sin s| \leq 1$, en þetta er auðvitað gróft metið, og við fáum

$$|E(x)| = |\sin(x) - L(x)| = \left|-\frac{\sin(s)}{2}x^2\right| \leq \frac{x^2}{2}. \tag{6.4}$$

ATH

(i) Fyrir, segjum $x = 0.001$, þá gefur þetta efra mat á skekkjunni að

$$|\sin(x) - x| = |\sin(0.001) - 0.001| \leq 0.5 \cdot 0.001^2 = 0.0000005.$$

(ii) Afhverju reiknuðum við skekkjuna $E(x)$ með tölugildi í (6.4)? Jú af því að það er oft auðveldara að meta skekkjuna þannig og án frekari athugunar þýðir þetta að $-\frac{x^2}{2} \leq \sin x - x \leq \frac{x^2}{2}$ og við getum fullyrt að ef, segjum $x = 0.001$, þá er

$$-0.5 \cdot 10^{-6} \leq \sin(0.001) - 0.001 \leq 0.5 \cdot 10^{-6}.$$

(iii) Við rannsökum betur síðar að það eru upplýsingar eru fólgnar í $f''(s) = -\sin s$ sem gefa til kynna hvort línulega nálgunin er svokallað **ofmat** þ.e. $L(x) \geq f(x)$ eða **vanmat** þ.e. $L(x) \leq f(x)$ í grennd við þann punkt sem línulega nálgunin er tekin. (*Ábending*: Rýnið í jöfnu (6.2) — Athugið að $(x-c)^2$ er aldrei neikvæður þáttur. Hvað segir það um $L(x)$ ef $f''(s) < 0$ eða ef $f''(s) > 0$, og hvað ef $f''(s) = 0$?)

■

■ **Dæmi 6.8** Úr eðlisfræðinni þekkjum við að stöðuorka U hlutar með massa m í þyngdarsviði jarðar er gefin með formúlunni

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

þar sem G er fasti, M er massi jarðar og r er fjarlægðin frá massamiðju jarðar og massamiðju hlutarins. Yfirleitt er mest um vert að geta lagt mat á breytingu á stöðuorku hlutar þegar hann færist nær (eða fjær) jörðu; það er stærðin

$$\Delta U = U(r_2) - U(r_1) = -\frac{GMm}{r_2} + \frac{GMm}{r_1} = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Af hverju notar maður yfirleitt formúluna $U(h) = mgh$, þar sem g er fasti, fyrir hlut í lítilli hæð h yfir yfirborði jarðar? Vegna þess að mhg formúlan er miklu einfaldari og skekkjan í nálguninni er hverfandi ef $h \ll R$. Finnum fyrst bestu línulegu nálgun $L(r)$ við fallið $U(r)$ um radíus jarðar $R \approx 6400\,\text{km}$:

$$L(r) = U(R) + U'(R)(r-R) = U(R) + \frac{GMm}{R^2}(r-R) = U(R) + mg(r-R), \quad \text{með } g = \frac{GM}{R^2}.$$

Samkvæmt setningunni um línulega nálgun gildir (með $r > R$) að til er tala s á milli r og R þ.a.

$$U(r) - L(r) = \frac{1}{2}U''(s)(r-R)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2GMm}{s^3}(r-R)^2 = -\frac{GMm(r-R)^2}{s^3}.$$

Þá er sett $h = r - R$ og

$$mgh = L(r) - U(R) = U(r) - U(R) + \frac{GMmh^2}{s^3}.$$

Stöðuorka hlutar við yfirborð jarðar $U(R)$ er þá núll og skekkjuliðurinn er þá

$$0 < h^2\frac{GMm}{s^3} = h^2\frac{R^2}{R^2}\frac{GMm}{s^3} = mh^2g\frac{R^2}{s^3} < mg\frac{h^2}{R}$$

T.d. er fyrir $m = 1\,\mathrm{kg}$ og $h = 100\,\mathrm{m}$:

$$mgh = 980\,\mathrm{m}^2\mathrm{kg/s}^2$$

og skekkjan er í mesta lagi

$$mg\frac{h^2}{R} = 1\cdot 9.8\cdot\frac{100^2}{6400000} \approx 0.016\,\mathrm{m}^2\mathrm{kg/s}^2.$$

■

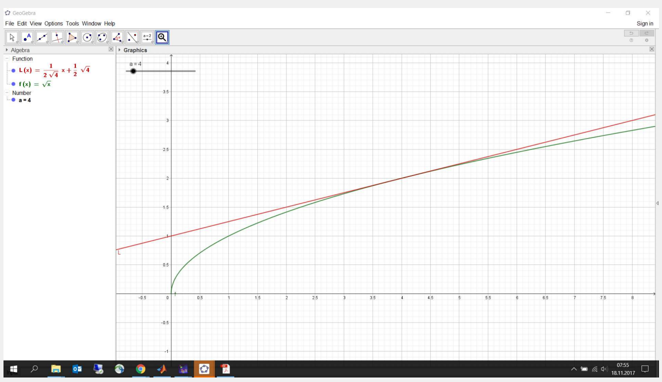
Æfingar 6.3

Æfing 6.3.1 Lítum á fallið $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Sýnið með útreikningum að besta línulega nálgun á f í punktinum $x_0 = c$ verði

$$L(x) = \frac{1}{2\sqrt{c}}x + \frac{1}{2}\sqrt{c}.$$

2) Setjið c í staðinn fyrir x í formúlu L. Hvað fæst?
3) Opnið forritið `Geogebra`, veljið c sem stika, festið síðan $c = 4$. Setjið inn föllin f og L; og fáið upp mynd áþekka þessari



4) Reiknið formúlu L með $c = 4$.
5) Sýnið að $f''(x) < 0$ ef $x > 0$.
6) Notið nú jöfnu (6.2) bls. 171 til að rökstyðja að $L(x) \geq f(x)$ fyrir öll $x \geq 0$.

7) Skilgreinið $M \equiv f''(5)$ og $N \equiv f''(3)$, Færið rök fyrir því að $f''(x)$ liggi á milli M og N ef $x \in]3,5[$ (*Ábending*: sýnið t.d. að $f''(x)$ sé vaxandi fall, þ.e. sýnið að $\operatorname{sgn} f'''(x) = 1$).
8) Notið tölurnar úr síðasta lið og skilgreinið K sem meðaltalið af M og N, þ.e. $K = \frac{M+N}{2}$ og smíðið fleygbogann
$$p(x) \equiv L(x) + \frac{K}{2}(x-c)^2.$$
9) Reiknið út skekkjuna
$$E_2(5) = f(5) - p(5)$$
10) Teiknið inn á eina mynd föllin $f(x), p(x)$ og $L(x)$. Notið myndina til að svara því hvort $p(x)$ sé betri nálgun á $f(x)$ en $L(x)$ á öllu bilinu $[3,5]$ (líka í endapunktum ?).

■

6.4 Taylor margliður

Látum $f :]\,a\,,b\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ vera fall sem er a.m.k. 3-sinnum deildanlegt á $]\,a\,,b\,[$ og látum $c \in \;]\,a\,,b\,[$. Það fastafall (0-ta stigs margliða) sem nálgar fallið f best í nágrenni punktsins c er
$$P_0(x) = f(c).$$
Þá er $P_0(c) = f(c)$. Við höfum samkvæmt Meðalgildissetningunni fyrir öll $x \in \;]\,a\,,b\,[$:
$$E_0(x) \equiv f(x) - P_0(x) = (x-c)f'(s) \quad \text{fyrir eitthvert } s \text{ á milli } c \text{ og } x.$$
Það línulega fall (1-ta stigs margliða) sem nálgar fallið f best í nágrenni punktsins c er
$$P_1(x) = f(c) + (x-c)\cdot f'(c).$$
Þá er $P_1(c) = f(c)$ og $P_1'(c) = f'(c)$. Við höfum samkvæmt Almennu Meðalgildissetninguuni fyrir öll $x \in \;]\,a\,,b\,[$:
$$E_1(x) \equiv f(x) - P_1(x) = (x-c)^2\frac{f''(s)}{2} \quad \text{fyrir eitthvert } s \text{ á milli } c \text{ og } x.$$
Á svipaðan hátt má sýna: Sú 2. stigs margliða sem nálgar fallið f best í nágrenni punktsins c er
$$P_2(x) = f(c) + (x-c)\cdot f'(c) + (x-c)^2\frac{f''(c)}{2}.$$
Þá er $P_2(c) = f(c)$, $P_2'(c) = f'(c)$ og $P_2''(c) = f''(c)$.

Við höfum líka skv. Almennu Meðalgildissetningunni fyrir öll $x \in \;]\,a\,,b\,[$:
$$E_2(x) := f(x) - P_2(x) = (x-c)^3\frac{f^{(3)}(s)}{2\cdot 3} \quad \text{fyrir eitthvert } s \text{ á milli } c \text{ og } x.$$
Almennt er gildir að sú n-ta stigs margliða sem nálgar (a.m.k. $(n+1)$-sinni deildanlega) fallið f best í grennd við c er
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k. \tag{6.5}$$

Þetta köllum við **Taylor-margliðu** fallsins $f(x)$ um punktinn c.

Um Taylor-margliðuna gildir

$$P_n^{(k)}(c) = f^{(k)}(c) \quad \text{fyrir öll } k = 0, 1, \ldots, n$$

og við höfum (líka skv. Almennu Meðalgildissetningunni) fyrir öll $x \in]a, b[$

Skekkjuformúla fyrir Taylor-nálgun

Regla 6.4.1

$$E_n(x) \equiv f(x) - P_n(x) = (x-c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} \quad \text{fyrir eitthvert } s \text{ á milli } c \text{ og } x.$$

Athugum:

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + (x-c)^{k+1}\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}$$

þ.a. stuðlarnir við lægri veldi breytast ekki þó að við bætum við liðum í Taylor-margliðunni.

Athugið að skekkjuliðurinn $E_n(x)$ hefur alveg sama útlit og næsti liður í Taylor-margliðunni, nema hvað $f^{(n+1)}(s)$ fyrir eitthvert s á milli c og x kemur í stað $f^{(n+1)}(c)$.

Taylor-margliður eru mjög gagnlegar til þess að reikna út fallgildi deildanlegra falla með eins mikilli nákvæmni og maður vill:

■ **Dæmi 6.9** Ef f er 6 sinnum deildanlegt á $\mathbb{R}$ þá er Taylor margliða fallsins f um 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + \frac{f^{(6)}(s)}{720}x^6$$

þar sem s er einhver tala á milli 0 og x.

Með $f(x) = \sin x$ þýðir þetta

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 0 + x\cos 0 + \frac{-\sin 0}{2}x^2 + \frac{-\cos 0}{6}x^3 + \frac{\sin 0}{24}x^4 + \frac{\cos 0}{120}x^5 + \frac{-\sin s}{720}x^6 \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{\sin s}{720}x^6\end{aligned}$$

fyrir eitthvert s á milli 0 og x. Sér í lagi er

$$|\sin x - (x - x^3/6 + x^5/120)| = |\sin s||x^6|/720 \leq |x^6|/720.$$

Með $f(x) = \cos x$ fáum við

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 0 + (-\sin 0)x + \frac{-\cos 0}{2}x^2 + \frac{\sin 0}{6}x^3 + \frac{\cos 0}{24}x^4 + \frac{-\sin 0}{120}x^5 + \frac{-\cos s}{720}x^6 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{-\cos s}{720}x^6,\end{aligned}$$

fyrir eitthvert s á milli 0 og x. Sér í lagi er

$$|\cos x - (1 - x^2/2 + x^4/24)| = |\cos s||x^6|/720 \leq |x^6|/720.$$

■

■ **Dæmi 6.10** Fyrir hvaða $n \in \mathbb{N}$ sem er gildir: n-ta stigs Taylor-margliða $\exp$ um 0 er

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Skekkjuliðurinn er

$$E_n(x) = \exp(x) - P_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1},$$

þar sem s er á milli 0 og x. ■

Nú fáum við mikilvæga setningu sem gerir okkur kleift að reikna fjöldann allan af Taylor-margliðum með því að eiga fáeinar tiltækar.

Regla 6.4.2 — Ótvíræðni Taylor-margliða. Látum $f\ :\ ]a, b[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ vera fall sem er $(n+1)$-sinni deildanlegt og $c \in]a, b[$. Látum $Q_n(x)$ vera margliðu af stigi $\leq n$ og gerum ráð fyrir að

$$f(x) = Q_n(x) + O((x-c)^{n+1}) \tag{6.6}$$

Þá er $Q_n(x) = P_n(x)$ þar sem $P_n(x)$ er $n-$ta stigs Taylor-margliða f um c.

Athugið, að formúla (6.6) þýðir að

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-c)^{n+1}} = K \in \mathbb{R}.$$

Þ.e. síðasti liðurinn í formúlu (6.6) segir okkur að skekkjan sé af stærðargráðunni $(x-c)^{n+1}$. Á ensku er þetta kallað *big O notation*.

Stundum eru Taylor-margliður um $c = 0$ kallaðar Maclaurin-margliður (e. Maclaurin polynomials). Nokkrar mikilvægustu Maclaurin-margliðurnar eru:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})
\end{aligned}$$

Út frá þessum Taylor-margliðum getum við fundið Taylor-margliður fyrir mörg önnur föll.

■ **Dæmi 6.11** Finnum 10-stigs Taylor-margliðu $f(x) = e^{-x^2}$ um $c = 0$.

■ **Lausn** Við vitum skv. töflu að

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + O(t^6).$$

Þá er með breytuskiptunum $t = -x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + O(x^{12}).$$

En þá er skv. Reglu 6.4.2 10-stigs Taylor-margliða fallsins $f(x) = e^{-x^2}$ um 0 gefin með

$$P_{10}(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120}.$$

Líka gildir

$$P_{11}(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120}.$$

■

Við getum notað formúlur í töflunni til að finna Taylor-margliður um einhvern annan punkt c.

■ **Dæmi 6.12** Finnum 5-stigs Taylor-margliðu $\sin(x)$ um π.

■ **Lausn** Sjáum fyrst í töflu að Taylor-margliða $\sin(x)$ um 0 er

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{\sin s}{720}x^6.$$

og umskrifum svo $\sin(x) = \sin(\pi + (x - \pi)) = -\sin(x - \pi)$ svo við getum skrifað Taylor-margliðuna um π með því að margfalda Taylor-margliðuna með -1 og setja $x - \pi$ inn fyrir x, sem gefur

$$\sin(x) = -\sin(x - \pi) = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{6} - \frac{(x - \pi)^5}{120} + \frac{\sin s}{720}(x - \pi)^6.$$

■

■ **Dæmi 6.13** Finnum 3-stigs Taylor-margliðu $f(x) = e^{2x}$ um $c = 1$.

■ **Lausn** Við vitum

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4).$$

Nú er

$$f(x) = e^2 e^{2(x-1)}.$$

Þá er með breytuskiptunum $t = 2(x - 1)$:

$$e^{2x} = e^2 e^{2(x-1)} = e^2 \left[1 + 2(x - 1) + 2(x - 1)^2 + \frac{4}{3}(x - 1)^3 + O((x - 1)^4)\right].$$

En þá er skv. Reglu 6.4.2 3. stigs Taylor-margliða fallsins $f(x) = e^{2x}$ um 1 gefin með

$$P_3(x) = e^2 + 2e^2(x - 1) + 2e^2(x - 1)^2 + \frac{4}{3}e^2(x - 1)^3.$$

Ath. við vildum fá $(x - 1)^k$ í Taylor-margliðunni, þess vegna breytuskiptin $t = 2(x - 1)$.

■

Æfingar 6.4

Æfing 6.4.1 Finnið Taylor-margliður fyrir eftirfarandi föll:

(i) $f(x) = e^{-x}$; margliðu af 5. stigi um $c = 0$.

(ii) $f(x) = \cos x$; margliðu af 4. stigi um $c = \pi/4$.

(iii)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad \text{margliðu af } 5. \text{ stigi um } c = 0.$$

(iv)

$$f(x) = \frac{1}{2+x}; \quad \text{margliðu af } n\text{-ta stigi um } c = 1.$$

■

6.5 Markgildi með Taylor margliðum og regla l'Hospital

Með því að nota Taylor-margliður höfum við nýja aðferð til þess að reikna markgildi af gerðinni

$$\lim_{x\to c} \frac{h(x)}{g(x)}, \quad \text{þar sem} \quad \lim_{x\to c} h(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, \text{oft táknað} \quad \left[\frac{0}{0}\right].$$

Ath. við getum ekki notað Markgildisreglurnar sem við lærðum áður.
Við sýnum þetta með dæmi.

■ **Dæmi 6.14** Reiknum

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}.$$

Nú er

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + O(x^4)$$

svo

$$2e^x - 2 - 2x - x^2 = x^3/3 + O(x^4).$$

En líka

$$\sin(x) = x - x^3/6 + O(x^5) \quad (*)$$

og þá

$$\sin(2x) = 2x - 8x^3/6 + O(x^5) \quad (**)$$

sem þýðir að

$$2\sin(x) - \sin(2x) = x^3 + O(x^5) \quad (***)$$

Ath. vel hvað $O(x^5)$ þýðir. Við erum ekki að tala um sama fallið O í $(*)$, $(**)$ og $(***)$. Við erum bara að segja til um hver stærðargráða skekkjunnar er!
Nú

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{2e^x-2-2x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+O(x^5)}{x^3/3+O(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+O(x^2)}{1/3+O(x)}=\frac{1}{1/3}=3.$$

Ath. $O(x^5)/x^3=O(x^2)$ og $O(x^4)/x^3=O(x)$. ■

Það flýtir oft fyrir að láta forrit reikna út Taylor margliður. Sjá t.d. í MATLAB :

http://www.mathworks.se/help/symbolic/taylor.html

Önnur gagnleg aðferð til þess að reikna markgildi af gerðinni $[0/0]$ er regla l'Hospital.

Regla 6.5.1 — Regla l'Hospital. Látum $f,g:\,]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ vera deildanleg föll þ.a. $g'(x)\neq 0$ fyrir öll $x\in\,]a,b[$. Gerum ráð fyrir að

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0.$$

Þá gildir: ef markgildið

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\quad (L\in\mathbb{R}\text{ eða } L=+\infty \text{ eða } L=-\infty)$$

er til, þá er markgildið $\lim_{x\to a+}f(x)/g(x)$ til og

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

Sönnun. Leiðir af Almennu Meðalgildissetningunni. Við skilgreinum föllin

$$F(x):=\begin{cases}f(x), & \text{ef } x\in\,]a,b[,\\ 0, & \text{ef } x=a,\end{cases}\qquad\text{og}\qquad G(x):=\begin{cases}g(x), & \text{ef } x\in\,]a,b[,\\ 0, & \text{ef } x=a.\end{cases}$$

Þá eru föllin F og G samfelld á $[a,x]$ og deildanleg á $]a,x[$ fyrir öll $x\in\,]a,b[$ og skv. Almennu Meðalgildissetningunni er fyrir sérhvert $x\in\,]a,b[$ til c_x á milli a og x þ.a.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}.$$

Vegna $a<c_x<x$ gildir

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}=\lim_{c_x\to a+}\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

■

Ath. Regla l'Hospitals gildir líka ef $x\to b-$ eða $x\to c\in\,]a,b[$. $a=-\infty$ og $b=+\infty$ er líka í lagi og nota má aðferðina til þess að leysa markgildi af gerðinni

$$\lim_{x\to c}\frac{h(x)}{g(x)},\quad\text{þar sem}\quad \lim_{x\to c}h(x)=\pm\infty\ \text{ og }\ \lim_{x\to c}g(x)=\pm\infty\quad \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right].$$

■ **Dæmi 6.15** Reiknum markgildið

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

■

■ **Dæmi 6.16** Reiknum markgildið

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{0}{2-0} = 0.$$

■

■ **Dæmi 6.17** Reikið markgildið

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

■ **Lausn** Með Reglu l'Hospital fæst

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

og frá $\sin(x) = x + O(x^3)$ (Taylor) fæst líka

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+O(x^3)}{x} = 1.$$

■

Æfingar 6.5

Æfing 6.5.1 Reiknið eftirfarandi markgildi með Reglu l'Hospital og með Taylor-margliðum þar sem við á:

(i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\tan 4x}$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

(iii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$$

(iv)
$$\lim_{x\to 1-} \frac{\arccos x}{x-1}$$

(v)
$$\lim_{x\to 0+} x^{\sqrt{x}}$$

(vi)
$$\lim_{x\to 1+} \left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{\ln x}\right)$$

■

6.6 Lausnir á völdum dæmum

■ **Dæmi 6.18 — Án reiknivélar.** Tvær jákvæðar tölur hafa summuna 7. Hvert er hæsta gildi á mögulegu margfeldi þessara talna?

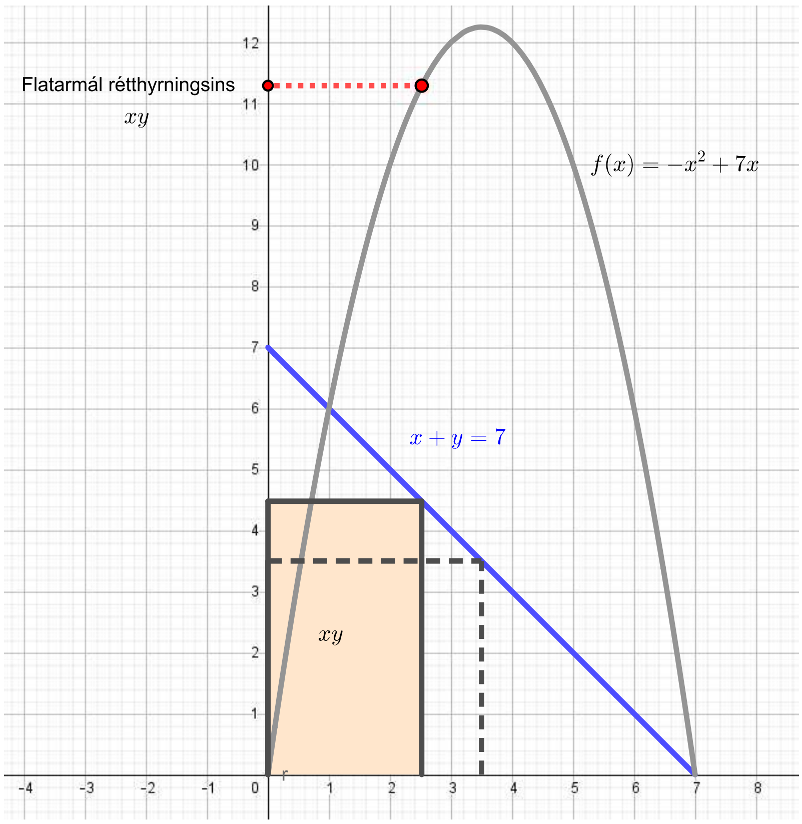
■ **Lausn** Látum x og y vera jákvæðar tölur þannig að $x+y=7$. Þá er $y=7-x$ og margfeldi þeirra þá $xy=x(7-x)$. Út frá þessu skilgreinum við fallið

$$f(x)=-x^2+7x. \quad x\in[0,7].$$

Þetta er samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili, f tekur því bæði hæsta og lægsta gildi á bilinu $[0,7]$ samkvæmt Útgildissetningunni.

Fallið hefur afleiðu $f'(x)=-2x+7$ og tekur útgildi þegar $-2x+7=0$, þ.e. þegar $x=7/2$. Nú er $f''(x)=-2$ fyrir öll x. Þá er $f''(7/2)<0$ sem þýðir að við höfum hágildi í $x=7/2$, og þar er $y=7-7/2=7/2$. Þar sem við höfum aðeins eitt útgildi og það gefur hágildi, þá gefur það jafnframt hæsta gildi. Stærsta mögulega margfeldi x og y er þá

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}=12.25.$$



Mynd 6.3

■

■ **Dæmi 6.19** Finnið út hvort gefin föll hafi útgildi. Finnið útgildin ef þau er til.

(i) $f(x)=x+2$ á $[-1,1]$

(ii) $f(x) = x + 2$ á $]-\infty, 1]$
(iii) $f(x) = |x - 1|$ á $[-2, 2]$

■

■ **Lausn**

(i) Fallið hefur lægsta gildi $f(-1) = 1$ og hæsta gildi $f(1) = 3$.
(ii) Fallið hefur hæsta gildi $f(1) = 3$.
(iii) Fallið hefur lægsta gildið $f(1) = 0$ og hágildin $f(-2) = 3$ og $f(2) = 1$. Staðbundna hágildið $f(-2) = 3$ er einnig hæsta gildi fallsins.

■ **Dæmi 6.20 — Án reiknivélar.** Finnið og flokkið öll útgildi fallsins $f(x) = x^3(x-1)^2$. Segið til um hvort um hágildi eða lággildi er að ræða eða hæstu og lægstu gildi.

■ **Lausn** Afleiða $f(x) = x^3(x-1)^2$ er fallið $f'(x) = 3x^2(x-1)^2 + 2x^3(x-1)$. Fallið er skilgreint á $\mathbb{R}$ og samkvæmt formengishefðinni tökum við $\mathbb{R}$ sem formengi f. Þáttum og fáum

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2(x-1)[3(x-1)+2x] \\ &= x^2(x-1)(5x-3) \\ &= 5x^2(x-1)(x-3/5) \end{aligned}$$

Rætur $f'(x)$ eru þrjár: $x_1 = 0, x_2 = 3/5$ og $x_3 = 1$. Könnum þau fjögur hlutbil sem ákvarðast af rótunum, (f er einhalla á hverju og einu hlutbili):

Bil 1) Ef $x < 0$ þá er $\operatorname{sgn}[5x^2(x-1)(x-3/5)] = (-)^2(-)(-) = +$
Bil 2) Ef $0 < x < 3/5$ þá er $\operatorname{sgn}[5x^2(x-1)(x-3/5)] = (+)^2(-)(-) = +$
Bil 3) Ef $3/5 < x < 1$ þá er $\operatorname{sgn}[5x^2(x-1)(x-3/5)] = (+)^2(-)(+) = -$
Bil 4) Ef $x > 1$ þá er $\operatorname{sgn}[5x^2(x-1)(x-3/5)] = (+)^2(+)(+) = +$

Þar sem að $+$ táknar að fallið f er vaxandi á gefnu bili, en $-$ táknar að f er minnkandi á hlutbili. Stundum notar maður örvar til að segja það sama, og örvamyndin

$$\nearrow 0 \nearrow 3/5 \searrow 1 \nearrow$$

gefur til kynna, að það er

✓ stallur (beygjuskil) í $x_1 = 0$
✓ hágildi í $x_2 = 3/5$,
✓ lággildi í $x_3 = 1$.

Þetta eru ekki hæstu og lægstu gildi því að (við þurfum að skoða allt formengið)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{en}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Athugið, að við vorum ekki beðin um að reikna út fallgildi í útgildispunktum, svo að við megum láta það vera, heldur aðeins að finna hvar þau eru tekin og flokka þau. Með flokkun er átt við, að maður tilgreinir fyrir hvert og eitt mögulegt útgildi að það er eitt af eftirfarandi: Hágildi, lággildi, stallur, hæsta gildi eða lægsta gildi.

■

■ **Dæmi 6.21 — Án reiknivélar.** Finnið og flokkið öll útgildi fallsins $f(x) = 2x - \arcsin x$. Segið til um hvort um hágildi eða lággildi er að ræða eða hæstu og lægstu gildi.

■ **Lausn** Fallið $f(x) = 2x - \arcsin x$ er skilgreint á bilinu $[-1, 1]$. Afleiða f er fallið $f'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ skilgreint á $]-1, 1[$. Finnum rætur jöfnunnar $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \\ \sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ x^2 &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0 \end{aligned}$$

Rætur $f'(x) = 0$ eru þá $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Möguleg útgildi er þá tekin í punktunum

(a) $x_0 = -1$, (b) $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, (c) $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, (d) $x_3 = 1$.

Fallið f er einhalla á sérhverju hlutbilanna $[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}[,]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[$ og $]\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$. Könnum það frekar:

(i) Ef $x \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}[$ þá er $2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$,
(ii) Ef $x \in]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[$ þá er $2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$,
(iii) Ef $x \in]\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ þá er $2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$.

Örvamyndin $-1 \searrow -\sqrt{3}/2 \nearrow \sqrt{3}/2 \searrow 1$ gefur til kynna að það er hágildi í $x_0 = -1$, lággildi í $x_1 = -\sqrt{3}/2$, hágildi í $x_2 = \sqrt{3}/2$ og lággildi í $x_3 = 1$. Til að flokka útgildin er nóg að geta borið saman fallgildin:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2(-1) - \arcsin(-1) = -2 - (-\pi/2) = \pi/2 - 2 \approx 1.5 - 2 = -0.5, \\ f(-\sqrt{3}/2) &= 2(-\sqrt{3}/2) - \arcsin(-\sqrt{3}/2) = -\sqrt{3} - (-\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3} \\ &\approx 1 - 1.7 = -0.7 \\ f(\sqrt{3}/2) &= 2(\sqrt{3}/2) - \arcsin(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} - \pi/3 \approx 1.7 - 1 - = 0.7 \\ f(1) &= 2 - \arcsin 1 = 2 - \pi/2 \approx 2 - 1.5 = 0.5. \end{aligned}$$

Þá er (með eins aukastaf nálgun á fallgildum)
✓ $f(-1) \approx -0.5$ hágildi
✓ $f(-\sqrt{3}/2)) = -0.7$ lægsta gildi,
✓ $f(\sqrt{3}/2) \approx 0.7$ hæsta gildi, og
✓ $f(1) \approx 0.5$ er lággildi.

■

■ **Dæmi 6.22** Finnið stystu fjarlægð punktsins $P = (8, 1)$ frá ferlinum $y = 1 + x^{3/2}$. Athugum að formengi ferilsins er $[0, +\infty[$.

■ **Lausn** Látum $d = d(x, y)$ vera fjarlægðina á milli punkts $(x, y) = (x, 1 + x^{3/2})$ á ferlinum, og punktsins $P = (8, 1)$. Greinilega er $P = (8, 1)$ ekki á ferlinum, af því að $1 + 8^{3/2} \neq 1$. Regla Pýþagórasar gefur

$$[d(x, y)]^2 = (x - 8)^2 + (y - 1)^2.$$

Nú er $y - 1 = x^{3/2}$, og við skrifum d sem fall af x eingöngu. Fáum

$$\begin{aligned} [d(x)]^2 &= (x - 8)^2 + (x^{3/2})^2 \\ &= (x - 8)^2 + x^3 \end{aligned}$$

Deildum fólgið og fáum

$$2d(x)d'(x) = 2(x-8) + 3x^2$$

Þar sem $P = (8,1)$ er ekki á ferlinum þá er $d(x) \neq 0$ fyrir öll x svo að við getum skrifað

$$d'(x) = \frac{2(x-8) + 3x^2}{2d(x)}$$

og þá sést að $d'(x) = 0$ aðeins ef $2(x-8) + 3x^2 = 0$. þ.e.

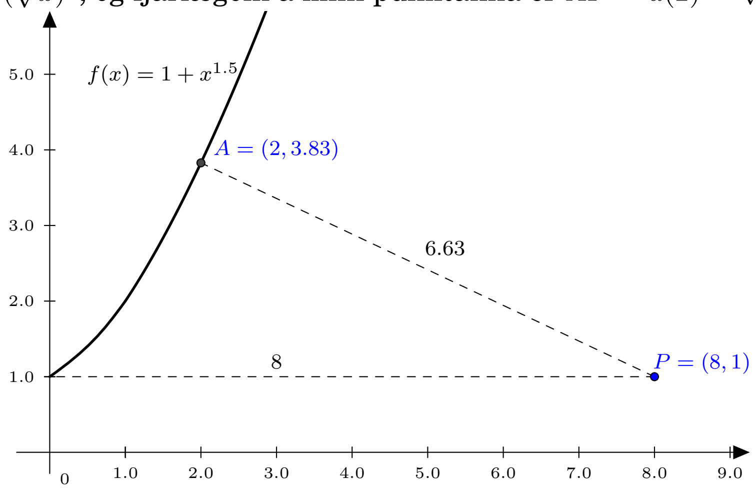
$$3x^2 + 2x - 16 = 0$$

sem hefur rætur $x_1 = 2$ og $x_2 = -\frac{8}{3}$. Þar sem $\mathrm{Dom}(y) = [0, +\infty[$ þá kemur $x = -\frac{8}{3}$ ekki til greina. Við þurfum því aðeins að bera saman $x_0 = 0, x_1 = 2$ og $\lim_{x\to+\infty} d(x)$.

Nú gefa reikningar.

$$\begin{aligned} d^2(0) &= 64, \\ d^2(2) &= 44, \quad \text{og} \\ \lim_{x\to+\infty} d^2(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Þá er $P = (8,1)$ í minnstri fjarlægð frá punktinum $A = (2, 2\sqrt{2})$ á ferlinum $y = 1 + (\sqrt{x})^3$, og fjarlægðin á milli punktanna er $\overline{AP} = d(2) = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} \approx 6.63$.



■

■ **Dæmi 6.23** Finnið línulega nálgun við föllin í gefnum punktum.

1) $f(x) = x^2$ um $x = 3$
2) $f(x) = \sin x$ um $x = \pi$
3) $f(x) = \sin^2 x$ um $x = \pi/6$

■ **Lausn** Við notum formúluna $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ í öllum liðum.
1) $x = a$, með $a = 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, & f(3) &= 9, \\ f'(x) &= 2x, & f'(3) &= 6. \end{aligned}$$

$$L(x) = 9 + 6(x-3) = 6x - 9.$$

2) $x = a$, með $a = \pi$.

$$f(x) = \sin x, \qquad f(\pi) = \sin(\pi) = 0,$$
$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$L(x) = -(x - \pi) = \pi - x.$

3) $x = a$, með $a = \pi/6$.

$$f(x) = \sin^2 x, \qquad f(\pi/6) = (\sin(\pi/6))^2 = (1/2)^2 = \frac{1}{4},$$
$$f'(x) = 2\sin x \cos x, \qquad f'(\pi/6) = 2\sin(\pi/6)\cos(\pi/6) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$L(x) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}).$$

■

■ **Dæmi 6.24** (i) Finnið heppilega línulega Taylor nálgun til meta $\sin(3.14)$. Finnið hvort (ii) skekkjan $E(3.14)$ er neikvæð (<0) eða jákvæð (>0) og (iii) metið stærð hennar. (iv) Notið þessar upplýsingar til að segja til um bil sem inniheldur örugglega rétta gildið.

■ **Lausn** Þar sem $f(x) = \sin x$ er tvisvar deildanlegt fall, þá segir í setningu Taylors, að til er tala s á milli x og π þannig að jafnan

$$f(x) = L(x) + \frac{f''(s)}{2}(x - \pi)^2$$

sé uppfyllt; $L(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi)$ er besta línulega nálgun um $x = \pi$.

(i) Við veljum einfaldlega línulega nálgun um π af því að við þekkjum fallgildi sínuss í π. Finnum fallgildi og fyrstu tvær afleiður:

$$f(x) = \sin x, \qquad f(\pi) = \sin(\pi) = 0,$$
$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(\pi) = \cos(\pi) = -1,$$
$$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(s) = -\sin(s).$$

Fáum $L(x) = \pi - x$ og þá

$$L(3.14) = \pi - 3.14 \le 0.00159265358.$$

Hér er $s \in]3.14, \pi[$ svo að $\sin s > 0$ en þá er $-\sin(s) < 0$.

þá sést að skekkjuliðurinn

$$E(3.14) = \frac{f''(s)}{2}(3.14 - \pi)^2$$
$$= -\frac{\sin(s)}{2}(3.14 - \pi)^2 < 0$$

(ii) $E(3.14) < 0$: Þar sem skekkjan er neikvæð tala þá er $L(3.14)$ ofmat á $f(3.14)$. Þá erum við komin með efri mörk fyrir rétta gildið, þ.e.

$$f(3.14) < L(3.14)\,.$$

(iii) Metum stærð skekkjunnar.

Ef rétt gildi $f(p)$ er ekki þekkt, þá er ekki hægt að meta nákvæmlega stærð skekkju $|E(p)|$ sem felst í línulegri nálgun $L(p)$, eða hvaða nálgun sem vera skal. Þess vegna finnum við yfirtölu eða efri mörk fyrir stærð skekkjunnar, og ef við höfum tvær yfirtölur fyrir stærð skekkju þá tökum við þá minni: Ef við höfum stærðarmat á annarri afleiðu á gefnu bili I í línulegri nálgun, þá getum við metið stærð skekkjunnar á I .

Hér er

$$\max_{\zeta \in I}\{|f''(\zeta)|\} = \max_{\zeta \in]3.14,\pi[}\{|\sin\zeta|\} \le \sin 3.14 \le L(3.14) = \pi - 3.14$$

Í þessu verkefni getum við líka notað línulegu nálgunina í skekkjumatinu!

$$E(3.14) \le \frac{L(3.14)}{2}(3.14-\pi)^2 = \frac{\pi - 3.14}{2}(3.14-\pi)^2$$

Þá höfum við fengið neðra mat á rétt gildi $f(3.14) = \sin(3.14)$, þ.e.

$$L(3.14) - \frac{\pi - 3.14}{2}(3.14-\pi)^2 < f(3.14).$$

(iv) Samantekið gefur efra og neðra matið bil sem inniheldur rétta gildið

$$L(3.14) - \frac{\pi - 3.14}{2}(3.14-\pi)^2 < f(3.14) < L(3.14)$$

eða

$$0.001592652 < \sin(3.14) < 0.001592654.$$

Átta fyrstu aukastöfum ber saman í efra og neðra mati á réttu fallgildi.

■

■ **Dæmi 6.25 — Úr hagfræði.** Stærð Q vex samkvæmt deildajöfnunni

$$\frac{dQ}{dt} = kQ^3(L-Q)^5$$

þar sem k og L eru jákvæðir fastar. Hversu stórt er Q þegar það vex hraðast?

■ **Lausn** Afleiðan

$$\frac{dQ}{dt} = Q' = kQ^3(L-Q)^5$$

er mæling á vaxtarhraða í punktinum $Q(t)$. Við viljum finna hámark $\frac{dQ}{dt}$, og leysum því jöfnuna $\frac{d^2Q}{dt^2}(t) = 0$. Reiknum

$$\begin{aligned}
\frac{d^2Q}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(kQ^3(L-Q)^5\right) \\
&= 3kQ^2Q'(L-Q)^5 + 5kQ^3(L-Q)^4(-Q') \\
&= kQ^2(L-Q)^4Q'[3(L-Q) - 5Q] \\
&= 8kQ^2(L-Q)^4Q'\left(\frac{3}{8}L - Q\right) \\
&= 8kQ^2(L-Q)^4kQ^3(L-Q)^5\left(\frac{3}{8}L - Q\right) \\
&= 8k^2Q^5(L-Q)^9\left(\frac{3}{8}L - Q\right)
\end{aligned}$$

og fáum að stöðupunktar $\frac{dQ}{dt}$ eru

1. $Q = 0$, 2. $Q = \frac{3}{8}L$, 3. $Q = L$.

Greinilega er vaxtarhraði $Q(t)$ núll þegar $Q(t_1) = 0$ eða $Q(t_2) = L$, fyrir einhverja tíma t_1 og t_2. Hinsvegar þegar $Q(t_*) = \frac{3}{8}L$ fyrir einhvern tíma t_*, og vegna þess að k og L eru jákvæðir fastar, þá sést að

$$\frac{dQ}{dt}(t_*) = k\,(3L/8)^3\,(L - 3L/8)^5 > 0$$

Við höfum ekki upplýsingar um formengi Q, en athugum hver vaxtarhraði Q yrði ef Q mætti stefna á plús eða mínus óendanlegt:

$$\lim_{Q\to+\infty} kQ^3(L-Q)^5 = -\infty$$
$$\lim_{Q\to-\infty} kQ^3(L-Q)^5 = -\infty.$$

Í öllu falli vex Q hraðast þegar $Q = \frac{3}{8}L$.

■

■ **Dæmi 6.26** Finnið Taylor margliður fallanna með því að nota skilgreiningu á Taylor margliðum.

(i) $f(x) = \cos x$ um $x = \pi/4$, stig margliðu 3.

(ii) $f(x) = \sqrt{x}$ um $x = 4$, stig margliðu 3.

■ **Lausn** Þriðja stigs Taylor margliða fyrir $f(x)$ um $x = a$ fæst með formúlunni

$$p_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(i) Hér er $f(x) = \cos x$ og $a = \pi/4$. Reiknum út $f(\pi/4), f'(\pi/4), f''(\pi/4)$ og $f'''(\pi/4)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(\pi/4) &= \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ f'(x) &= -\sin x & f'(\pi/4) &= -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(\pi/4) &= -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(\pi/4) &= \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

Fáum

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(\pi/4) + f'(\pi/4)(x-\pi/4) + \frac{f''(\pi/4)}{2!}(x-\pi/4)^2 + \frac{f'''(\pi/4)}{3!}(x-\pi/4)^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-\pi/4)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}(x-\pi/4)^3 \end{aligned}$$

(ii) Hér er $f(x) = \sqrt{x}$ og $a = 4$. Reiknum út $f(4), f'(4), f''(4)$ og $f'''(4)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} & f(4) &= \sqrt{(4)} = 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & f'(4) &= \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4(\sqrt{x})^3} & f''(4) &= -\frac{1}{4(\sqrt{4})^3} = -\frac{1}{32} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8(\sqrt{x})^5} & f'''(4) &= \frac{3}{8(\sqrt{4})^5} = \frac{3}{256}. \end{aligned}$$

Fáum

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 \\
&= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3
\end{aligned}
$$

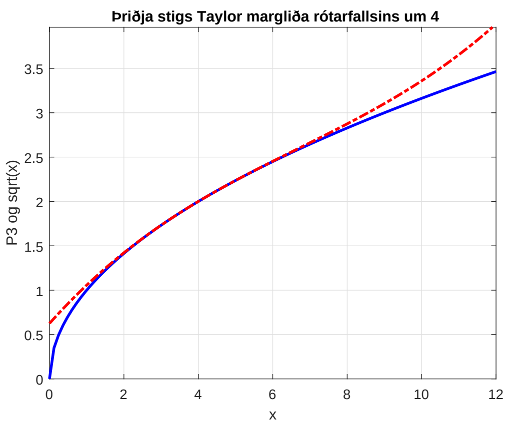
MATLAB

```
syms x;
P3 = taylor(sqrt(x),x,'ExpansionPoint', 4,'Order', 4)
```

gefur

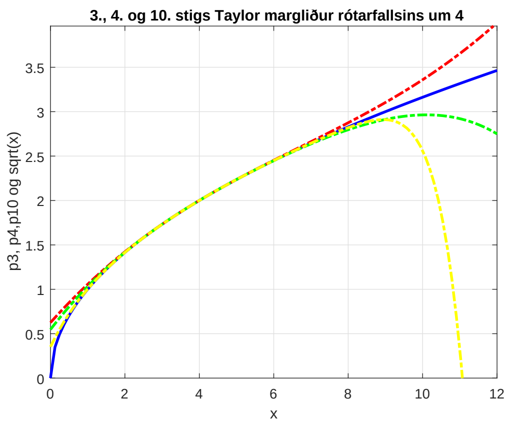
```
P3 =

x/4 - (x - 4)^2/64 + (x - 4)^3/512 + 1
```

Það er lærdómsríkt að draga upp nálgunarferil og bera við feril fallsins sem hann á að nálga.



(a) Blái ferillinn er fallið $f(x) = \sqrt{x}$. Rauðu línustrikin tákna feril 3.stigs Taylor-margliðunnar fyrir f um $x = 4$.

$$p_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$



(b) Þriðja, fjórða og tíunda stigs Taylor margliður um 4 fyrir $\sqrt{x}$. Ferill 4. stigs margliðunnar er grænn en ferill 10. stigs margliðunnar er gulur.

■ Keyrsluskrá 13

```
%% Rótarfallið og þriðja stigs Taylor margliða þess um 4
    syms x
% Þriðja stigs Taylor margliða fyrir sqrt(x)
    P3 = taylor(sqrt(x),x,'ExpansionPoint', 4,'Order', 4);
    a=0; b=12;
    t = linspace(a,b);
```

```
% Nálgunarmargliðan
    p3 = 1 + t./4 - (t - 4).^2/64 + (t - 4).^3/512;
    f = sqrt(t);
figure
    plot( t, f, 'b',  t , p3, 'r-.' , 'LineWidth', 2)
% hnitakerfi
    grid on
% Setjum mörk á hnitaásana
    axis([a b min(f) max(f)+0.5])
% Setjum titil á grafið og merkjum ása
    title('Þriðja stigs Taylor margliða rótarfallsins um 4')
    xlabel('x')
    ylabel('P3 og sqrt(x)')
% prenta út myndina sem eps skrá
print -depsc taylor1.eps
```

■

■ Dæmi 6.27

(i) Finnið 6. stigs Taylor margliðu breiðbogans $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ um punktinn $x = 0$.
(Ábending: Hér er hægt að nota niðurstöður úr Dæmi 4.32 á bls. 140.)

(ii) Metið skekkjuliðinn.

■ Lausn

(i) Reiknum fyrst án þess að nota ábendinguna:

$$
\begin{aligned}
f(x) = f^{(0)}(x) &= \frac{1}{1-x} & f^{(0)}(0) &= 1 \\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} & f^{(1)}(0) &= 1 \\
f^{(2)}(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} & f^{(2)}(0) &= 2 \\
f^{(3)}(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} & f^{(3)}(x) &= 6 = 3! \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1-x)^5} & f^{(4)}(x) &= 24 = 4! \\
f^{(5)}(x) &= \frac{120}{(1-x)^6} & f^{(5)}(x) &= 120 = 5! \\
f^{(6)}(x) &= \frac{720}{(1-x)^7} & f^{(6)}(x) &= 720 = 6! \\
f^{(7)}(x) &= \frac{7!}{(1-x)^8} & f^{(7)}(s) &= \frac{7!}{(1-s)^8}, \quad \exists s \in]0, x[
\end{aligned}
$$

Reiknum svo út 6. stigs Taylor margliðu um 0:

$$
\begin{aligned}
p_6(x) &= \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\
&= f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 \\
&= 1 + x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{4!}{4!}x^4 + \frac{5!}{5!}x^5 + \frac{6!}{6!}x^6 \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.
\end{aligned}
$$

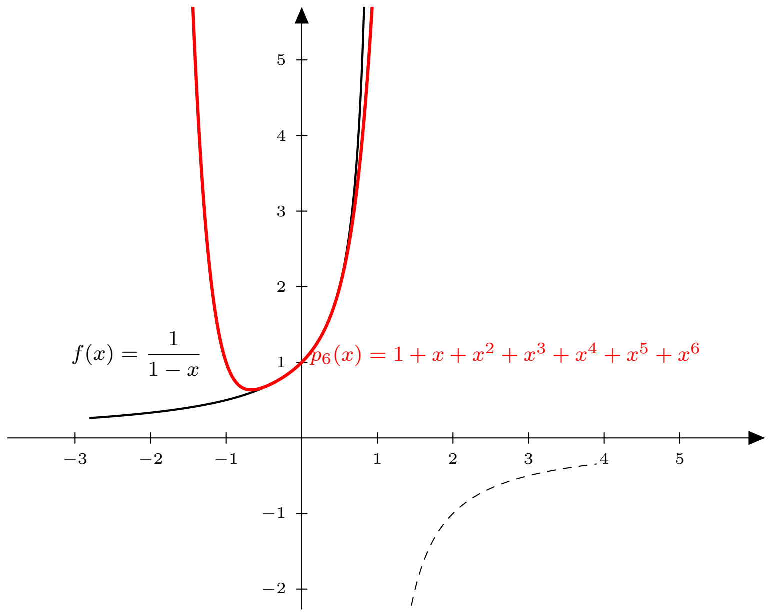
Sýnum líka hvernig nota má ábendinguna: Allar afleiður fallsins $f(x) = \dfrac{1}{a+bx}$ er hægt að setja fram með fomúlunni $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \dfrac{n!b^n}{(a+bx)^{n+1}}$. Hér er $a = 1$ og $b = -1$, svo að allar afleiður fallsins $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ eru gefnar með formúlunni[1]

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!(-1)^n}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Þá er

$$f^{(k)}(0) = k!, \quad k = 0, 1, \dots, 6 \text{ og } f^{(7)}(s) = \frac{7!}{(1-s)^8}, \quad \exists s \in]0, x[.$$

Framhaldið gefur eins og áður segir $p_6(x) = \sum_{k=0}^{6} x^k$. Drögum loks upp fallrit f og nálgunarmargliðunnar í einni mynd.



(ii) Við sjáum af myndinni að nálgunarmargliðan er fjarri réttu lagi þegar x nálgast -1 frá hægri. Einnig fjarlægjast ferlarnir þegar x stefnir á 1 frá vinstri. Þetta skulum við rannsaka:

Formúla fyrir skekkjunni er

$$E_6(x) = \frac{f^{(7)}(s)}{7!}x^7 = \frac{x^7}{(1-s)^8} \quad \text{þar sem } s \text{ er einhver tala á milli } 0 \text{ og } x.$$

Við vorum að nálga fallið $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ sem er óskilgreint í $x = 1$, en það er samfellt og hefur samfelldar afleiður fyrir $x < 1$. Þar sem nálgunarformúlan er tekin um núll, gildir setning Taylors aðeins fyrir $x < 1$ og þá $s < x < 1$.

[1]Notum veldaregluna $u^n v^n = (uv)^n$ fyrir $(-1)^n \cdot (-1)^n = ((-1)\cdot(-1))^n = (1)^n = 1$.

Rannsökum nú skekkjuna fyrir x á bilinu $[0, 1[$

Festum nú eitthvert x á bilinu $[0, 1[$. Fallið $f^{(7)}(s) = \frac{7!}{(1-s)^8}$, sem er fall af s en ekki x, er stranglega vaxandi á bilinu $]0, x[$ og til að fá (skynsamlega lága) yfirtölu fyrir stærð skekkjunnar myndum við alltaf velja $s = x$, af því að

$$\max_{s\in]0,x[} |f^{(7)}(s)| = \max_{s\in]0,x[} \frac{7!}{(1-s)^8} \leq \frac{7!}{(1-x)^8}.$$

Í þessu síðasta mati hugsar maður um x sem einhverja fasta tölu á bilinu $[0, 1[$. Nú getum við metið stærð skekkjunnar og fáum

$$|E_6(x)| \leq \frac{|x|^7}{(1-x)^8}.$$

Með því að reikna út $\frac{|x|^7}{(1-x)^8}$ fyrir nokkur gildi á x á milli 0 og 1, sést vel að p_6 er góð nálgun á f ef x er nógu nálægt 0 en alls ekki þegar x nálgast 1.

x	0.0	0.01	0.10	0.30	0.50	0.60	0.80	0.90	0.99
$\max \lvert E(x) \rvert$	0	$1.1 \cdot 10^{-14}$	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	2	$4.3 \cdot 10^{1}$	$8.2 \cdot 10^{4}$	$4.8 \cdot 10^{7}$	$9.3 \cdot 10^{15}$

Athugum þó að þetta er yfirmat á skekkju; raunveruleg skekkja ætti aldrei að verða meiri en þetta í hverjum punkti.

Rannsökum næst skekkjuna fyrir $x < 0$

Ef $x < 0$, þá er $s \in]x, 0[$ og þar sem $|f^7(s)|$ er vaxandi fall, þá er

$$\max_{s\in]x,0[} |f^{(7)}(s)| = \max_{s\in]x,0[} \frac{7!}{(1-0)^8} = 7!.$$

Stærð skekkjunnar fyrir $x < 0$ er þá

$$|E_6(x)| \leq |x|^7$$

sem vex hratt fyrir $x < -1$, en $0 \leq \lim_{x\to 0-} |E(x)| \leq \lim_{x\to 0-} |x|^7$ sem þýðir að stærð skekkjunnar stefnir á núll þegar x stefnir á núll frá vinstri.

Samantekið þýðir þetta að við getum aðeins búist við nothæfri nálgun ef við erum nógu nálægt núlli.

Við getum fengið miklu meira út úr þessu verkefni. Við tökum eftir að fallið f hefur afleiðu fyrir eins stór n og maður getur hugsað sér:

$$f^{(n)}(s) = \frac{n!}{(1-s)^{n+1}}.$$

Er þá alltaf hægt að taka Taylor margliður af æ hærra stigi ? Spurningin sem situr eftir er nefnilega þessi: Gildir jafnan

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

og ef svo, þá fyrir hvaða x?

■

7. Stofnföll og heildi

7.1 Riemann summa

Látum f vera samfellt fall, skilgreint á lokuðu og takmörkuðu bili $[\,a\,,b\,]$, $a < b$ og þ.a. $f(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in [\,a\,,b\,]$. Við höfum áhuga á að reikna flatarmálið sem afmarkast af grafi fallsins og línunum $x = a$, $x = b$ og $y = 0$. Eðlileg hugmynd er að skipta bilinu $[\,a\,,b\,]$ upp í mjóa strimla og taka eitthvert fallgildi f á hverjum strimli. Þ.e. við veljum einhverja stóra náttúrulega tölu n og bitum $[a, b]$ upp í n strimla með breidd

$$h \equiv \frac{b-a}{n}$$

með því að skilgreina

$$x_k \equiv a + hk, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

og skoða fallið f á bilunum $[\,x_0\,,x_1\,]$, $[\,x_1\,,x_2\,]$, ..., $[\,x_{n-1}\,,x_n\,]$. Á hverju þessara bila veljum við eitthvert

$$y_k \in [\,x_k\,,x_{k+1}\,] \quad \text{fyrir } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

og reiknum út summuna

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)h.$$

Það kemur í ljós að af því f er samfellt fall, þá nálgast maður alltaf meir og meir eitthvert ákveðið gildi eftir því sem maður velur n stærra (þ.e. strimlana mjórri) og þetta gildi er kallað heildi f yfir bilið $[\,a\,,b\,]$ og er táknað með

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ath. x er svokölluð frjáls breyta. Allt eins mætti nota t, y eða $\eth$. Hugmyndin er eingöngu sú að láta vita m.t.t. hvaða breytu á að heilda.
Það er lítil ástæða til þess að takmarka sig við föll $f(x) \geq 0$ og er venja að leyfa neikvæð gildi. Þá er sá flötur sem er fyrir neðan $y = 0$ talinn með, en sem neikvæður.

Nokkrir mikilvægir eiginleikar heilda:
Látum f og g vera samfelld föll á $[a, b]$, $a < b$. Þá er

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

og maður skilgreinir

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Ef A og B eru rauntölur þá er

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx,$$

ef $a < c < b$ þá er

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

ef $f(x) \le g(x)$ fyrir öll $x \in [a, b]$ þá er

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

og

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Að auki gildir

Regla 7.1.1 — Milligildisetning fyrir heildi. Látum f vera samfellt fall á $[a, b]$, $a < b$. Þá er til $c \in [a, b]$ þ.a.

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Sönnun. Af því að f er samfellt á $[a, b]$ tekur f lægsta gildi sitt m og hæsta gildi sitt M á bilinu $[a, b]$ samkvæmt Útgildissetningunni. En þá er

$$(b-a)m = \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = (b-a)M,$$

þ.e.

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Þar sem f verður að taka öll gildi á milli m og M á bilinu $[a, b]$ samkvæmt Milligildissetningunni, hlýtur þá að vera til $c \in [a, b]$ þ.a.

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

■

Sambandið á milli stofnfalla og heildunar er einfalt. Um það er fjallað í **Höfuðsetningu stærðfræðigreiningarinnar** sem er líka kölluð **Undirstöðusetning örsmæðareikningsins**. Eins og nafnið gefur til kynna er þetta mikilvæg setning. Á ensku heitir hún *Fundamental Theorem of Calculus*.

Regla 7.1.2 — Höfuðsetning Stærðfræðigreiningarinnar, I Hluti. Ef f er samfellt fall á bili $[\,a\,,b\,]$ þá getum við skilgreint fallið $F : [\,a\,,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(y) \equiv \int_a^y f(x)dx.$$

Nú gildir: Fallið F er deildanlegt á $]\,a\,,b\,[$ og er stofnfall f, þ.e. $F'(y) = f(y)$.

Sönnun. Fallið F er deildanlegt í $y \in]\,a\,,b\,[$ ef markgildið

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(y+h)-F(y)}{h}$$

er til. Við reiknum,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\int_a^{y+h} f(x)dx - \int_a^y f(x)dx}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\int_y^{y+h} f(x)dx}{h},$$

og samkvæmt Reglu 7.1.1, Milligildissetningu fyrir heildi, er fyrir sérhvert $h > 0$ til $c_h \in [y, y+h]$ þ.a.

$$\int_y^{y+h} f(x)dx = (y+h-y)f(c_h) = hf(c_h)$$

og eftir því sem $h > 0$ er nær 0 er $c_h > y$ nær y. Þar sem f er samfellt gildir $\lim\limits_{h\to 0+} f(c_h) = f(y)$ og því er markgildið að ofan til og

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\int_y^{y+h} f(x)dx}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{hf(c_h)}{h} = \lim_{h\to 0+} f(c_h) = f(y).$$

tilfellið þegar h stefnir á 0 frá vinstri er svipað. ■

Regla 7.1.3 — Höfuðsetning Stærðfræðigreiningarinnar, II hluti. Ef f er samfellt fall á bili $[a, b]$ og F er eitthvert stofnfall f á $[a, b]$, þá er

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Sönnun. Látum n vera stóra náttúrulega tölu, $h := (b-a)/n$ og

$$x_k := a + hk, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Athugum að samvkæmt Meðalgildissetningunni er fyrir sérhvert $k = 0, 1, \ldots, n-1$ til $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ þ.a.

$$\frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{h} = F'(y_k) = f(y_k).$$

En þá er (kíkissumma)

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} h\frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} hF'(y_k) = \sum_{k=0}^{n-1} hf(y_k)$$

en hægri hliðin á þessari jöfnu er eins nálægt

$$\int_a^b f(x)dx$$

og vera vill þegar n er nógu stórt. ■

■ **Dæmi 7.1**

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}a^3.$$

■ **Dæmi 7.2**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{x=-1}^{x=2} \\ &= \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{3}{2}\cdot 4 + 2\cdot 2 - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1) - \frac{3}{2}\cdot 1 + 2\cdot(-1)\right) \\ &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 7.3** Reiknum flatarmál svæðisins sem afmarkast af ferlunum $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ og $y(x) = \sin(x)$.

■ **Lausn** Maður rissar skýringarmynd og sér að flatarmálið er

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

■

■ **Dæmi 7.4** Reiknum

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)|dx.$$

■ **Lausn** Nú er $\sin(x) \geq 0$ fyrir $x \in [0, \pi]$ og $\sin(x) \leq 0$ fyrir $x \in [\pi, 2\pi]$ svo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin(x)|dx &= \int_0^\pi |\sin(x)|dx + \int_\pi^{2\pi} |\sin(x)|dx = \int_0^\pi \sin(x)dx + \int_\pi^{2\pi} (-\sin(x))dx \\ &= [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} + [\cos(x)]_{x=\pi}^{x=2\pi} = 2 + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 4.\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 7.5** Getum við notað Höfuðsetningu stærðfræðigreiningarinnar til að reikna heildið

$$\int_0^5 \frac{1}{x-2}dx$$

■ **Lausn** Svarið er nei, af því að fallið er ekki samfellt á bilinu $[0, 5]$.

■

Látum nú f vera samfellt fall og g vera deildanlegt fall. Hvernig deildum við

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt \quad ?$$

Setjum

$$F(y) = \int_a^y f(t)dt.$$

Þá er $F'(y) = f(y)$ og skv. Keðjureglunni er

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

■

■ Dæmi 7.6

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin(x)} \Big(t^3 + \cos(t)\Big)\, dt = \Big(\sin^3(x) + \cos(\sin(x))\Big) \cdot \cos(x)$$

■

■ Dæmi 7.7

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2} \cos(t)dt &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \cos(t)dt + \int_{x^3}^{0} \cos(t)dt\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \cos(t)dt - \int_0^{x^3} \cos(t)dt\right)\\ &= \cos(x^2)\cdot 2x - \cos(x^3)\cdot 3x^2.\end{aligned}$$

■

Æfingar 7.1

Æfing 7.1.1 Lítum á fallið $f(t) = \frac{1}{t}$ með $t \in [\,1\,,x\,]$ þar sem $1 < x$. Fallið f er samfellt á lokaða bilinu $[\,1\,,x\,]$ og samkvæmt Höfuðsetningu Stærðfræðigreiningar, I hluta, má skilgreina nýtt fall F þ.a. $F'(x) = \frac{1}{x}$, fyrir $x > 1$ þ.e.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Við þekkjum þetta fall betur undir heitinu *náttúrlegi logrinn* fyrir $x \geq 1$.

1) Fallið $f(t) = \frac{1}{t}$ er samfellt á bilinu $[\,x\,,1\,]$ þar sem $0 < x < 1$. Notið Höfuðsetninguna, I hluta. til að skilgreina nýtt fall G þ.a. $G'(x) = \frac{1}{x}$, fyrir $0 < x < 1$. Hvaða fall er þetta G og hvert er myndmengi þess ?
2) Fallið $f(t) = \frac{1}{t}$ er samfellt á bilinu $[\,x\,,-1\,]$ þar sem $x < -1$. Er hægt að nota fyrri hluta Höfuðsetningar til að smíða nýtt fall H skilgreint á lokaða og takmarkaða bilinu $[x,-1]$ þ.a. $F'(x) = \frac{1}{x}$?

■

7.2 Óeiginleg heildi

Við skoðum nú heildi falla $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sem eru samfelld á bili $]a, b]$ og markgildið

$$\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx = L.$$

er til. Þá skilgreinir maður

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx = L.$$

Svipað er gert ef fall $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ er samfellt á $[a, b[$ og markgildið

$$\lim_{c\to b-} \int_a^c g(x)dx = L \quad \text{er til.}$$

Þá skilgreinir maður líka

$$\int_a^b g(x)dx \equiv \lim_{c\to b-} \int_a^c g(x)dx = L.$$

Það er líka í lagi að láta $a = -\infty$ og/eða $b = +\infty$.

■ **Dæmi 7.8** Fyrir hvaða $0 < c < 1$ sem er gildir

$$\int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_{x=c}^{x=1} = 2 - 2c^{\frac{1}{2}}$$

og þá

$$\lim_{c\to 0+} \int_c^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{c\to 0+} \left(2 - 2c^{\frac{1}{2}}\right) = 2.$$

Því er heildið af fallinu $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ (sem er samfellt á $]0, 1]$) yfir $[0, 1]$, skilgreint sem

$$\int_0^1 f(x)dx := \lim_{c\to 0+} \int_c^1 f(x)dx = 2.$$

■

■ **Dæmi 7.9** Fyrir öll $c > 1$ gildir

$$\int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=c} = \frac{-1}{c} + 1$$

og þá

$$\lim_{c\to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to +\infty} \left(\frac{-1}{c} + 1\right) = 1.$$

Því er

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c\to +\infty} \left(\frac{-1}{c} + 1\right) = 1.$$

Yfirleitt ritar maður þetta bara beint sem

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=+\infty} = 1$$

og ætlast til þess að lesandinn átti sig á því að við tókum markgildið $x \to +\infty$ til að fá síðasta jafnaðarmerkið. ■

■ **Dæmi 7.10**

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_{x=0}^{x=1} = \ln(1) - \lim_{x\to 0+} \ln(x) = -(-\infty) = +\infty.$$

Nú er, fyrir $x < 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

svo $\ln|x|$ er stofnfall fallsins $1/x$ fyrir öll $x \neq 0$. Þá er

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{x=-1}^{x=0} = \lim_{x\to 0-} \ln(-x) - \ln(1) = -\infty.$$

Reynum að reikna $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$. Rangt svar væri

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{x=-1}^{x=1} = \ln(1) - \ln(1) = 0.$$

Þarna er Höfuðsetningin notuð án þess að forsendurnar séu uppfylltar (þ.e. $1/x$ er ekki samfellt á bilinu $[-1, 1]$). Rétt svar er að

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty$$

sem er ekki skilgreint og því er heildið heldur ekki skilgreint. ■

■ **Dæmi 7.11**

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_{x=0}^{x=+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-\cos(x)) - (-1).$$

Þar sem markgildið er ekki skilgreint er heildið heldur ekki skilgreint.

■

Almennt er ekki hægt að gefa neina þægilega formúlu fyrir stofnfalli. Við skoðum í framhaldinu nokkrar aðferðir sem auðvelda leikinn.

Æfingar 7.2

Æfing 7.2.1 Reiknið eftirfarandi heildi eða rökstyðjið að þau séu ekki skilgreind:

(i) $$\int_0^\infty e^{-2x}dx$$

(ii) $$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

(iii) $$\int_0^\infty x dx$$

(iv) $$\int_0^\infty x\cos(x^2)dx$$

■

7.3 Aðferð innsetningar

Látum F vera stofnfall fallsins f. Skv. Keðjureglunni er

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

svo fallið $F(g(x))$ er stofnfall fallsins $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Þetta má oft nota til að reikna heildi.

■ **Dæmi 7.12** Reiknum

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

■ **Lausn** Með breytiskiptunum $g(x) = x^2 + 1$ fáum við $g'(x) = 2x$ og þá með $f(x) = 1/x$ og $F(x) = \ln|x|$ er

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_0^1 f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(1)) - F(g(0)) = \ln(1^2+1) - \ln(0^2+1) = \ln(2).$$

Yfirleitt er þægilegra að reikna það sama aðeins styttra: Setjum $u = x^2 + 1$. Þá er

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \text{þ.e. } dx = \frac{du}{2x} \quad \text{og} \quad u(0) = 0^2 + 1 = 1 \quad \text{og} \quad u(1) = 1^2 + 1 = 2.$$

Því er

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{2x}{u}\frac{du}{2x} = \int_1^2 \frac{1}{u}du = [\ln|u|]_{u=1}^{u=2} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

■

■ **Dæmi 7.13** Reiknið

$$\int_1^5 \frac{\sin(3\ln(x))}{x}dx$$

með breytuskiptunum $u = 3\ln(x)$.

■ **Lausn** Nú er

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{x} \quad \text{þ.e. } \frac{x}{3}du = dx \quad \text{og} \quad u(1) = 3\ln(1) = 0 \quad \text{og} \quad u(5) = 3\ln(5).$$

Því er

$$\int_1^5 \frac{\sin(3\ln(x))}{x}dx = \int_0^{3\ln(5)} \frac{1}{3}\sin(u)du = \frac{1}{3}\left[-\cos(u)\right]_{u=0}^{u=3\ln(5)} = \frac{1}{3}\left(1 - \cos(3\ln(5))\right).$$

■

■ **Dæmi 7.14** Reiknið $\displaystyle\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$ með breytuskiptunum $u = 1 + e^x$.

■ **Lausn** Nú er

$$\frac{du}{dx} = e^x \quad \text{þ.e. } du = e^x\,dx \quad \text{og} \quad u(0) = 2 \quad \text{og} \quad u(1) = 1 + e.$$

Því er

$$\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \int_2^{1+e} u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=2}^{u=1+e} = \frac{2}{3}\left((1+e)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right).$$

■

■ **Dæmi 7.15** Reiknið $\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2}$ með breytuskiptunum $u = \arctan(x)$.

■ **Lausn** Nú er

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad u(0) = \arctan(0) = 0 \quad \text{og} \quad u(3) = \arctan(3)$$

og þá

$$\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\arctan(3)} du = \arctan(3).$$

Athugið, að til þess að finna sambandið á milli du og dx má allt eins nota $x = \tan(u)$ og reikna

$$\frac{dx}{du} = 1 + \tan^2(u) = 1 + x^2.$$

■

Æfingar 7.3

Æfing 7.3.1 Reiknið $$\int_1^{+\infty} \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}\,dx$$ ■

Æfing 7.3.2 Sýnið að

$$\int \frac{4}{1+e^{-x}}\,dx = 4(1+\ln(1+e^{-x})) + C$$

■

Æfing 7.3.3 Reiknið

(i) $\int e^{5-2x}\,dx$

(ii) $\int \cos(ax+b)\,dx$

(iii) $\int \sqrt{3x+4}\,dx$

(iv) $\int e^{2x}\sin(e^{2x})\,dx$

(v) $\int \frac{x\,dx}{(4x^2+1)^5}$

(vi) $\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln t}$

■

7.4 Hlutheildun

Látum f vera samfellt fall á $[a,b]$ og g vera deildanlegt fall á $]a,b[$, $a < b$. Látum F vera stofnfall f. Þá er

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\cdot g(x)\right) = F'(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x).$$

Ef við heildum nú báðar hliðar frá a til b fáum við

$$[F(x)\cdot g(x)]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \left\{\frac{d}{dx}\left(F(x)\cdot g(x)\right)\right\} dx = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx + \int_a^b F(x)\cdot g'(x)dx,$$

þ.e.

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = [F(x)\cdot g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)dx.$$

■ **Dæmi 7.16** Reiknum heildið:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(x)\cdot x^2 dx &= \left[(-\cos(x))\cdot x^2\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi (-\cos(x))\cdot 2x\,dx \\
&= \pi^2 + 2\int_0^\pi \cos(x)\cdot x\,dx \\
&= \pi^2 + 2\left([\sin(x)\cdot x]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \sin(x)\cdot 1\,dx\right) \\
&= \pi^2 - 2\left[-\cos(x)\right]_{x=0}^{x=\pi} = \pi^2 - 4.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 7.17** Finnum stofnfallið

$$\begin{aligned}
\int 6x^5 \ln(x)dx &= \ln(x)\ x^6 \ - \int x^6 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= \ln(x)\ x^6 - \int x^5\,dx \\
&= \ln(x)\ x^6 - \frac{x^6}{6} + C
\end{aligned}$$

■

Æfingar 7.4

Æfing 7.4.1 Notið hlutheildun til að finna stofnföll:

i) $\int x^2 \cdot \ln x\,dx$

ii) $\int x^3 \cdot \ln x\,dx$

iii) $\int x \cdot \cos x\,dx$

iv) $\int \sin x \cdot \cos x\,dx$

■

7.5 Stofnbrotaliðun til að leysa heildi

Skoðum nú heildi af gerðinni

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

þar sem $P_n(x)$ er margliða af stigi n og $Q_m(x)$ er margliða af stigi m. Í tilfellum sem þessum er oft hægt að nota stofnbrotaliðun til að einfalda heildið. Við skoðum þetta með dæmum.

■ **Dæmi 7.18** Leysum heildið $\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx$.

■ **Lausn** Notum stofnbrotaliðun

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{x+4}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}.$$

Við höfum því að

$$x+4 \overset{!}{=} A(x-2)+B(x-3) = (A+B)x - 2A - 3B$$

svo stuðullinn við x gefur okkur að $A+B=1$ og fasta stuðullinn gefur okkur $-2A-3B=4$. Leysum þessar tvær jöfnur saman og fáum að $A=7$ og $B=-6$. Við höfum því

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left[\frac{7}{(x-3)} + \frac{-6}{(x-2)}\right] dx = 7\ln|x-3| - 6\ln|x-3| + C$$

■

■ **Dæmi 7.19** Í heildinu $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$ gengur ekki að að nota stofnbrotaliðunina

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

með sömu aðferð og í dæminu á undan, þar sem þetta gefur enga lausn. Hér reynum við því

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$

og fáum

$$1 \overset{!}{=} A(x^2-2x+1) + Bx^2 - Bx + Cx = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A.$$

Fasta stuðullinn gefur okkur $A=1$, stuðullinn við x gefur okkur $-2A-B+C=0$ og stuðullinn við x^2 gefur okkur $A+B=0$. Þetta gefur okkur fastana $A=1$, $B=-1$ og $C=1$. Við setjum nú upp heildið

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

■

Ef margliðan í teljara er af sama stigi og margliðan í nefnara getum við notað eftirfarandi aðferð.

■ **Dæmi 7.20** Leysum heildið $\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\,dx$.

■ **Lausn** Við umritum nú brotið

$$\frac{x^2}{x^2+x-2} = \frac{x^2+x-2-(x-2)}{x^2+x-2} = 1 - \frac{x-2}{x^2+x-2}.$$

og þetta brot getum við nú stofnbrotaliðað

$$\frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{x-2}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}.$$

Nú höfum við

$$x - 2 \stackrel{!}{=} (A+B)x - A + 2B$$

sem gefur okkur jöfnurnar $A + B = 1$ og $-A + 2B = -2$, þ.e. $A = 4/3$ og $B = -1/3$. Setjum nú upp heildið

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\,dx &= \int \left[1 - \left(\frac{4/3}{x+2} + \frac{-1/3}{x-1}\right)\right] dx \\ &= x - \frac{4}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

■

Æfingar 7.5

Æfing 7.5.1 Notið margliðudeilingu og/eða stofnbrotaliðun til að finna stofnföll:

i)

$$\int \frac{x}{3x^2+8x-3}\,dx$$

ii)

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$$

iii)

$$\int \frac{x^2+1}{6x-9x^2}\,dx$$

iv)

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$$

■

7.6 Flatarmál á milli tveggja ferla

Látum f og g vera samfelld föll á $[a,b]$, $a < b$, þ.a. $f(x) \geq g(x)$ fyrir öll $x \in [a,b]$. Þá er flatarmálið sem afmarkast af ferlunum $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ og $y = g(x)$ gefið með

$$\text{Flatamál} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

■ **Dæmi 7.21** Reiknið flatamálið sem afmarkast af $x = 1$, $x = 2$, $f(x) = -x^2$ og $g(x) = -x^3$.

■ **Lausn**

$$\int_1^2 (-x^2 - (-x^3))dx = \left[\frac{-1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{17}{12}$$

(af því að $-x^2 \geq -x^3$ fyrir öll $x \in [1,2]$).

■

Oft eru dæmi með ákvörðun flatarmáls sett fram eins og í næsta dæmi:

■ **Dæmi 7.22** Finnið flatarmál takmarkaða svæðisins sem afmarkast af ferlunum $y = x^2 - 2x$ og $y = 6x - x^2$.

■ **Lausn** Fyrst finnur maður skurðpunkta ferlanna, þ.e. leysum fyrir x jöfnuna

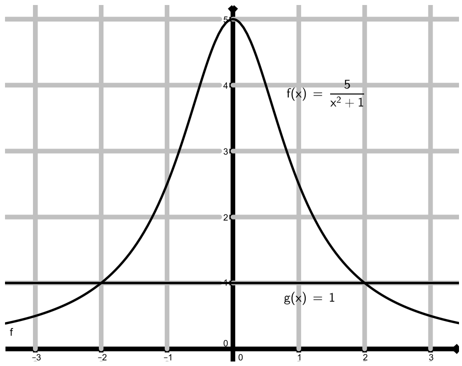
$$x^2 - 2x = 6x - x^2 \iff x^2 = 4x$$

sem hefur lausnirnar $x = 0$ og $x = 4$. Nú er $x^2 - 2x \leq 6x - x^2$ fyrir öll $0 \leq x \leq 4$ svo flatarmálið er gefið með

$$\int_0^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x))dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=4} = 64 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}.$$

■

■ **Dæmi 7.23** Reiknum flatarmál (takmarkaða) svæðisins sem lokast af á milli ferlanna $y = 1$ og $y(x) = 5/(x^2 + 1)$.



Mynd 7.1

■ **Lausn** Við byrjum á að finna skurðpunkta ferlanna sem við sjáum á Mynd 7.1. Þ.e. þau x þ.a.

$$\frac{5}{x^2 + 1} = 1.$$

Það er auðvelt að sjá að þessi jafna hefur tvær lausnir, $x = -2$ og $x = 2$. Þá er flatarmálið

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \left(\frac{5}{x^2 + 1} - 1\right) dx &= [5 \arctan(x) - x]_{x=-2}^{x=2} \\ &= 5 \arctan(2) - 2 - (5 \arctan(-2) - (-2)) \\ &= 5 \arctan(2) - 5 \arctan(-2) - 4 = 10 \arctan(2) - 4 \approx 7.0715.\end{aligned}$$

■

Æfingar 7.6

Æfing 7.6.1 Reiknið eftirfarandi flatarmál:

1) Takmarkaða svæðið sem lokast á milli ferlanna $y = x^2 - 1$ og $y = 1 + x^2$.
2) Takmarkaða svæðið sem lokast á milli ferlanna $y = \sin x$ og $y = \cos x$ fyrir $0 \leq x \leq 2\pi$.
3) Takmarkaða svæðið sem lokast á milli ferlanna $y = x^2$ og $y = x^3$.

■

7.7 Lausnir á völdum dæmum

■ **Dæmi 7.24** Látum P_n tákna skiptingu á gefnu bili $[a,b]$ í n jafnlöng hlutbil; öll að lengd $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Látum $L(f,P_n)$ tákna *undirsummu* fyrir heildið $\int_a^b f(x)\,dx$ og $U(f,P_n)$ tákna *yfirsummu* fyrir heildið, þ.e.

$$L(f,P_n) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P_n).$$

Metið $L(f,P_n)$ og $U(f,P_n)$ fyrir gefin föll f.

ATH Googlið *upper Riemann sum* og *lower Riemann sum*

1) $f(x) = x$ á $[0,2]$ og $n = 8$.

2) $f(x) = x^2$ á $[0,4]$ og $n = 4$.

■ **Lausn**

1. Við eigum að skipta bilinu $[0,2]$ upp í $n = 8$ hlutbil. Þá verður hvert og eitt þeirra af lengdinni

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}.$$

Bilskiptipunktarnir eru þá 9 talsins. Reiknum líka fallgildi í þeim öllum:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2

Nú er $\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{4}$ fyrir $i = 0,1,\ldots,8$ og hlutbilin eru

$$\left[0,\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right], \left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4},\frac{4}{4}\right], \left[\frac{4}{4},\frac{5}{4}\right], \left[\frac{5}{4},\frac{6}{4}\right], \left[\frac{6}{4},\frac{7}{4}\right], \left[\frac{7}{4},2\right].$$

UNDIRSUMMA: Fallið $f(x) = x$ er stranglega vaxandi á $[0,2]$, svo að við höfum undirsummu ef við tökum fallgildi á hverju hlutbili í vinstri endapunkti:

$$\begin{aligned}
L(f,P_8) &= f(x_0)\Delta x_1 + f(x_1)\Delta x_2 + f(x_2)\Delta x_3 + f(x_3)\Delta x_4 \\
&\quad + f(x_4)\Delta x_5 + f(x_5)\Delta x_6 + f(x_6)\Delta x_7 + f(x_7)\Delta x_8 \\
&= 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4}\right) \qquad = 1.75.
\end{aligned}$$

YFIRSUMMA: Fáum yfirsummu ef við tökum fallgildi á hverju hlutbili í hægri endapunkti þess:

$$\begin{aligned}
L(f,P_8) &= f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + f(x_4)\Delta x_4 \\
&\quad + f(x_5)\Delta x_5 + f(x_6)\Delta x_6 + f(x_7)\Delta x_7 + f(x_8)\Delta x_8 \\
&= \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8)\right)\Delta x \\
&= \left(\frac{36}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = 2.25.
\end{aligned}$$

2. Ábending: Fallið er vaxandi á gefnu bili og því hægt að leysa það eins og lið 1).

■

■ **Dæmi 7.25** Notið að $\int_0^a x^2 = \frac{1}{3}a^3$ og túlkið

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \tag{7.1}$$

sem flatarmálið af takmarkaða svæðinu sem afmarkast af ferlinum $y = \sqrt{1-x^2}$, $x-$ásnum og lóðréttu línunum $x = 0$ og $x = 1$. Reiknið svo út flatarmálið $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{1-x^2})\,dx$.

■ **Lausn** Athugum fyrst að hringur með miðju í $(0,0)$ og geisla $r = 1$ hefur jöfnuna $x^2 + y^2 = 1$ (teiknið mynd). Færum x^2 á hægri hlið, drögum rætur og fáum $\sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2}$ þ.e. $|y| = \sqrt{1-x^2}$. Þetta gefur tvö föll: Ef $y \geq 0$ þá fæst ferill hálfhrings sem liggur ofan við $x-$ásinn

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

en ef $y < 0$ þá fæst sá hluti hringferilsins sem liggur neðan við $x-$ásinn

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

Við eigum að nota $y = \sqrt{1-x^2}$. Flatarmál einingarhrings er π, og ef hann er staðsettur með miðju í $(0,0)$ og við eigum að finna flatarmálið liggur ofan við $x-$ás og afmarkast af lóðréttu línunum $x = 0$ og $x = 1$, þá sjáum við að fjórðungur af fleti einingarhringsins lendir innan þessara marka, svo að

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Þá fæst loks, að

$$\int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{1-x^2}\,dx\right) = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^2 \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Einnig er hægt að nota innsetningu til að reikna út heildið (7.1); t.d. $x = \sin t$ (þá verða heildunarmörkin $t = 0$ og $t = \pi/2$).

■

■ **Dæmi 7.26** Finnið meðalgildi fallsins $f(x) = x + 2$ á bilinu $[0,4]$.

■ **Lausn** Meðalgildi(*e. average value, mean value*) heildanlegs falls f á bili $[a,b]$ er gefið með formúlunni

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Hér er

$$\bar{f} = \frac{1}{4-0}\int_0^4 (x+2)\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{4^2}{2} + 2\cdot 2\right) = 3.$$

■

■ **Dæmi 7.27** Reiknið út afleiðuna $\dfrac{d}{d\theta}\displaystyle\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx$

■ **Lausn** Látum a vera einhverja rauntölu á heildunarbilinu og skjótum henni inn í heildunarmörkin og fáum

$$\begin{aligned}
\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx &= \int_{\sin\theta}^{a}\frac{1}{1-x^2}\,dx + \int_{a}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx\\
&= -\int_{a}^{\sin\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx + \int_{a}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx\\
&= \int_{a}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx - \int_{a}^{\sin\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

Látum $F(\theta)$ vera stofnfall $\dfrac{1}{1-\theta^2}$, t.d. $F(\theta)=\displaystyle\int_a^\theta\frac{1}{1-x^2}\,dx$ fyrir eitthvert heppilegt a. Þá er

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta}=\frac{1}{1-\theta^2}$$

Með Keðjureglu fæst

$$\begin{aligned}
\frac{dF(\cos\theta)}{d\theta} &= \frac{1}{1-\cos^2\theta}\cdot\frac{d\cos\theta}{d\theta} = \frac{-\sin\theta}{\sin^2\theta} = \frac{-1}{\sin\theta}\\
\frac{dF(\sin\theta)}{d\theta} &= \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{d\sin\theta}{d\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

Af ofangreindu sést þá að

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{d}{d\theta}\left(\int_a^{\cos\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx - \int_a^{\sin\theta}\frac{1}{1-x^2}\,dx\right)\\
&= \frac{d}{d\theta}(F(\cos\theta)-F(\sin\theta))\\
&= \frac{-1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

■

Óeiginleg heildi

■ **Dæmi 7.28** Metið heildin eða sýnið að þau séu ósamleitin.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2+1}\,dx$

■ **Lausn** Í fyrra heildinu er mjög auðvelt að sjá stofnfallið:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \left[\frac{-1}{3}e^{-3x}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = 0-\frac{-1}{3}e^0=\frac{1}{3}.$$

Í því seinna þarf maður að vita að $\arctan x$ er stofnfall $1/(1+x^2)$. Þá fæst

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2+1}\,dx = \arctan x\Big|_{x=-\infty}^{x=-1} = \arctan(-1)-\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{4}-\frac{-\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

■

Hlutheildun

■ **Dæmi 7.29**

1) $\int x^3 \ln x \, dx$

2) Finnið flatarmálið neðan við $y = e^{-x} \sin x$ og ofan við $y = 0$ frá $x = 0$ til $x = \pi$.

■ **Lausn**

1. Setjum $f(x) = x^3$ og $g(x) = \ln x$ og þá $F(x) = \frac{x^4}{4}$ og $g'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\int x^3 \ln x \, dx &= \int f(x)g(x) \, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) \, dx \\
&= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} \, dx \\
&= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} \\
&= \frac{x^4}{16} \left(\ln x^2 - 1 \right)
\end{aligned}$$

2. Setjum $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = \sin x$ og þá $F(x) = -e^{-x}$, $g'(x) = \cos x$:

$$\begin{aligned}
I := \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx = \int_0^\pi f(x)g(x) \, dx &= [F(x)g(x)]_0^\pi - \int_0^\pi F(x)g'(x) \, dx \\
&= [-e^{-x} \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi (-e^{-x}) \cdot \cos x \, dx \\
&= 0 + \int_0^\pi (e^{-x}) \cos x \, dx.
\end{aligned}$$

Nú beitum við aftur hlutheildun á $\int e^{-x} \cos x \, dx$ með $f(x) = e^{-x}$, $h(x) = \cos x$ og $h'(x) = -\sin x$: Fáum

$$\begin{aligned}
I = \int_0^\pi e^{-x} \cos x \, dx = \int_0^\pi f(x)g(x) \, dx &= [F(x)g(x)]_0^\pi - \int_0^\pi F(x)g'(x) \, dx \\
&= [-e^{-x} \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-e^{-x}) \cdot (-\sin x) \, dx \\
&= \left(-e^{-\pi} \cos \pi - (-e^{-0} \cos 0) \right) - \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx. \\
&= -e^{-\pi} + 1 - I
\end{aligned}$$

sem er jafngilt því að $2I = e^{-\pi} + 1$, og þá er

$$\int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1 - e^{-\pi}}{2}$$

■

8. Tvær mikilvægar gerðir deildajafna

8.1 Deildajafnan $y' = ky$

Skoðum (mikilvægu) deildajöfnuna

$$y' = ky, \quad k \in \mathbb{R} \text{ einhver fasti.} \tag{8.1}$$

Athugum að ef $y(x)$ er lausn þessarar deildajöfnu, þá er

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{e^{kx}}\right) = \frac{y'(x)e^{kx} - ke^{kx}y(x)}{e^{2kx}} = \frac{ky(x) - ky(x)}{e^{kx}} = 0$$

Þá fæst samkvæmt Reglu 4.4.2 á bls. 122 að

$$\frac{y(x)}{e^{kx}} = C, \quad \text{þ.e.} \quad y(x) = Ce^{kx},$$

þar sem $C \in \mathbb{R}$ er einhver fasti. Þetta þýðir að upphafsgildisverkefnið

$$y' = ky, \quad y(0) = y_0,$$

þar sem k og y_0 eru einhverjir fastar, hefur ótvírætt ákvörðuðu lausnina $y(x) = y_0e^{kx}$, $\mathrm{Dom}(y) = \mathbb{R}$.
Svona upphafsgildisverkefni koma mjög oft fyrir því jafnan $y' = ky$ þýðir að y minnkar ($k < 0$) eða vex ($k > 0$) í réttu hlutfalli við stærð (sjálfs sín).

■ **Dæmi 8.1** Gefin er einhver stærð y sem fall af tíma t. Vitað er að $y(0) = 10$ og að y minnkar um 10% á sérhverjum 2 tímaeiningum, þ.e. $y(t+2) = 0.9 \cdot y(t)$. Finnið y sem fall af t.

■ **Lausn** Það að y sé að minnka sem hlutfall af stærð y þýðir að y uppfyllir deildajöfnuna $y' = ky$ fyrir einhvern fasta k. Lausn deildajöfnunnar er því $y(t) = Ce^{kt}$ fyrir einhverja fasta k og C. Nú er $10 = y(0) = Ce^{k\cdot 0} = C$ svo $C = 10$ og k fæst úr jöfnunni $10e^{2k} = y(2) = 0.9 \cdot y(0) = 0.9 \cdot 10 = 9$ svo $e^{2k} = 0.9$, þ.e. $k = \ln(0.9)/2 \approx -0.05268$. Fallið y er því

$$y(t) = 10e^{\ln(0.9)\cdot t/2} \approx 10e^{-0.05268\cdot t}.$$

■

■ **Dæmi 8.2** Gefin er einhver stærð y sem fall af tíma t. Vitað er að $y(0) = 1$ og að y tvöfaldast á sérhverri tímaeiningu, þ.e. $y(t+1) = 2 \cdot y(t)$. Finnið y sem fall af t.

■ **Lausn** Það að y sé að vaxa sem hlutfall af stærð y þýðir að y uppfyllir deildajöfnuna $y' = ky$ fyrir einhvern fasta k. Lausn deildajöfnunnar er því $y(t) = Ce^{kt}$ fyrir einhverja fasta k og C. Nú er $1 = y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$ svo $C = 1$ og k fæst úr jöfnunni $1 \cdot e^k = y(1) = 2 \cdot y(0) = 2$ svo $e^k = 2$, þ.e. $k = \ln(2) \approx 0.693147$. Fallið y er því

$$y(t) = e^{\ln(2) \cdot t} = (e^{\ln(2)})^t = 2^t \approx e^{0.693147 \cdot t}.$$

■

Æfingar 8.1

Æfing 8.1.1 Við höfum 3 kg af geislavirku efni. Á hverju ári klofna 0.1% af efninu niður. Eftir hversu langan tíma höfum við tapað helmingnum af efninu? Hvert væri svarið ef við hefðum upphaflega haft 500 g af efninu en ekki 3 kg? ■

Æfing 8.1.2 Við höfum geislavirkt efni. Helmingunartími þess er 28.3 ár. Setjið upp deildajöfnu sem lýsir eyðingarferlinu og leysið hana til þess að fá megn efnis sem við höfum sem fall af upphaflegu magni C og tíma t. ■

8.2 Annars stigs deildajöfnur með fastastuðla

Við leiðum út lausnarformúlu fyrir annarsstigs deildajöfnur með fastastuðla

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

Við ætlum að nota tvinntölur og því gæti verið gagnlegt að lesa sig til um þær í viðaukanum.
Með því að nota Taylor-raðir, er hægt að rökstyðja að fyrir tvinntölu $z = x + iy$ sé mikið vit í að setja

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} \equiv e^x(\cos y + i \sin y).$$

Á sama hátt og við sýnum að

$$(\cos y + i \sin y) \cdot (\cos r + i \sin r) = \cos(y + r) + i \sin(y + r)$$

má sýna að ef $z, w \in \mathbb{C}$, þá er

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Að auki er auðvelt að sjá að $e^z \neq 0$ fyrir hvaða $z \in \mathbb{C}$ sem er og að

$$\mathrm{Re}\,(e^{x+iy}) = e^x \cos y \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}\,(e^{x+iy}) = e^x \sin y.$$

Látum nú $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vera einhverja tvinntölu og skoðum fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(t) = e^{tz} = e^{t(x+iy)} = e^{tx}(\cos(ty) + i\sin(ty)).$$

Þá getum við deildað raunhlutann og þverhlutann sem fall af t hvorn fyrir sig og fáum út

$$\begin{aligned} f'(t) &= xe^{xt}(\cos(ty) + i\sin(ty)) + e^{xt}(-y\sin(ty) + iy\cos(ty)) \\ &= (x + iy)e^{xt}(\cos(ty) + i\sin(ty)) \\ &= ze^{tz}. \end{aligned}$$

Skoðum nú deildajöfnuna

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

þar sem $a, b, c \in \mathbb{R}$ eru einhverjir fastar og $a \neq 0$.
Það fyrsta sem maður ætti að átta sig á er að ef y_1 og y_2 eru tvær lausnir deildajöfnunnar, þ.e.

$$ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) = 0 \qquad \text{og} \qquad ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) = 0,$$

þá er fyrir hvaða tvinntölur A og B sem er fallið $y_3(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ líka lausn því einfaldir reikningar gefa

$$\begin{aligned} ay_3''(t) + by_3'(t) + cy_3(t) &= a(Ay_1''(t) + By_2''(t)) + b(Ay_1'(t) + By_2'(t)) + c(Ay_1(t) + By_2(t)) \\ &= A(ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t)) + B(ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t)) = 0. \end{aligned}$$

Ef að við höfum bara áhuga á raungildum föllum sem lausnum (sem við reyndar höfum), þá getur maður engu að síður fyrst fundið tvinngild föll sem lausn og notað svo tvinntölurnar A og B til þess að losna við þverhlutann (eins og við sjáum á eftir). Við prófum að setja

$$y(t) = e^{tz}$$

þar sem $z \in \mathbb{C}$ er einhver tvinntölufasti sem við ætlum að ákvarða. Þá er

$$y'(t) = ze^{tz} = zy(t) \qquad \text{og} \qquad y''(t) = z^2y(t).$$

Ef við stingum þessu inn í deildajöfnuna þá fáum við

$$az^2y(t) + bzy(t) + cy(t) = (az^2 + bz + c)y(t) = 0.$$

Þetta þýðir að ef við finnum lausnir

$$az^2 + bz + c = 0,$$

þá höfum við fundið lausn á deildajöfnunni.
Nú er til einföld lausnarformúla fyrir $az^2 + bz + c = 0$, nefnilega ef

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

þá er

$$ar_1^2 + br_1 + c = 0$$

og ef

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

þá er

$$ar_2^2 + br_2 + c = 0.$$

Nú koma þrjú tilvik til greina:

Ef $b^2 - 4ac > 0$ þá eru lausnirnar r_1 og r_2 mismunandi rauntölur og almenna lausnin er gefin með

$$y(t) = Ae^{tr_1} + Be^{tr_2}$$

þar sem A og B eru rauntölufastar.

Ef $b^2 - 4ac = 0$, þá er ein lausn

$$r := r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

sem er rauntala og $y(t) = e^{tr}$ er lausn. Önnur lausn er

$$y(t) = te^{tr}$$

því þá er

$$y'(t) = e^{rt} + rte^{rt} \qquad \text{og} \qquad y''(t) = re^{rt} + re^{rt} + r^2te^{rt} = 2re^{rt} + r^2te^{rt},$$

og þá

$$\begin{aligned} ay''(t) + by'(t) + y(t) &= e^{rt}(a(r^2t + 2r) + b(1 + rt) + ct \\ &= e^{rt}(t(ar^2 + br + c) + 2ar + b) \\ &= e^{rt}(t \cdot 0 + (-b + b)) = 0. \end{aligned}$$

Almenna lausnin er í þessu tilfelli

$$y(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt}$$

þar sem A og B eru rauntölufastar.

Ef $b^2 - 4ac < 0$ þá hefur

$$az^2 + bz + c = 0$$

tvær tvinntölulausnir,

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}$$

og

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}.$$

Við setjum

$$k \equiv \frac{-b}{2a} \quad \text{og} \quad \omega \equiv \frac{\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a},$$

Þá er $r_1 = k + i\omega$ og $r_2 = k - i\omega$ og við fáum raungildar lausnir með því að taka

$$y_1(t) = \frac{1}{2}e^{(k+i\omega)t} + \frac{1}{2}e^{(k-i\omega)t} = e^{kt}\cos(\omega t)$$

og

$$y_2(t) = \frac{1}{2i}e^{(k+i\omega)t} - \frac{1}{2i}e^{(k-i\omega)t} = e^{kt}\sin(\omega t).$$

Almenna lausnin er þá

$$y(t) = Ae^{kt}\cos(\omega t) + Be^{kt}\sin(\omega t)$$

þar sem A og B eru rauntölufastar.

Í öllum þremur tilfellum gildir: Til þess að ákvarða fastana A og B þarf maður meiri upplýsingar, t.d. að þekkja $y(t_0)$ og $y'(t_0)$ fyrir eitthvert t_0. Ef t.d. $t_0 = 0$. Þá er

$$A = y(0)$$

og af því að

$$y'(0) = Ake^{kt}\cos(\omega t) - A\omega e^{kt}\sin(\omega t) + Bke^{kt}\sin(\omega t) + B\omega e^{kt}\cos(\omega t)\Big|_{t=0} = Ak + B\omega$$

þá er

$$B = \frac{y'(0) - Ak}{\omega}.$$

■ **Dæmi 8.3** Leysum upphafsgildisverkefnið

$$\text{UGV} \text{ —— } \begin{cases} -y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Kennimargliða deildajöfnunnar $-y'' + 4y' + y' = 0$ er $-z^2 + 4z + 1$ sem hefur ræturnar

$$r_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4+\sqrt{20}}{-2} = \frac{-4+2\sqrt{5}}{-2} = 2 - \sqrt{5}$$

og

$$r_2 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)} = 2 + \sqrt{5}.$$

Almenna lausn deildajöfnunnar er því

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = Ae^{(2-\sqrt{5})t} + Be^{(2+\sqrt{5})t}$$

fyrir einhverja fasta $A, B \in \mathbb{R}$ og $\mathrm{Dom}(y) = \mathbb{R}$. Nú er

$$2 = y(0) = A + B,$$

svo $B = 2 - A$ og

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(Ae^{(2-\sqrt{5})t} + Be^{(2+\sqrt{5})t}\right) = A(2-\sqrt{5})e^{(2-\sqrt{5})t} + B(2+\sqrt{5})e^{(2+\sqrt{5})t}$$

og þar með

$$-1 = y'(0) = A(2-\sqrt{5}) + B(2+\sqrt{5}) = A(2-\sqrt{5}) + (2-A)(2+\sqrt{5}) = 4 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}A.$$

Leysum A út úr þessari jöfnu og fáum

$$A = \frac{-5 - 2\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

og þar með

$$B = 2 - A = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Lausnin á upphafsgildisverkefninu er því

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{(2-\sqrt{5})t} + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)e^{(2+\sqrt{5})t}.$$

Prófum

$$y(0) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2,$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)(2-\sqrt{5})e^{(2-\sqrt{5})t} + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)(2+\sqrt{5})e^{(2+\sqrt{5})t} \\ &= -\frac{1}{2}e^{(2-\sqrt{5})t} - \frac{1}{2}e^{(2+\sqrt{5})t} \end{aligned}$$

og þá

$$y'(0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

sem passar allt. ■

■ **Dæmi 8.4** Leysum upphafsgildisverkefnið

$$\text{UGV} — \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Kennimargliða deildajöfnunnar $y'' + y = 0$ er $z^2 + 1$ sem hefur ræturnar

$$r_1 = \frac{\sqrt{-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = i \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{-\sqrt{-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = -i.$$

Almenna lausn deildajöfnunnar er því, með $k = \mathrm{Re}\,(i) = 0$ og $\omega = \mathrm{Im}\,(i) = 1$,

$$y(t) = Ae^{kt}\cos(\omega t) + Be^{kt}\sin(\omega t) = A\cos(t) + B\sin(t).$$

Nú er

$$1 = y(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A \quad \text{og} \quad 1 = y'(0) = -A\sin(0) + B\cos(0) = B$$

svo að lausnin er

$$y(t) = \cos(t) + \sin(t).$$

■

■ **Dæmi 8.5** Leysum upphafsgildisverkefnið

$$\text{UGV} — \begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Kennimargliða deildajöfnunnar $y'' + 2y' + y = 0$ er $z^2 + 2z + 1$ sem hefur samkvæmt lausnarformúlu eina (tvöfalda) rót

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = -1.$$

Almenna lausn deildajöfnunnar er því

$$y(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt} = Ae^{-t} + Bte^{-t}$$

Nú er

$$1 = y(0) = Ae^0 + B\cdot 0\cdot e^0 = A$$

og

$$1 = y'(0) = -Ae^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t}\Big|_{t=0} = -A + B = -1 + B$$

svo $B = 2$ og lausnin er

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}.$$

■

Æfingar 8.2

Æfing 8.2.1 Leysið upphafsgilgisverkefnin:
(i)

$$\text{UGV} — \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

(ii)

$$\text{UGV} \text{ —— } \begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

(iii)

$$\text{UGV} \text{ —— } \begin{cases} 2y'' + 2y' + 0.5\, y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(iv)

$$\text{UGV} \text{ —— } \begin{cases} 3y'' - 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 7 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

(v)

$$\text{UGV} \text{ —— } \begin{cases} 2y'' + 2y' + 0.5\, y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

■

III Viðauki

9. Tvinntölur

9.1 Skilgreining tvinntalna

Skilgreining 9.1.1 Látum i tákna *töluna* $\sqrt{-1}$. Við köllum i **þvereiningu** (*e. imaginary unit*).

Af skilgreiningunni leiðir að

$$
\begin{aligned}
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\
i^4 &= i^2 \cdot i^2 = 1 \\
i^5 &= i^4 \cdot i = i \\
&\vdots \\
i^{n+4} &= i^n
\end{aligned}
$$

■ **Dæmi 9.1** Lítum á fallið $f(x) = x^2 + 9$. Við fullyrðum að rætur f séu $x_1 = 3i$ og $x_2 = -3i$. Til að sannreyna það þá reiknum við

$$
\begin{aligned}
f(3i) &= (3i)^2 + 9 = 3^2 i^2 + 9 = 9(-1) + 9 = -9 + 9 = 0, \qquad \text{og} \\
f(-3i) &= (-3i)^2 + 9 = (-3)^2 i^2 + 9 = 9(-1) + 9 = 0.
\end{aligned}
$$

Athugum að ákveða margliðunnar (*e. discriminant*) f er $b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -36 = i^2 \cdot 36$, svo að formúla fyrir lausn á annars stigs jöfnu gefur

$$
r_{\pm} = \frac{0^2 \pm \sqrt{i^2 \cdot 36}}{2} = \frac{\pm i\sqrt{36}}{2} = \pm i3
$$

■

Þegar við notum formúluna

$$
r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{með } b^2 - 4ac < 0
$$

þá skrifum við hana á forminu

$$r_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \tag{9.1}$$

Skilgreining 9.1.2 — Tvinntölur.
1. Tvær rauntölur a og b ákvarða **tvinntölu** $z = a + bi$ með **raunhluta** $\operatorname{Re} z = a$ og **þverhluta** $\operatorname{Im} z = b$.
2. Við skilgreinum tvinntölur sem mengið

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Skilgreining 9.1.3 Tvinntala z er sögð vera **rauntala** ef $\operatorname{Im} z = 0$ og hún er sögð vera **hrein þvertala** ef $\operatorname{Re} z = 0$ og $\operatorname{Im} z \neq 0$.

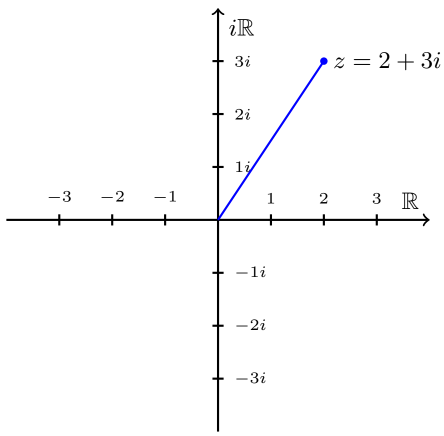
Skilgreining 9.1.4 Við segjum að $z = a + bi$ og $w = c + di$ séu *sama* tvinntalan og ritum $z = w$ þþaa. $a = c$ og $b = d$.

9.2 Samlagning og margföldun

Myndræn framsetning

Tvinntölur eru oft dregnar upp í svokallaðri **Argand mynd** sem hefur láréttan raunás $\mathbb{R}$ og lóðréttan þverás $i\mathbb{R}$. Við tölum þá líka um **tvinntalnasléttuna**.

Mynd 9.1: Argand-mynd af tvinntölunni $z = 2 + 3i$ í tvinntalnasléttunni.
Hér er $\operatorname{Re} z = 2$ og $\operatorname{Im} z = 3$.



Við getum nefnilega litið á tvinntölu $z = x + iy$ sem vigur í (tvinntalna)sléttunni. Við látum þá x-ásinn vera rauntöluásinn og y-ásinn vera tvinntöluásinn. Vigur z er þá vigur sem hefur upphafspunkt í $(0,0)$ og endapunkt í (x,y). Við leyfum okkur því stundum að líta á tvinntöluna $z = x + iy \in \mathbb{C}$ og vigurinn $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sem sama hlutinn.

Samlagning og margföldun

Reikniaðgerðirnar *samlagning* og *margföldun* tvinntalna eru skilgreindar á eftirfarandi hátt: Ef $z = a + bi$ og $w = c + di$ eru tvinntölur, þá er

(i) $z + w = (a + bi) + (c + di) \equiv (a + c) + (b + d)i$
(ii) $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) \equiv (ac - bd) + (ad + bc)i.$

Margföldun tvinntalna $z = a + bi$ og $w = c + di$ er skilgreind eins og þær séu margliður með óþekktu stærðina i í stað hins venjubundna x og þar sem maður skiptir út liðnum i^2 fyrir -1 þegar hann kemur fyrir. Áður fyrr skrifuðu menn oft $\sqrt{-1}$ en i kom síðar.

Í stað $1i$ ritum við oft i og í stað $(-1)i$ einfaldlega $-i$. Að auki gerum við engan greinarmun á $a + bi$ og $a + ib$. Við lítum á mengi rauntalnanna $\mathbb{R}$ sem hlutmengi í mengi tvinntalnanna og gerum engan greinarmun á rauntölunni a og tvinntölunni $a + 0i$ þegar við erum að tala um tvinntölur. Einnig ritum við tvinntöluna $0 + bi$ einfaldlega sem bi eða ib.

■ **Dæmi 9.2** Við reiknum:
(i) $(3 + 4i)(-2 + 7i) = -6 + 21i - 8i + 28i^2 = -6 + 28i^2 + 13i = -34 + 13i,$
(ii) $5 + 4i + 3 - 2i = 8 + 2i,$
(iii) $(-i)(-i) = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$

■

■ **Dæmi 9.3** Finnið tvær lausnir á jöfnunni $z^2 = -1$ í mengi tvinntalna.

■ **Lausn** Við sjáum að auk $i^2 = -1$ er $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ svo $z = i$ og $z = -i$ eru tvær mismunandi lausnir. Við sjáum síðar að jafnan hefur nákvæmlega þessar lausnir í $\mathbb{C}$.

■

Skilgreining 9.2.1 Látum $w = a + bi$ vera tvinntölu. Við skilgreinum **samokatölu** (*e. complex conjugate*) w sem tvinntöluna $\overline{w} = a - bi$.

Eiginleikar tvinntalnanna m.t.t. samlagningar $(+)$ og margföldunar $(\cdot)$ eru svipaðir og samsvarandi eiginleikar fyrir rauntölur.

Regla 9.2.1 Látum v, w og z vera tvinntölur. Þá gildir:

$$
\begin{aligned}
vw &= wv && \text{(víxlregla)},\\
v(wz) &= (vw)z && \text{(tengiregla)},\\
v(w + z) &= vw + vz && \text{(dreifiregla)},\\
1v &= v, && (1 = 1 + 0i \text{ er margföldunarhlutleysa})
\end{aligned}
$$

Sönnun. Einfaldir útreikningar. ■

Regla 9.2.2 Látum $w = a + bi$ og $z = x + yi$ vera tvinntölur, $\overline{w} = a - bi$ og $\overline{z} = x - yi$ vera tilsvarandi samokatölur og $\overline{w + z}$ vera samokatölu tvinntölunnar $w + z$ og $\overline{wz}$ vera samokatölu wz. Þá gildir
(i) $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z},$
(ii) $\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}.$

Sönnun.

$$
\begin{aligned}
\overline{w + z} &= \overline{(a + ib) + (x + iy)} = \overline{(a + x) + (b + y)i}\\
&= (a + x) - (b + y)i = (a - bi) + (x - yi) = \overline{w} + \overline{z}.
\end{aligned}
$$

Seinni liðurinn fæst á samsvarandi hátt. ■

Deiling í $\mathbb{C}$

Ekki er fyrirfram augljóst hvernig deiling er framkvæmd í $\mathbb{C}$. Látum $z = a + ib \neq 0$ vera tvinntölu. Samkvæmt skilgreiningu á tvinntölu þarf að vera hægt að skrifa margföldunarandhverfu z, sem við táknum með $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$, á forminu $\frac{1}{z} = x+iy$; m.ö.o. þurfa að vera til rauntölur x og y sem uppfylla jöfnuna

$$\frac{1}{a+ib} = x + iy \Longleftrightarrow 1 = ax - by + i(ay + bx).$$

Raunhluti síðustu jöfnu er 1 en þverhlutinn er 0, svo að skrifa má tvær skilyrðið sem tvær jöfnur:

$$\begin{aligned} 1 &= ax - by \\ 0 &= ay + bx. \end{aligned}$$

Leysum jöfnurnar saman og fáum

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y &= \frac{-b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Við sjáum þá að deiling er möguleg í $\mathbb{C}$ og til er styttri leið; lengjum einfaldlega $\frac{1}{z}$ með $\overline{z}$ og fáum:

Regla 9.2.3 Ef $z = a + ib$ er tvinntala, þá er umhverfa hennar

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \\ &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

þar sem

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(\frac{1}{z}) &= \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{og} \\ \mathrm{Im}\,(\frac{1}{z}) &= -\frac{b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Við höfum sýnt fram á tilvist **margföldunarandhverfu**

Regla 9.2.4 Ef $v = a + bi \neq 0$, (ath. tvinntalan 0 er $0 + 0i$) þá er

$$\begin{aligned} v \cdot \frac{\overline{v}}{v\overline{v}} &= (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i\right) \\ &= 1 + 0i = 1 \qquad \text{(tilvist margföldunarandhverfu).} \end{aligned}$$

Athugið að margföldunarandhverfan er nauðsynlega ótvírætt ákvörðuð.

Skilgreining 9.2.2 Látum $a, b \in \mathbb{R}$ og skoðum tvinntöluna $w = a + bi$. Rauntalan $|w| = |a + bi| \equiv \sqrt{w\overline{w}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ er kölluð **algildi** eða **lengd** (*e. absolute value, modulus, magnitude*) tvinntölunnar $w = a + bi$.

Regla 9.2.5 Um tvinntölur $z = a + ib$ og $w = x + iy$ gildir að
1) $|a + ib| = 0$ þþaa. $a = 0$ og $b = 0$.
2) Þríhyrningsójafnan: $|z + w| \leq |z| + |w|$.
3) $|zw| = |z||w|$,
4) $zw = 0$ þþaa. $z = 0$ eða $w = 0$.

Sönnun. Við sönnum hér aðeins 3). Reiknum

$$\begin{aligned}|zw| &= \sqrt{(zw)(\overline{zw})} = \sqrt{zw\overline{z}\,\overline{w}}\\ &= \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}}\\ &= |z||w|.\end{aligned}$$

■

9.3 Skauthnit

Það er oft auðveldara að vinna með tvinntölur $z = a + ib$ þegar þær eru settar fram í **skauthnitum** eða **pólhnitum** (e. polar form). Fjarlægð punktsins (a, b) frá $(0, 0)$ er þá **lengd** vigursins z og við finnum lengdina með tölugildinu

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Stefnuhornið (*e. argument, phase*) til punktsins mælum við rangsælis frá x-ás; það er táknað með

$$\theta = \arg(z)$$

og það gildir að $\tan(\theta) = b/a$, en fleira en eitt θ uppfylla þessi skilyrði. Ef við krefjumst $-\pi < \theta \leq \pi$, þá er þetta θ ótvírætt ákvarðað og kallast **meginhorn** eða **höfuðstefnuhorn** (*e. principal argument*) og er táknað með $\operatorname{Arg}(z)$. Almennt, til þess að reikna meginhorn $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ tvinntölunnar $z = a+ib \neq 0$ er öruggast að nota Kósínusregluna. Með því að skoða mynd af þríhyrningi með hornpunktana 0, 1 og w í tvinntöluplaninu, þ.e. punktana $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $a, b)$, fæst jafnan

$$(a - 1)^2 + b^2 = 1^2 + |z|^2 - 2 \cdot 1 \cdot |z| \cos\theta = 1 + a^2 + b^2 - 2 \cdot 1 \cdot |z| \cos\theta$$

sem einfaldast í

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}. \tag{9.2}$$

Reiknum nú

$$\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)$$

og fáum út horn á milli 0 og π. Ef $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ notum við θ, annars $-\theta$. Munum að formerkisfallið er skilgreint

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{ef } x > 0 \\ 0 & \text{ef } x = 0 \\ -1 & \text{ef } x < 0 \end{cases}$$

svo að formúlan verður

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z)) \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right). \tag{9.3}$$

Þessi formúla gildir í öllum tilfellum þar sem $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Ef $\operatorname{Im}(z) = 0$ erum við með rauntölu. Ef hún er jákvæð er stefnuhornið 0 og formúlan gefur þá rétta niðurstöðu. Ef z er neikvæð rauntala er stefnuhornið π en formúlan gefur vitlausa svarið 0. Þetta þarf að varast. Ef $z = 0$ má stefnuhornið vera hvaða tala sem er.

■ **Dæmi 9.4** Skrifið tvinntöluna $w = -1 - i$ á skautformi.

■ **Lausn** Byrjum á að sjá að lengd tvinntölunnar er $|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Reiknum út meginhornið: Nú er $\arccos(-1/\sqrt{2}) = 3\pi/4$ og þar sem $\operatorname{Im}(-1-i) = -1 < 0$ er

$$w = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

■

Rifjum upp að fyrir sérhvert (x, y) á einingarhringnum er til $\theta \in \mathbb{R}$ þ.a. $x = \cos\theta$ og $y = \sin\theta$. Þetta er grunnurinn að næstu setningu.

Regla 9.3.1 Látum $z = a + ib$ vera tvinntölu. Þá er til $\theta \in \mathbb{R}$ þ.a.

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{z}{|z|}.$$

Sér í lagi er

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{9.4}$$

Til þess að spara skriftir er þægilegt að skilgreina

$$e^{i\theta} = \exp(i\theta) \equiv \cos\theta + i\sin\theta. \tag{9.5}$$

Þetta er í raun veldisvísisfallið af tvinntölu, þó að við getum ekki rökstutt það af neinu viti að svo stöddu. Formúla (9.5) er þó mjög mikilvæg og er kölluð **regla Eulers**.

Af reglu Eulers sjáum við að tvinntölu $z = a + ib$ má rita

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}. \tag{9.6}$$

Þetta munum við notfæra okkur oft!

Samantekið:
Tvinntölu $w = x + iy$ má rita á skauthnitaformi sem $w = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ þar sem $r \equiv |w|$ og $\theta \equiv \arg w$.

9.4 Margföldun tvinntalna á skauthnitaformi

Skoðum nú margföldun tvinntalna í skauthnitum. Látum $z \neq 0$ og $w \neq 0$ vera tvinntölur og ritum þær á skauthnitum, þ.e. $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ og $w = se^{i\varphi} = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, þar sem $r = |z|$, $s = |w|$, $\theta = \arg z$ og $\varphi = \arg w$.

Við notum nú formúlurnar

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

og

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

til að reikna

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos\theta + i\sin\theta)s(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= rs(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)) \\ &= rs(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)). \end{aligned}$$

Við sjáum að tvinntalan zw hefur algildið $|zw| = rs$ og stefnuhorn $\arg(zw) = \theta + \varphi = \arg(z) + \arg(w)$.

Af þessum reikningi leiða tvær mikilvægar formúlur:

Margföldunarandhverfa $z \neq 0$ á skauthnitaformi er

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{e^{-i\theta}}{r} \quad \left(= \frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)$$

og þar með er

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r^n e^{in\theta},$$

ekki bara fyrir $n \in \mathbb{N}$, heldur fyrir öll $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Við skilgreinum nú z^0. Til þess að jafnan $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$ haldist rétt fyrir öll $m, n \in \mathbb{Z}$ og öll $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ setjum við $z^0 \equiv 1$ (eins og líka er gert í mengi rauntalna). Þar með er

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r^n e^{in\theta} \text{ fyrir öll } n \in \mathbb{Z} \text{ og öll } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Athugið að ekki er hægt að skilgreina 0^0 svo eitthvað vit sé í.

9.5 Rætur tvinntölu (jafnan $z^n = w$)

Ein af mikilvægari staðreyndum í stærðfræði er gefin í eftirfarandi setningu:

Regla 9.5.1 — Undirstöðusetning algebrunnar. Látum P vera margliðu af stigi n með tvinntölustuðla. Þ.e.

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \text{ þar sem } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \text{ og } a_n \neq 0.^a$$

Þá klofnar P í nákvæmlega n línulega þætti, sem þýðir að til eru n tvinntölur $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ þ.a.

$$P(z) = a_n(z - r_n)(z - r_{n-1}) \cdots (z - r_1) \equiv a_n \prod_{k=1}^{n}(z - r_k).$$

[a] Sér í lagi er margliða með rauntölustuðlum á þessu formi!

Tölurnar $r_1, r_2, \dots, r_n$ eru kallaðar rætur margliðunnar. Athugið að þær þurfa ekki að vera mismunandi. Táknið $\prod$ (stórt pí) merkir að margfalda á saman það sem á eftir kemur, svipað og $\sum$ (stórt sigma) merkir að leggja á það saman sem á eftir kemur.
Það er ekki til nein almenn formúla til þess að reikna út rætur margliðu af stigi 5 eða hærra. Í talnakerfi með tvinntölum getum við samt auðveldlega leyst jöfnur af gerðinni $z^n = w$, þar sem $w \in \mathbb{C}$. Undirstöðusetning algebrunnar segir okkur að þessi jafna geti haft allt að n mismunandi lausnir í $\mathbb{C}$ ef $w \neq 0$.
Ef að við þekkjum nú tvinntöluna $w = se^{i\varphi} \neq 0$ og við viljum leysa jöfnuna $z^n = w$, þá verður fyrir $z = re^{i\theta}$ að gilda

$$z^n = r^n e^{in\theta} = se^{i\varphi}$$

eða

$$r^n = s \text{ og } e^{in\theta} = e^{i\varphi}.$$

Þessi tvö skilyrði eru nákvæmlega þá uppfyllt þegar

$$r = \sqrt[n]{s} \text{ og } n\theta = \varphi + 2\pi k \text{ fyrir eitthvert } k \in \mathbb{Z}.$$

Tvinnölurnar

$$z_k := \sqrt[n]{s} \exp\left(\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) i\right)$$

eru allar mismunandi fyrir $k = 0, 1, \dots, n-1$, en fyrir önnur gildi á k fáum við engar nýjar tvinntölur. T.d. er

$$z_n = \sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{n}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) = z_0.$$

Við höfum sannað eftirfarandi setningu:

Regla 9.5.2 Látum $w = s(\cos\varphi + i\sin\varphi) = se^{i\varphi} \neq 0$ vera tvinntölu. Þá hefur jafnan $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, nákvæmlega n lausnir í $\mathbb{C}$. Nefnilega

$$z_k \equiv \sqrt[n]{s} \exp\left(\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) i\right) \qquad \text{fyrir } k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{9.7}$$

Við skilgreinum $n-$tu rót tvinntölunnar $w = s\exp(i\varphi)$, þar sem $\varphi = \operatorname{Arg}(w)$ er höfuðstefnuhorn w, sem

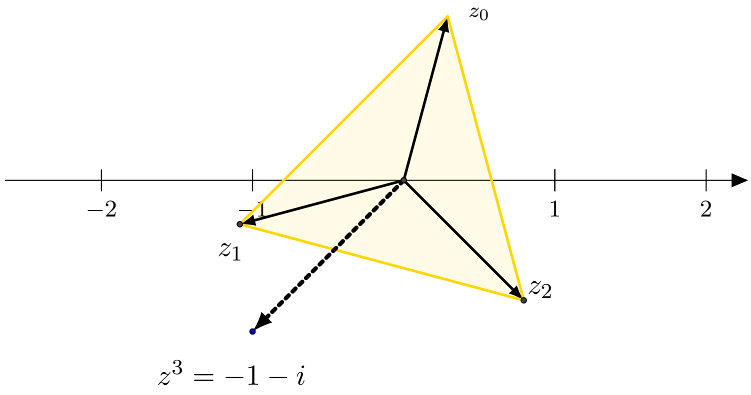
$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{s} \exp\left(i\frac{\varphi}{n}\right),$$

þ.e. z_0 í Reglu 9.5.2.

■ **Dæmi 9.5** Finnið allar lausnir $z^3 = -1 - i$ og reiknið $\sqrt[3]{-1-i}$.

■ **Lausn** Við sáum fyrr í kaflanum að $|-1-i| = \sqrt{2}$ og að höfuðstefnuhornið er $\operatorname{Arg}(-1-i) = -3\pi/4$ og því er

$$w = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right).$$



Mynd 9.2: Myndræn framsetning af lausnum á jöfnunni $z^3 = -1 - i$. Ræturnar raða sér í hornin á jafnhliða þríhyrningi. Almennar gildir að rætur $z^n = a + ib$ raða sér í hornin á reglulegum n-hyrningi.

Þá er

$$\sqrt[3]{-1-i} = \sqrt[6]{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right).$$

Allar lausnir jöfnunnar $z^3 = -1 - i$ eru

$$z_k = \sqrt[6]{2}\exp\left(i\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k\right]\right)$$

fyrir $k = 0, 1, 2$.
Sem sagt eru lausnirnar útskrifaðar

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right), \quad z_1 = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{5\pi}{12}i\right), \quad z_2 = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{13\pi}{12}i\right).$$

Auðvelt er að sannreyna að niðurstaðan er rétt, við einfaldlega reiknum z_0^3, z_1^3 og z_2^3 og staðfestum að út komi $-1 - i$ eins og jafnan gerir ráð fyrir.

Við getum líka skrifað lausnirnar á forminu $a + ib$ með því að nota reglu Eulers, þá fáum við

$$z_0 \approx 0.7937 - 0.7937i, \quad z_1 \approx 0.29051 + 1.0842i, \quad z_2 \approx -1.0842 - 0.29051i.$$

og getum svo teiknað lausnirnar í Argand mynd, eins og sést á Mynd 9.2.

■

■ **Dæmi 9.6** Finnum nú allar lausnir á $z^4 = -4$. Teiknum tvinntöluna -4 í Argand mynd; lengdin er 4 og höfustefnuhornið er π. Við höfum því jöfnuna $z^4 = 4e^{\pi i}$. Lausnir jöfnunnar eru

$$z_k = \sqrt[4]{4}\exp\left(i\left[\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right]\right)$$

fyrir $k = 0, 1, 2, 3$. Þ.e. við höfum lausnirnar

$$z_0 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}i\right) = 1 + i, \quad z_1 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right) = -1 + i,$$

$$z_2 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi}{4}i\right) = -1 - i, \quad z_3 = \sqrt{2}\exp\left(\frac{7\pi}{4}i\right) = 1 - i$$

Nú er ekki erfitt að sannreyna að þetta eru lausnir á jöfnunni $z^4 = -4$ sem við byrjuðum með. T.d.

$$z_0^4 = (1+i)^4 = (1+i)^2(1+i)^2 = (2i)(2i) = 4i^2 = -4 \text{ passar.}$$

Þar sem við vitum að fjórðu ræturnar raða sér í hornin á ferningi, vitum við jafnframt að það eru nákvæmlega 90° á milli vigranna í myndrænu framsetningunni. Við getum því látið okkur nægja í þessu dæmi að reikna z_0 útfrá höfuðstefnuhorninu og þá vitum við að $z_1 = z_0 \cdot i$, $z_2 = z_1 \cdot i$ og $z_3 = z_2 \cdot i$. Það jafngildir því snúningi um 90° að margfalda tvinntölu með i. Hvers vegna? ■

9.6 Lausnir á völdum dæmum

■ **Dæmi 9.7** Látum $z = a + ib$ vera tvinntölu. Finnið raunhluta, $\mathrm{Re}\,(z)$ og þverhluta $\mathrm{Im}\,(z)$ og teiknið z í tvinntalnasléttuléttunni $\mathbb{C}$.

(i) $z_1 = -5 + 2i$ (ii) $z_2 = 4 - i$ (iii) $z_3 = -i\pi$ (iv) $z_4 = -6$

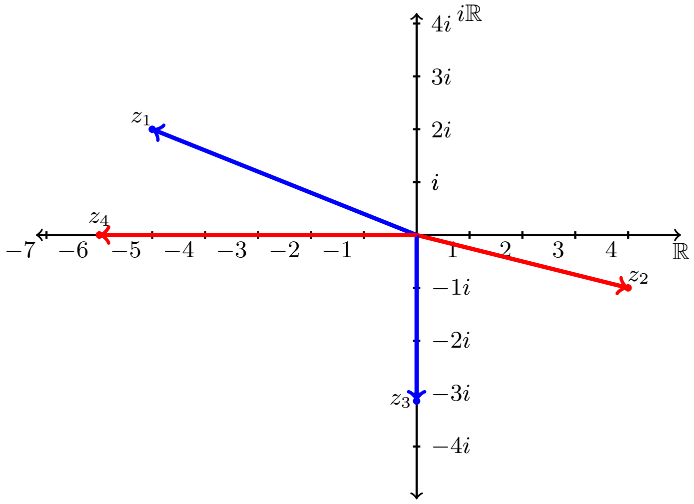
■ **Lausn**

(i) $\mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(-5+2i) = -1, \quad \mathrm{Im}\,(z_1) = \mathrm{Im}\,(-5+2i) = 2.$

(ii) $\mathrm{Re}\,(z_2) = \mathrm{Re}\,(4-i) = 4, \quad \mathrm{Im}\,(z_2) = \mathrm{Im}\,(4-i) = -1.$

(iii) $\mathrm{Re}\,(z_3) = \mathrm{Re}\,(-i\pi) = 0, \quad \mathrm{Im}\,(z_3) = \mathrm{Im}\,(-i\pi) = -\pi.$

(iv) $\mathrm{Re}\,(z_4) = \mathrm{Re}\,(-6) = -6, \quad \mathrm{Im}\,(z_4) = \mathrm{Im}\,(-6) = 0.$



Mynd 9.3: Dæmi 9.7.

■

■ **Dæmi 9.8** Finnið lengd z, $r = |z|$, og meginhorn z, $\theta = \mathrm{Arg}(z)$

(i) $z = -1 + i$ (ii) $z = \sqrt{3} - i$

■ **Lausn**

(i) Lengd z er $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$. Nú liggur z í II fjórðungi tvinntalnasléttunnar svo að reikna má stefnuhorn z með formúlunni

$$\begin{aligned}\arg(z) &= \pi + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right)\\ &= \pi + \arctan(-1)\\ &= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Þar sem $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ er á bilinu $]-\pi, \pi]$, þá er $\arg(z)$ meginhorn (höfuðstefnuhorn) z, táknað $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{3\pi}{4}$. Auðveldara er að nota formúlu (9.3) sem gefur beint

$$\operatorname{Arg}(-1 + i) = \mathbf{sgn}(1) \cdot \arccos(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{3\pi}{4}.$$

(ii) Lengd $z = \sqrt{3} - i$ er $|z| = 2$. Þar sem z liggur í IV- fjórðungi $\mathbb{C}$ þá er stefnuhorn z

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\arctan\left(1/\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Þar sem $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ þá er $\arg(z)$ meginhorn, þ.e. $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(\sqrt{3} - i) = -\dfrac{\pi}{6}$. Eins og áður er auðveldara að nota formúlu (9.3):

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{3} - i) = sgn(-1) \cdot \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{6}.$$

■

■ **Dæmi 9.9** Nú er lengd tvinntölu gefin og stefnuhorn hennar. Skrifið tvinntöluna z á forminu $x + iy$ þegar

(i) $|z| = 2$ og $\arg(z) = 3\pi$

(ii) $|z| = 5$ og $\operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

■ **Lausn**

(i) $z = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = 2(\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)) = -2$.

(ii) (Teiknið mynd) Lítum á z, x og y eins og lengdir í rétthyrndum þríhyrningi: $|z| = 5$ er langhliðin, og þar sem $\theta = \arctan(3/4) = \arctan(y/x)$ þá er $x = 4$ og $y = 3$. Svo að $z = 4 + 3i$. (Hvað ef $\operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) - \pi$?)

■

■ **Dæmi 9.10** Lýsið rúmfræðilega mengi allra punkta $z \in \mathbb{C}$ sem uppfylla ójöfnuna $|z - 2i| \leq 3$.

■ **Lausn** *Maður lítur á oft á $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}^2$ sem sama svæðið, hér sést vel af hverju þetta á við.*

Maður les beint úr ójöfnunni: Lausnarmengið er mengi allra tvinntalna z sem eru í mesta lagi í fjarlægðinni 3 frá tvinntölunni $2i$.

Nú teiknar maður mynd af lausnarmenginu og sér að því má alveg eins lýsa sem lokaðri hringskífu í $\mathbb{R}^2$ með miðju í $(0, 2)$ og geisla 3.

Sannreynum með reikningum: Látum $z = x + iy$, og þá $z - 2i = x + i(y - 2)$, með $\mathrm{Re}\,(z-2i) = x$ og $\mathrm{Im}\,(z-2i) = y - 2$. Samkvæmt Skilgreiningu 9.2.2 fæst

$$|z - 2i|^2 = x^2 + (y-2)^2 \leq 9.$$

■

Æfingar 9.6

Æfing 9.6.1 Finnið raunhluta $\mathrm{Re}\, z$, þverhluta $\mathrm{Im}\, z$, algildi $|z|$ og höfuðstefnuhorn $\mathrm{Arg}\, z$ fyrir tvinntölurnar:

(i) $z = -3 + 3i$
(ii) $z = -\pi$
(iii) $z = \pi i$
(iv) $z = -1$
(v) $z = 3e^{2i}$
(vi) $z = 2e^{-8i}$

■

Æfing 9.6.2 Leysið jöfnurnar (a) $\overline{z} = 2/z$ og (b) $\overline{z} = -2/z$. ■

Æfing 9.6.3 Reiknið (a) $\sqrt[4]{-1}$ og (b) $\sqrt[3]{-1+2i}$. ■

Æfing 9.6.4 Gefnar eru tvinntölurnar $z = a + ib$ og $w = x + iy$. Sýnið að $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ ■

Æfing 9.6.5 Gefin er tvinntalan $z = 2 - 2i$. Finnið rauntölur a og b þannig að $a + ib = \dfrac{1}{z}$. ■

Æfing 9.6.6 Stefnuhorn tvinntölu z segir til um stefnu tvinntölunnar og er táknað $\arg(z)$. Höfuðstefnuhorn z, táknað $\mathrm{Arg}(z)$, er það stefnuhorn sem er á bilinu $]-\pi, \pi]$.

Látum z og w vera tvinntölur.

(i) Gefið er að $\mathrm{Arg}(z) = -\pi/2$ og $\mathrm{Arg}(w) = \pi/4$. Reiknið $\mathrm{Arg}(zw)$.
(ii) Gefið er að $\mathrm{Arg}(z) = 2\pi/3$ og $\mathrm{Arg}(w) = \pi/2$. Reiknið $\mathrm{Arg}(zw)$.
(iii) Gefið er að $\arg(z) = -\pi$ og $\mathrm{Arg}(w) = 0$. Reiknið $\mathrm{Arg}(zw)$.

■

Æfing 9.6.7 Finnið allar lausnir á eftirfarandi jöfnum. Skrifið lausnirnar á forminu $a + ib$, teiknið þær inn á Argand mynd og skrifið hvernig hægt er að sannreyna að lausnirnar séu réttar.

(i) $z^3 = 1$
(ii) $\frac{z^4}{4} = 1$
(iii) $z^3 = 9i - 46$
(iv) $\frac{8\sqrt{3}}{z^4+8} = -i$
(v) $z^4 + 8 = 8\sqrt{3}i$
(vi) $z^3 = -2i$

■

Æfing 9.6.8 Í þessu verkefni á að skrifa forrit í MATLAB sem teiknar tvinntölu í tvinntöluplanið, þ.e. tvinntalan $z = a + ib$ er teiknuð sem vigur frá $(0, 0)$ til (a, b).

Gefinn er forritsbútur sem teiknar mynd sem líkist hnitakerfi.

```
as=10;
or=0.05*as;
hold on
plot([-as as],[0 0])
plot([0 0],[-as as])
plot([as-or as as-or],[-or 0 or])
plot([-or 0 or],[as-or as as-or])
axis([-(as+1) as+1 -(as+1) as+1])
```

a) Skoðið hvað forritið gerir, línu fyrir línu. T.d.
   `as=10; % gefur breytunni as gildið 10`

Skrifið nú forrit sem:

b) Biður notandann um að slá inn raunhluta og þverhluta tvinntölunnar w

c) Reiknar lengd og höfuðstefnuhorn tvinntölunnar.

d) Prentar út skilaboð sem tilgreina tvinntöluna, lengd hennar og meginhorn á eftirfarandi hátt. Ef tvinntalan er $z = -1 - 2i$ þá birtast skilaboðin
   ```
   Tvinntalan -1-2i hefur lengdina 2.2361
   og höfuðstefnuhornið -2.0344
   ```
   í skipanaglugganum.

e) Teiknar rauða línu sem táknar tvinntöluna $a + ib$. Tvinntöluna $a + ib$ á að teikna inná sömu mynd og hnitakerfið sem er teiknað með skipununum hér fyrir ofan.

f) Merkir *raunhluti* á x-ásinn og *þverhluti* á y-ásinn.

g) Gefur myndinni titilinn *Argand mynd*.

h) Breytir hnitakerfinu þannig að stærð þess *passi* fyrir tvinntöluna $a + ib$.

■

10. Þrepun

10.1 Þrepunarskrefin

Þrepun (*e. induction*) virkar á eftirfarandi hátt:

> **Regla 10.1.1 — Þrepunarskrefin.** Gerum ráð fyrir að fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ er gefin einhver fullyrðing P_n. Ef eftirfarandi skilyrði eru uppfyllt:
> (i) P_1 er sönn.
> (ii) Ef P_k er sönn fyrir eitthvert $k \in \mathbb{N}$ þá er P_{k+1} líka sönn,
> þá er P_n sönn fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$.

ATH Forsendan

$$P_k \text{ er sönn fyrir eitthvert } k \in \mathbb{N}$$

í lið (ii) er oft kölluð **þrepunarforsendan** (*e. induction hypthesis*).

Ef við viljum sýna að fullyrðing P_n sem oft er einhver formúla gildi fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, þá er nóg að sýna að formúlan gildi fyrir $n = 1$ og að **ef** formúlan gildir fyrir eitthvert $k \in \mathbb{N}$, **þá** gildi hún líka fyrir $k + 1$.

ATH Ef við getum sýnt að formúla P_n gildi fyrir t.d. $n = 5$ og svo að ef formúlan gildir fyrir eitthvert $k \in \mathbb{N}$, þá gildi hún líka fyrir $k + 1$. Þá höfum við sýnt að formúlan gildi fyrir öll $n \in \{5, 6, 7, \ldots, \}$.

■ **Dæmi 10.1** Sýnum að formúlan

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{10.1}$$

sé rétt fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

■ **Lausn**

Skref (i): Fyrir $n = 1$ gildir

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

svo formúlan (10.1) er rétt fyrir $n = 1$.

Skref (ii): Gerum ráð fyrir að formúlan sé rétt fyrir eitthvert $n \in \mathbb{N}$ (þrepunarforsendan). Þá er skv. þrepunarforsendu

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2},\end{aligned}$$

svo formúlan (10.1) er þá líka rétt fyrir $n + 1$.

Við ályktum með Reglu 10.1.1 að (10.1) sé rétt fyrir öll $n = 1, 2, 3, \ldots$.

■

Athugið að það eru bara tveir möguleikar í dæminu hér á undan. Annaðhvort er (10.1) rétt fyrir öll $n = 1, 2, 3, \ldots$ eða það er til einhver tala $N \in \mathbb{N}$ þ.a. formúlan (10.1) er ekki rétt fyrir N. En hvað er þá um formúluna (10.1) fyrir $n = N - 1$? Og þá $n = N - 2$? Og þá $n = N - (N - 1) = 1$?

■ **Dæmi 10.2** Sýnum að formúlan

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \tag{10.2}$$

gildi fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

■ **Lausn**

Skref (i): Fyrir $n = 1$ gildir

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^2$$

svo að formúlan (10.2) er rétt fyrir $n = 1$.

Skref (ii): Gerum ráð fyrir að formúlan (10.2) sé rétt fyrir eitthvert $n \in \mathbb{N}$. Þá er (skv. þrepunarforsendu)

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

svo formúlan (10.2) er líka rétt fyrir $n + 1$.

Þar með er formúlan

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \text{rétt fyrir öll } n = 1, 2, 3, \ldots$$

■

■ **Dæmi 10.3 Víti til varnaðar:** *Sýnum* með þrepun að ef $f(x) = x^m$ fyrir $m \in \mathbb{N}$, þá er

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \tag{10.3}$$

fyrir öll $n \in \mathbb{N}$

Skref (i): Fyrir $n = 1$ gildir

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1} = \frac{m!}{(m-1)!}x^{m-1}$$

svo að formúlan (10.3) er rétt fyrir $n = 1$.

Skref (ii): Gerum ráð fyrir að formúlan (10.3) sé rétt fyrir eitthvert $n \in \mathbb{N}$. Þá er (skv. þrepunarforsendu)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \\ &= \frac{m!}{(m-n)!}(m-n)x^{m-n-1} = \frac{m!}{(m-(n+1))!}x^{m-(n+1)} \end{aligned}$$

svo að formúlan (10.3) er líka rétt fyrir $n + 1$. Þar með er formúlan

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$$

rétt fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Eða hvað? Gildir formúlan fyrir öll möguleg $m, n \in \mathbb{N}$?

Ábending: Skoðið tilfellið $n = m$. Jafnvel þó að við samþykkjum að $(x^0)' = 0 \cdot x^{-1}$ þá er örugglega vitlaust að halda því fram að $0/0! = 1/(-1)!$.

■

Æfingar 10.1

Æfing 10.1.1 Notið þrepun til þess að sýna eftirfarandi formúlur fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

(i)

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{fyrir} \quad x \neq 1$$

(ii)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) Ójafna Bernoullis

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \ \text{ fyrir } \quad x \geq -1$$

(iv)

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

(v)

$$\frac{d}{dx} x^{n/2} = \frac{n}{2} x^{(n/2)-1}$$

(vi)

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(vii) Þessa jöfnu á að sýna fyrir allar heilar tölur $n \in \mathbb{Z}$.

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

■

Atriðisorðaskrá