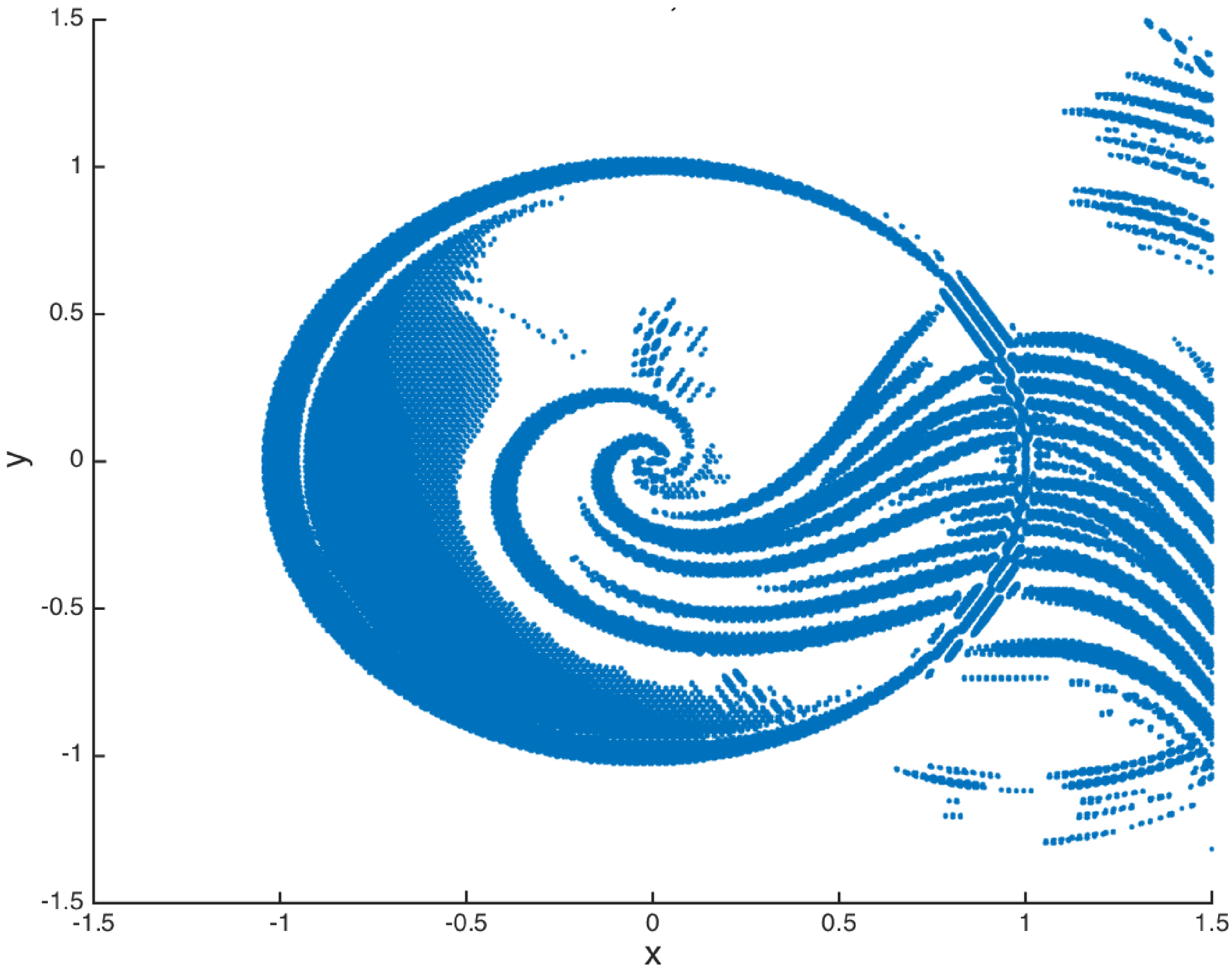
Kennslubók í stærðfræðigreiningu í mörgum breytistærðum

Ingunn Gunnarsdóttir

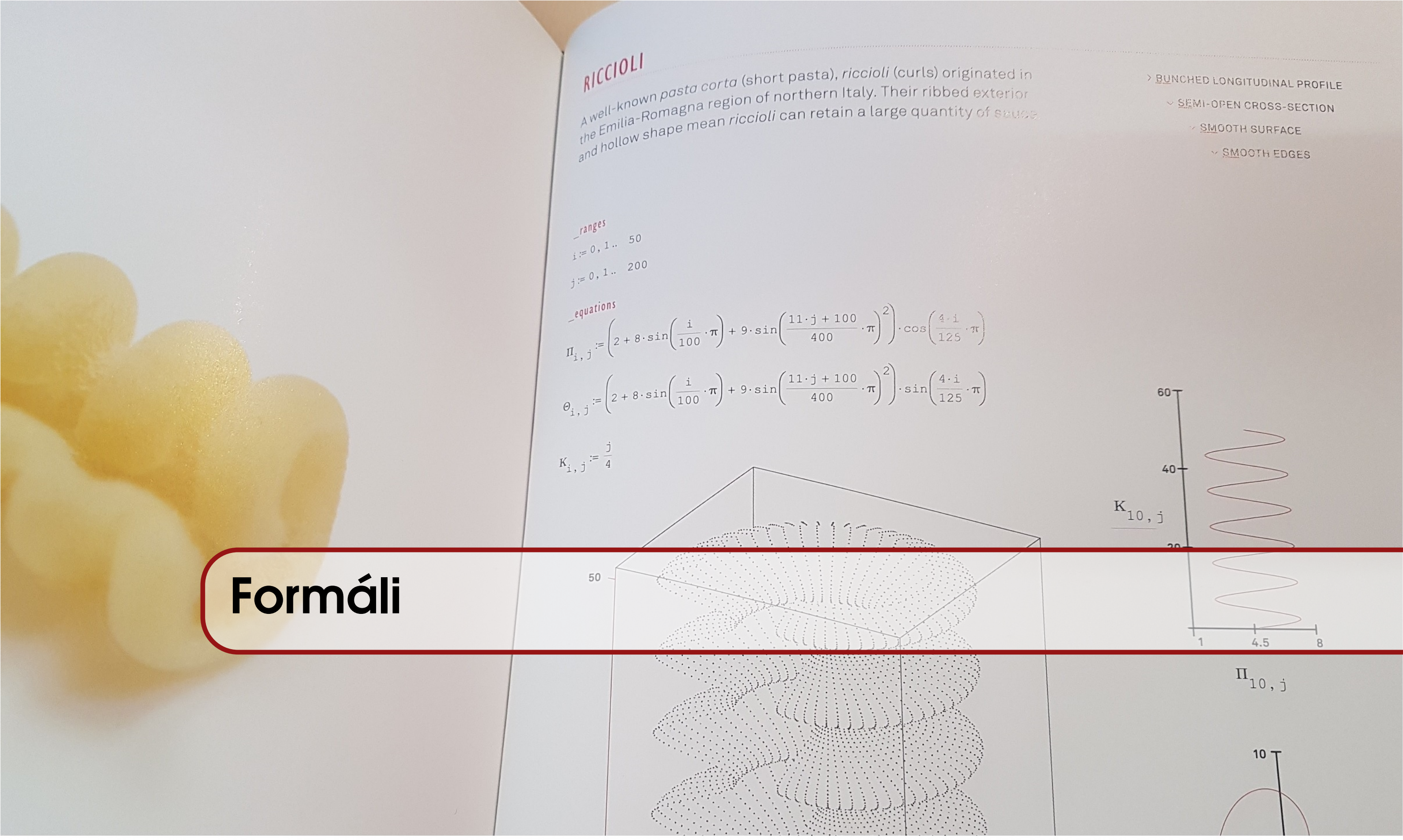
Sigurður Freyr Hafstein



ISBN 978-9935-24-686-8

Prentun: Háskólaprent

Fyrsta prentun, ágúst 2020

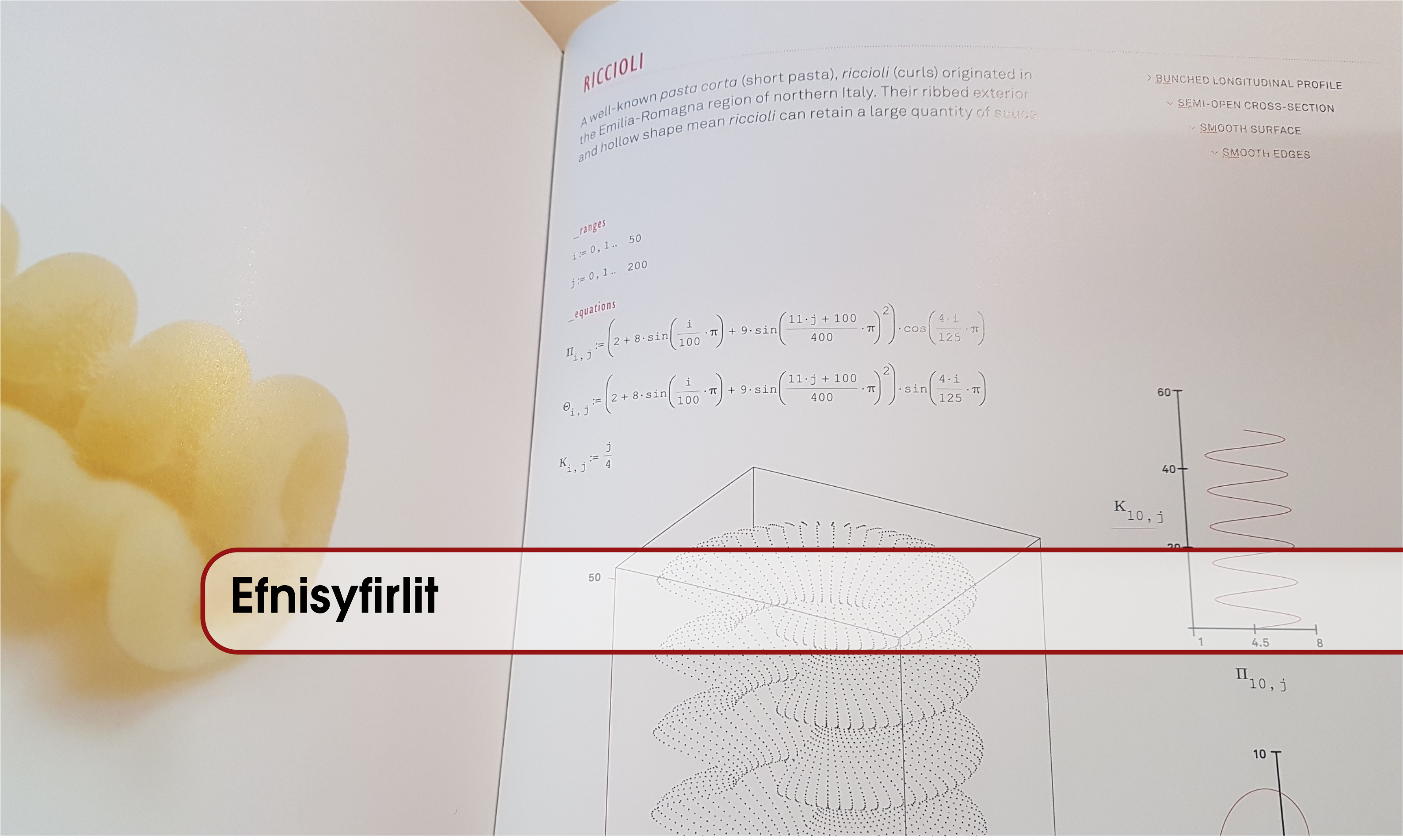


Formáli

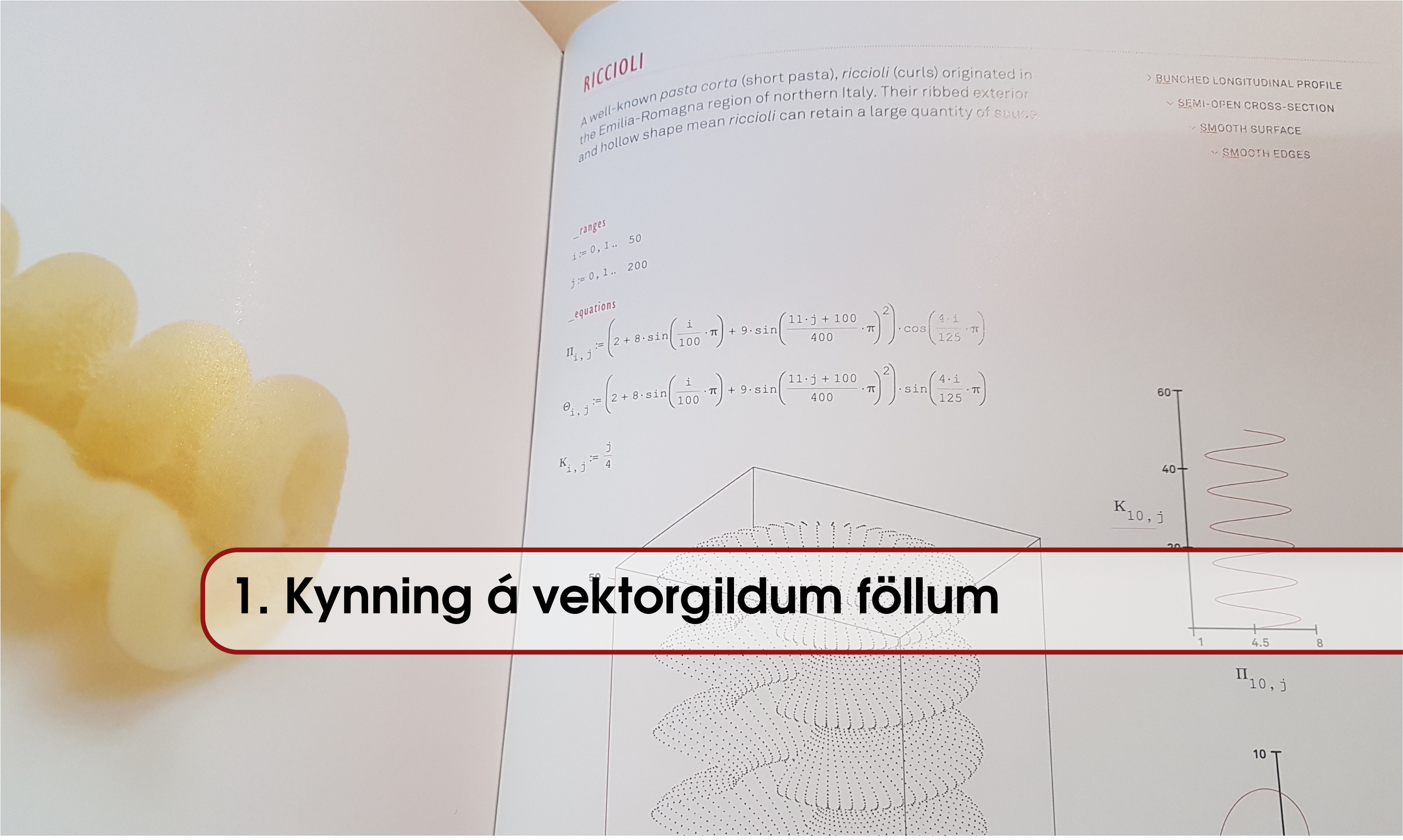
Þessi bók varð til uppúr fyrirlestranótum sem stuðst var við í kennslu á framhaldsnámskeiði í stærðfræðigreiningu fyrir verkfræði- og tæknifræðinemendur við Háskólann í Reykjavík.

Við þökkum nemendum í HR sem í gegnum tíðina hafa komið með margar góðar ábendingar um það sem betur mætti fara. Einnig þökkum við stærðfræðingunum Hlyni Arnórssyni og Olivier Moschetta fyrir margt gott innlegg og ábendingar og Hlyni sérstaklega fyrir prófarkalestur og hjálp við myndvinnslu.

Myndin á forsíðunni er tekin úr greininni *Computational Approach for Complete Lyapunov Functions* eftir Carlos Argáez, Peter Giesl og Sigurð F. Hafstein sem birt var í bókinni *Dynamical Systems in Theoretical Perspective Series* gefinni út af Springer árið 2018 í bókaröðinni *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*.



Efnisyfirlit



1. Kynning á vektorgildum föllum

Í stærðfræðigreiningu falla af einni breytistærð skoðum við eiginleika falla af gerð $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, eða almennar falla $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$, þar sem $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$. Við munum nú snúa okkur að föllum $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, eða nánar $\mathbf{f} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ þar sem $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$. Föll af þessari gerð kallast vektorgild föll.

1.1 Stikun ferla

Lesandi ætti að vera orðinn nokkuð vanur að vinna með föll og skoða ferla þeirra myndrænt í $\mathbb{R}^2$ (planinu). Við ætlum nú að læra að stika (e. parameterize) ferla (e. path, curve) og skoða þá myndrænt. Við byrjum á að stika beinar línur og hringi. Takið eftir að t.d. hring er ekki hægt að lýsa með grafi eins raungilds falls, enda er gildi y ekki ótvírætt ákvarðað af gildum x og r í jöfnunni $x^2 + y^2 = r^2$.

Stikaður ferill $\mathcal{C}$ í planinu samanstendur af raðtvennd (f, g) samfelldra falla á bili $\mathcal{I}$. Jafnan

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in \mathcal{I}$$

kallast stikajafna ferilsins $\mathcal{C}$ og t kallast stikinn.

■ **Dæmi 1.1** Fyrir vektorgilt fall $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ af einni breytistærð, t.d. $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos(t)\, \mathbf{i} + \sin(t)\, \mathbf{j}$$

þá er mengið

$$\mathcal{C} := \{\mathbf{r}(t) \ : \ t \in [0, 2\pi]\}$$

ferill í $\mathbb{R}^2$. Auðvelt er að sjá að í þessu tilfelli er $\mathcal{C}$ hringur með miðju í $(0, 0)$ og geisla (e. radius) 1. ■

ATH Þegar við vinnum í tvívídd skrifum við oft $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ fyrir vigrana

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{og} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Með þessu móti er hægt að skrifa vektorgild föll án þess að þurfa meira en eina línu.

Stikun ferils er oftast skrifuð á forminu $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$ eins og í dæminu hér að ofan. Takið eftir að hér gefur maður bæði x og y staðsetninguna sem fall af breytunni t.

Við setjum nú fram skilyrði fyrir því hvenær eitthvað telst vera ferill.

Skilgreining 1.1.1 Mengi $\mathcal{C}$ í $\mathbb{R}^n$, sem hefur þann eiginleika að til er vektorgilt fall af einni breytistærð $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a < b$, sem hefur samfellda liði og þ.a.

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{r}(t) \;:\; t \in [a, b]\},$$

kallast *ferill* (e. curve) í $\mathbb{R}^n$. Að auki krefst maður þess að fallið $\mathbf{r}$ hafi samfellda fyrstu afleiðu nema í mesta lagi í endanlega mörgum punktum. Maður segir að $\mathbf{r}$ *stiki* ferilinn $\mathcal{C}$.

■ **Dæmi 1.2** Er mengið

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

ferill?
Lausn: Svarið er já, því ef við skilgreinum $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j},$$

þá hefur afleiðan $\mathbf{r}'(t) = -\sin(t)\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j}$ samfellda liði og

$$\{\mathbf{r}(t) \;:\; t \in [0, 2\pi]\} = \mathcal{M}.$$

■

■ **Dæmi 1.3** Er mengið $[0, 1]^2$ ferill í $\mathbb{R}^2$?
Lausn: Mengið $[0, 1]^2$ er svæði í planinu og merkilegt nokk er til samfellt fall $\mathbf{r} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ þ.a. $\mathbf{r}([0, 1]) = [0, 1]^2$. Ítalski stærðfræðingurinn Peano fann fyrstur slíkan feril og er hann nefndur Peano ferill honum til heiðurs. Liðirnir í Peano ferillinn og öðrum slíkum ferlum eru aftur á móti í óendanlega mörgum punktum ekki með samfelldar afleiður og því er $[0, 1]^2$ ekki ferill. Almennt: ef eitthvað lítur ekki út fyrir að vera ferill, þá er það heldur ekki ferill. ■

Regla 1.1.1 — Stikun línustriks. Einföld aðferð til að stika línustrik frá vektornum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ til vektorsins $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er gefin með $\mathbf{r} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

■ **Dæmi 1.4** Er rönd ferhyrnings með hornpunkta í $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ og $(0, 1)$ ferill í $\mathbb{R}^2$?

Lausn: Svarið er já, t.d. stikar fallið $\mathbf{r} : [0,6] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\,\mathbf{i}, & \text{ef } t \in [0,2], \\ 2\,\mathbf{i} + (t-2)\,\mathbf{j}, & \text{ef } t \in \,]2,3], \\ 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + (3-t)\,\mathbf{i}, & \text{ef } t \in \,]3,5], \\ \mathbf{j} + (5-t)\,\mathbf{j}, & \text{ef } t \in \,]5,6], \end{cases}$$

rönd ferhyrningsins. Fallið $\mathbf{r}$ er samfellt fyrir öll $t \in [0,6]$ og $\mathbf{r}'(t)$ er skilgreint og samfellt fyrir öll $t \in [0,6]$ nema $t = 0$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 5$ og $t = 6$. ■

Í dæminu hér á undan gæti maður byrjað á að stika hvern línubút og þá fyrir $i = 1,2,3,4$ notað stikanirnar $\mathbf{r}_i : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{0} + t(2\,\mathbf{i} - \mathbf{0}) = 2t\,\mathbf{i}, \\ \mathbf{r}_2(t) &= 2\,\mathbf{i} + t(\mathbf{j} + 2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{i}) = 2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_3(t) &= 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + t(\mathbf{j} - (2\,\mathbf{i} + \mathbf{j})) = 2(1-t)\,\mathbf{i} + \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_4(t) &= \mathbf{j} + t(\mathbf{0} - \mathbf{j}) = (1-t)\,\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Fyrir sérhvert t í formengi fallsins getur aðeins verið ein formúla svo við setjum saman þessa ferla í einn feril með því að nota $\mathbf{r} : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & \text{ef } t \in [0,1], \\ \mathbf{r}_2(t-1), & \text{ef } t \in \,]1,2], \\ \mathbf{r}_3(t-2), & \text{ef } t \in \,]2,3], \\ \mathbf{r}_4(t-3), & \text{ef } t \in \,]3,4], \end{cases}$$

til þess að stika ferilinn.

ATH Ef mengi $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ er ferill, þá eru til margar aðferðir til þess að stika hann.

■ **Dæmi 1.5** Hægt að stika hring með miðju í $(0,0)$ og radíus $r = 1$ á marga mismunandi vegu. Ein algengasta er

$$\mathbf{r}_1 : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_1(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j},$$

en önnur dæmi eru t.d.

$$\mathbf{r}_2 : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_2(t) = \cos(-t)\,\mathbf{i} + \sin(-t)\,\mathbf{j},$$

og

$$\mathbf{r}_3 : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_3(t) = \begin{cases} t\,\mathbf{i} + \sqrt{1-t^2}\,\mathbf{j}, & \text{ef } t \in [-1,1], \\ (2-t)\,\mathbf{i} - \sqrt{1-(2-t)^2}\,\mathbf{j}, & \text{ef } t \in \,]1,3]. \end{cases}$$

■

ATH Allar stikanir hafa áttun. T.d. er stikunin $\mathbf{r}_1 : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_1(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$ stikun hrings rangsælis, á meðan stikunin $\mathbf{r}_2 : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_2(t) = \cos(-t)\,\mathbf{i} + \sin(-t)\,\mathbf{j} = \cos(t)\,\mathbf{i} - \sin(t)\,\mathbf{j}$ er stikun hrings réttsælis.

Ein gerð af ferlum er sérstaklega mikilvæg, svokallaðir *einfaldir lokaðir ferlar*.

Skilgreining 1.1.2 Mengi $\mathcal{C}$ í $\mathbb{R}^n$ er sagt vera *lokaður ferill* (e. closed curve) ef til er stikun $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ þ.a. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

Mengið $\mathcal{C}$ er sagt vera *einfaldur lokaður ferill* (e. simple closed curve) ef til er stikun $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ þ.a. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ og eftirfarandi gildir:

$$\text{Ef} \quad \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2), \quad \text{þar sem} \quad a \le t_1 < t_2 \le b, \quad \text{þá er } t_1 = a \text{ og } t_2 = b.$$

Einfaldur lokaður ferill er sem sagt lokaður, en sker sig annars ekki.

■ **Dæmi 1.6** Látum $\mathbf{r} : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}.$$

Er mengið

$$\mathcal{C} := \{\mathbf{r}(t) \ : \ t \in [0, 4\pi]\}$$

lokaður ferill? Er $\mathcal{C}$ einfaldur lokaður ferill? Af hverju? ■

■ **Dæmi 1.7** Stikið sporbaug sem liggur í gegnum punktana $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,2)$ og $(0,-2)$.

Lausn: Athugum fyrst að sporbaugurinn hefur jöfnuna

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Einföld stikun á sporbaugnum er gefin með $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = 3\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\sin(t)\,\mathbf{j}.$$

Þetta sér maður auðveldlega ef maður áttar sig á því að sporbaugur er ekkert annað en strekktur hringur.

Nákvæmari útleiðsla: Í fyrsta lagi er

$$\left(\frac{3\cos(t)}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sin(t)}{2}\right)^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

fyrir öll $t \in \mathbb{R}$, svo punktarnir $\{\mathbf{r}(t) \ : \ t \in [0, 2\pi]\}$ eru örugglega á sporbaugnum. Látum nú punkt (x,y) á sporbaugnum vera gefinn. Þá verður að gilda $-3 \le x \le 3$ og við getum fundið $t \in [0, 2\pi]$ þ.a. $x = 3\cos(t)$. Þar sem $\arccos$ hefur myndmengið $[0, \pi]$ verðum við annaðhvort að hafa $t = \arccos(x/3)$ eða $t = 2\pi - \arccos(x/3)$ til þess að $t \in [0, 2\pi]$ ásamt $x = 3\cos(t)$ gildi. Nú er nauðsynlega

$$\frac{y}{2} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \cos^2(t)} = \pm\sin(t).$$

Ef $y \ge 0$ veljum við $t = \arccos(x/3) \in [0, \pi]$ til þess að $\sin(t) \ge 0$ og þá $y = 2\sin(t)$. Ef $y < 0$ veljum við $t = 2\pi - \arccos(x/3) \in [\pi, 2\pi]$ og þá er $y = 2\sin(t)$ því

$$\sin(2\pi - \arccos(x/3)) = -\sin(\arccos(x/3)) \le 0.$$

Fyrir sérhvern punkt (x, y) á sporbaugnum getum við sem sagt fundið $t \in [0, 2\pi]$ þ.a. $x = 3\cos(t)$ og $y = 2\sin(t)$. Þetta sýnir þetta að $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stikar sporbauginn.

■

Af síðasta dæmi mætti vera ljóst að mjög gagnlegt er að muna einfaldlega stikanir á algengustu ferlum, eins og línustrikum, hringjum, sporbaugum o.s.frv.

Stikaða ferla er auðvelt að teikna upp í Matlab. T.d. getum við teiknað sporbauginn í dæminu hér á undan með því að skrifa

```
t=linspace(0,2*pi);
plot(3*cos(t),2*sin(t))
```

■ **Dæmi 1.8** Sannreyndu að stikunin í dæminu hér að ofan stiki sporbaug. Getur þú (út frá þessu dæmi) fundið stikun á sporbaug sem liggur í gegnum punktana $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$ og $(0, -3)$?

■

Auðvelt er að stika graf falls $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sem er gefið með formúlu $y = f(x)$. Við setjum einfaldlega $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}$$

til að fá stikun á grafi fallsins.

■ **Dæmi 1.9** Við stikum graf fallsins $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$, með því að setja $\mathbf{r} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + \left(x^2 + 2x\right)\mathbf{j}.$$

■

■ **Dæmi 1.10** Við stikum graf fallsins $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, með því að setja $\mathbf{r} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + (2x + 3)\,\mathbf{j}.$$

Ath. hér að sama stikun fæst með því að stika línuna í þessu dæmi með jöfnunni $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ þ.s. $\mathbf{x} = (0, 3)^T$ og $\mathbf{y} = (1, 5)^T$. ■

1.1.1 Stikun skurðferla

Við skulum nú skoða hvernig við getum stikað skurðferla. Skrurðferill myndast þegar tvö tvívíð yfirborð (t.d. kúluhvel, sívalningshvel, plan) skerast í ferli. Við tökum tvö dæmi sem sýna hvernig stika má slíka skurðferla.

■ **Dæmi 1.11** Stikum sporbauginn sem myndast þegar sívalningshvelið

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{í } \mathbb{R}^3 \text{ sker planið} \quad x + y + z = 1.$$

Lausn: Byrjum á að setja

$$x = \cos(t) \quad \text{og} \quad y = \sin(t)$$

því það uppfyllir fyrri jöfnuna. Svo tryggjum við að seinni jafnan sé uppfyllt með að setja

$$z = 1 - x - y = 1 - \cos(t) - \sin(t).$$

Stikunin er því

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j} + (1 - \cos(t) - \sin(t))\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

■

ATH Þegar við vinnum í tvívídd skrifum við oft **i** og **j** fyrir vigrana

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{og} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

eins og við höfum séð. Þegar við erum að vinna í þrívídd notum við sömu táknin, **i** og **j**, ásamt **k** til þess að tákna vigrana

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{og} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

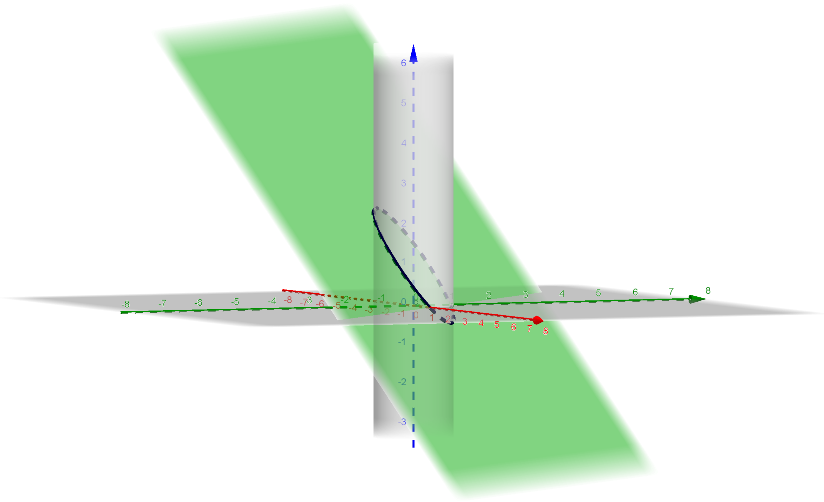
Þetta leyfir okkur að skrifa $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j} + (1 - \cos(t) - \sin(t))\,\mathbf{k}$ í dæminu hér að ofan í stað

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 - \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Auðvelt er að teikna yfirborðin og skurðferla þeirra í Geogebru með því að nota eftirfarandi þrjár skipanirnar

```
x^2+y^2=1
x+y+z=1
(cos(t),sin(t),1-cos(t)-sin(t)), 0<t<2*pi
```

Hægt er að sækja Geogebru ókeypis í tölvu eða 3D Calculator appið ókeypis í símann. Með þessum forritum getur þú leikið þér við að skoða myndina frá breytilegu sjónarhorni.



Mynd 1.1: Hér sjást sívalningshvelið, planið og skurðferill þeirra.

■ **Dæmi 1.12** Stikum skurðferil hálfkúluhvelsins

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{og plansins} \quad x + y = 1$$

í rúminu.
Lausn: Við losum okkur fyrst við z úr jöfnunni fyrir hálfkúluhvelinu:

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - x^2 - (1-x)^2 = -2(x^2 - x) = -2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Við höfum nú

$$z^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

sem við getum umskrifað

$$\left(\sqrt{2}z\right)^2 + \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2 = 1$$

eða

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

með $x_0 = 1/2$, $a = 1/2$ og $c = 1/\sqrt{2}$. Síðasta jafnan gefur okkur sporbaug í xz-planinu og við vitum hvernig við getum stikað hann.

Þar sem $z \geq 0$ veljum við stikunina $\mathbf{r} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ með

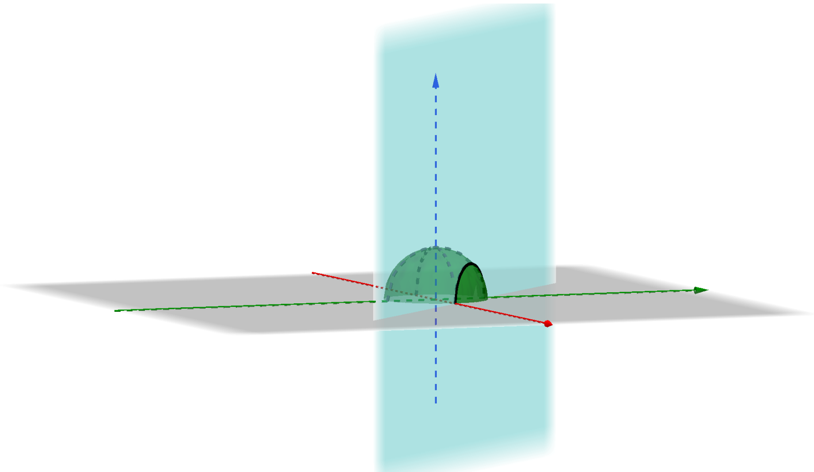
$$\sqrt{2}z = \sin(t) \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t),$$

$$2(x - \frac{1}{2}) = \cos(t) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \cos(t)),$$

$$y = 1 - x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(1 - \cos(t)).$$

■

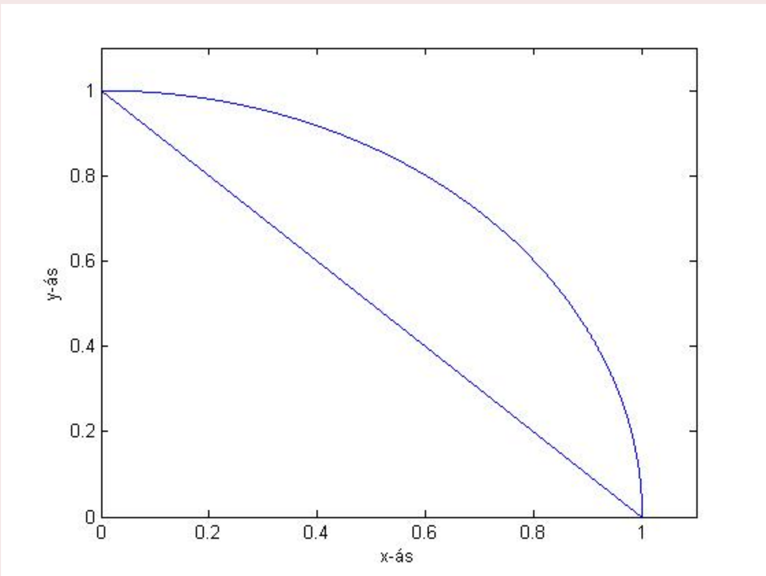
ATH Með $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ og formúlunum fyrir x, y og z í dæminu hér að ofan eru allar þessar stærðir hugsaðar sem fall af t. Stundum ritar maður t.d. $x = x(t)$ til þess að leggja áherslu á það og til þess að fyrirbyggja misskilning.



Mynd 1.2: Hér sést hálfkúluhvelið (sá hluti þar sem $z \geq 0$), planið og skurðferill þeirra.

Æfingar 1.1

Æfing 1.1.1 Á myndinni hér fyrir neðan sést ferill. Efri hluti ferilsins er fjórðungur úr hring $x^2 + y^2 = 1$ og neðri hluti ferilsins er bein lína. Stikið ferilinn rangsælis.



■

Æfing 1.1.2 Teiknið ferlana sem eru stikaðir hér fyrir neðan. Látið áttun stikunarinnar koma fram á myndinni

a)
$$\mathbf{r}_1 : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_1(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$$

b)
$$\mathbf{r}_2 : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_2(t) = \cos(\pi/2 - t)\,\mathbf{i} + \sin(\pi/2 - t)\,\mathbf{j}$$

c)
$$\mathbf{r}_3 : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_3(t) = \cos(-t)\,\mathbf{i} + \sin(-t)\,\mathbf{j}$$

d)
$$\mathbf{r}_4 : [-\pi/2, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_4(t) = \cos(-t)\,\mathbf{i} + \sin(-t)\,\mathbf{j}$$

e)
$$\mathbf{r}_5 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_5(t) = \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}$$

f)
$$\mathbf{r}_6 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_6(t) = t\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{j}$$

g) Stikið nú ferilinn
$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1, \quad x \le 0, \quad y \le 0 \right\}$$
réttsælis. ■

Æfing 1.1.3 Stikið þann hluta skurðferils yfirborðanna $z = x^2 + y^2$ og $x^2 + y^2 = 1$ sem er í fyrsta áttungi (s.s. þar sem $x \ge 0$, $y \ge 0$ og $z \ge 0$). Er þetta einfaldur lokaður ferill? ■

Æfing 1.1.4 Stikið skurðferil kúluhvelsins $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ við planið $x + z = 2$. ■

Æfing 1.1.5 Lýsið með orðum ferlinum
$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \big(\cos(t) + 2\big)\,\mathbf{i} + \big(\sin(t) - 1\big)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$
Er þetta einfaldur lokaður ferill? ■

Æfing 1.1.6 Stikið skurðferil flatanna $z = x^2 + y^2$ og $z = 4x - 2y + 4$. ■

Æfing 1.1.7 Stikið feril $\mathcal{C}$ sem **umlykur svæðið**
$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \le 1, \quad y \le 0 \}$$
réttsælis. ■

Æfing 1.1.8 Stikið ferlana

a)
$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0,\; y = x^2\}$$
b)
$$\mathcal{C}_2 = \{(\sqrt{x}, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0,\; y = x\}$$
c)
$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0,\; y^2 = x\}$$
d)
$$\mathcal{C}_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 4y^2 = 1\right\}$$

■

Æfing 1.1.9 Eru eftirfarandi mengi ferlar?

a)
$$\mathcal{C}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \neq 0,\; y = \frac{1}{x^2}\right\}$$
b)
$$\mathcal{C}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x > 0,\; y = \frac{1}{x^2}\right\}$$
c)
$$\mathcal{C}_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < x < 1,\; y = \frac{1}{x^2}\right\}$$
d)
$$\mathcal{C}_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \leq x \leq 2,\; y = \frac{1}{x^2}\right\}$$
e)
$$\mathcal{C}_5 = \left\{(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < t \leq 2\pi\right\}$$

■

1.2 Vektorgild föll af einni breytistærð

Áður en við snúum okkur almennt að vörpunum $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, þá skoðum við fyrst tilfellið $n = 1$, þ.e. $\mathbf{f}$ er vektorgilt fall af einni breytistærð. Yfirleitt kallar maður þá breytuna t og ímyndar sér að $\mathbf{f}(t)$ sé stöðuvektor agnar í rúminu við tímann t, jafnvel þótt að $m \geq 4$.

Látum $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k},$$

lýsa staðsetningu agnar í rúminu sem fall af tíma. Stefnuhraði (e. velocity) agnarinnar á tímanum t er þá, svipað og í einni vídd, skilgreindur sem

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &:= \mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\,\mathbf{i} + \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\,\mathbf{j} + \frac{z(t+h)-z(t)}{h}\,\mathbf{k}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\,\mathbf{i} + \lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\,\mathbf{j} + \lim_{h\to 0}\frac{z(t+h)-z(t)}{h}\,\mathbf{k}\\ &= x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Þetta gengur upp ef allir liðir fallsins $\mathbf{r}(t)$ eru diffranlegir, þ.e. ef föllin $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ og $t \mapsto z(t)$ eru diffranleg.

Hröðun (e. acceleration) agnarinnar er skilgreind sem afleiða stefnuhraðans með tilliti til tímans,

$$\mathbf{a}(t) := \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\,\mathbf{i} + y''(t)\,\mathbf{j} + z''(t)\,\mathbf{k}.$$

Hraði eða ferð (e. speed) agnarinnar á tímanum t er skilgreindur sem

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(\mathbf{v}(t)^T\mathbf{v}(t)} = \sqrt{\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t)} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

■ **Dæmi 1.13** Látum $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera gefið með formúlunni

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Þá er stefnuhraðinn

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\sin(t)\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og hraðinn (eða ferðin)

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1} = \sqrt{2}.$$

Hröðunin er

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = -\cos(t)\,\mathbf{i} - \sin(t)\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}.$$

■

Hröðunin er ekki núll, en samt breytist ferðin ekki, hvernig stendur á því? Svar: Lengd stefnuhraðans er fasti, en stefnan er að breytast og til þess þarf hröðun.

Hver er stefnuhraðinn þegar $t = 2$? Svar:

$$\mathbf{v}(2) = -\sin(2)\,\mathbf{i} + \cos(2)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Hver er hröðunin þegar $t = 3$? Svar:

$$\mathbf{a}(3) = -\cos(3)\,\mathbf{i} - \sin(3)\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}.$$

■ **Dæmi 1.14** Ögn ferðast eftir ferli í $\mathbb{R}^2$ sem er gefinn með formúlunni $y = x^2$. Ögnin ferðast til hægri með föstum hraða (fastri ferð) $v = 5$. Reiknið stefnuhraða og hröðun agnarinnar þegar hún fer í gegnum punktinn $(1, 1)$.

Lausn: Látum $x(t)$ vera x-hnit agnarinnar við tímann t. Þá er staðsetning agnarinnar við tímann t gefin með vektorgilda fallinu

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + (x(t))^2\,\mathbf{j}.$$

Stefnuhraði agnarinnar er

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + 2x(t)x'(t)\,\mathbf{j}$$

og hröðunin

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = x''(t)\,\mathbf{i} + 2((x'(t))^2 + x(t)x''(t))\,\mathbf{j}$$

og hraðinn (eða ferðin) þá

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + 4(x'(t))^2(x(t))^2} = |x'(t)| \cdot \sqrt{1 + 4(x(t))^2}.$$

Athugið að hér að ofan beittum við keðjureglunni þegar við diffruðum $x(t)$ með tilliti til t.

Við vitum að hraðinn (eða ferðin) er $= 5$ og því gildir, af því að ögnin er að ferðast til hægri,

$$x'(t) = \frac{5}{\sqrt{1 + 4(x(t))^2}}.$$

Við höfum áhuga á stefnuhraðanum í punktinum $(1, 1)$, þ.e. fyrir tímann t^* þegar $x(t^*) = 1$, en þá er

$$x'(t^*) = \frac{5}{\sqrt{1 + 4(x(t^*))^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

og þá

$$\mathbf{v}(t^*) = \mathbf{r}'(t^*) = x'(t^*)\,\mathbf{i} + 2x(t^*)x'(t^*)\,\mathbf{j} = \sqrt{5}\,\mathbf{i} + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5}\,\mathbf{j} = \sqrt{5}\,\mathbf{i} + 2\sqrt{5}\,\mathbf{j}$$

Við reiknum núna hröðunina á tímapunktinum t^*, þ.e. þegar ögnin fer í gegnum punktinn $(1, 1)$. Með keðjureglunni fáum við út að

$$x''(t) = \frac{-20x(t)x'(t)}{(1 + 4(x(t))^2)^{3/2}} = -\frac{100x(t)}{(1 + 4(x(t))^2)^2}$$

svo

$$x''(t^*) = -\frac{100x(t^*)}{(1 + 4(x(t^*))^2)^2} = -\frac{100}{5^2} = -4.$$

Nú er hröðunin

$$\mathbf{a}(t) = x''(t)\,\mathbf{i} + 2((x'(t))^2 + x(t)x''(t))\,\mathbf{j}$$

svo

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t^*) &= x''(t^*)\,\mathbf{i} + 2((x'(t^*))^2 + x(t^*)x''(t^*))\,\mathbf{j} \\
&= -4\,\mathbf{i} + 2((\sqrt{5})^2 + 1 \cdot (-4))\,\mathbf{j} \\
&= -4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Athugið að við reiknuðum þetta allt út án þess að hafa reiknað út tímann t^* þegar ögnin fer í gegnum punktinn $(1, 1)$ eða fallið $x(t)$. ■

Reiknireglur fyrir diffrun á föllum $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfast yfir á föll $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$:

Regla 1.2.1 Látum $\mathbf{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $\mathbf{v} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vera vektorgild föll þ.a. allir liðir þeirra séu diffranlegir og látum $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vera diffranlegt fall. Þá er

(a)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t).$$

(b)
$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\mathbf{u}(t)) = \lambda'(t)\mathbf{u}(t) + \lambda(t)\mathbf{u}'(t).$$

(c)
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t).$$

(d) Ef $m = 3$ (annars er krossfeldið ekki skilgreint) er
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t).$$

(e)
$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\lambda(t)) = \mathbf{u}'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t).$$

(f) Ef $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$, þá er
$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\| = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|}.$$

Sönnun. Leiðir að mestu beint af samsvarandi reglum fyrir föll $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Maður skoðar bara hvern lið fyrir sig. Við sýnum bara lið (f). Hér er
$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} = u_1(t)\,\mathbf{e}_1 + u_2(t)\,\mathbf{e}_2 + \ldots u_m(t)\,\mathbf{e}_m$$
þar sem e_k er k-ti einingarvigur $\mathbb{R}^m$, þ.e. m-víður vektor með 1 í k-ta staki og 0 í öllum hinum. Þá er
$$\|\mathbf{u}(t)\| = \sqrt{(\mathbf{u}(t))^T \cdot \mathbf{u}(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2(t)} = \left(\sum_{i=1}^m u_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$
og með keðjureglunni fæst
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\| &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^m u_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^m u_i^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(2\sum_{i=1}^m u_i(t)u_i'(t)\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^m u_i(t)u_i'(t)}{\left(\sum_{i=1}^m u_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{\|\mathbf{u}(t)\|}.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 1.15** Notið reiknireglurnar frá Reglu 1.2.1 til þess að reikna út að fyrir þrídiffranlegt $\mathbf{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er
$$\frac{d}{dt}\left((\mathbf{u} + \mathbf{u}'') \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')\right) = \mathbf{u}''' \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}').$$

Lausn: Við athugum að ritháttirnir $\frac{d}{dt}\mathbf{v}$ og $\mathbf{v}'$ merkja nákvæmlega það sama, diffra á vektorgilda fallið $\mathbf{v}$ með tilliti til frjálsu breytunnar t. Notum fyrst reglu (c) til þess að fá

$$\frac{d}{dt}\left((\mathbf{u}+\mathbf{u}'')\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}')\right) = (\mathbf{u}+\mathbf{u}'')'\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}') + (\mathbf{u}+\mathbf{u}'')\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}')'.$$

Við sjáum að

$$(\mathbf{u}+\mathbf{u}'')'\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}') = \mathbf{u}'\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}') + \mathbf{u}'''\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}') = \mathbf{u}'''\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}')$$

því vigurinn $\mathbf{u}\times\mathbf{u}'$ er hornréttur á $\mathbf{u}'$, sem þýðir ekkert annað en að $\mathbf{u}'\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}') = 0$. Við notum nú reglu (d) og fáum að

$$(\mathbf{u}+\mathbf{u}'')\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}')' = (\mathbf{u}+\mathbf{u}'')\cdot(\mathbf{u}'\times\mathbf{u}' + \mathbf{u}\times\mathbf{u}'').$$

Hér sjáum við að $\mathbf{u}'\times\mathbf{u}' = \mathbf{0}$, því krossfeldi vigurs við sjálfan sig gefur alltaf núllvektorinn, og að auki er

$$(\mathbf{u}+\mathbf{u}'')\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{u}'' = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}'') + \mathbf{u}''\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}'') = 0,$$

því vektorinn $\mathbf{u}\times\mathbf{u}''$ er hornréttur á bæði $\mathbf{u}$ og $\mathbf{u}''$. Eftir stendur þá að

$$\frac{d}{dt}\left((\mathbf{u}+\mathbf{u}'')\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}')\right) = \mathbf{u}'''\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{u}').$$

■

■ **Dæmi 1.16** Látum $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ vera staðsetningu agnar sem fall af tíma. Gerum ráð fyrir að hröðun agnarinnar sé samsíða staðsetningarvigrinum $\mathbf{u}$. Sýnið að $\mathbf{u}\times\mathbf{u}'$ sé fasti.

Lausn: Til þess að sýna að fallið $t\mapsto\mathbf{u}\times\mathbf{u}'$ sé fasti, er nóg að sýna að afleiða þess sé núllvigurinn. Við reiknum

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{u}')' = \mathbf{u}'\times\mathbf{u}' + \mathbf{u}\times\mathbf{u}'' = \mathbf{0},$$

því $\mathbf{u}'\times\mathbf{u}' = \mathbf{0}$ og $\mathbf{u}\times\mathbf{u}'' = \mathbf{0}$. Síðari jafnan leiðir af því að hröðun agnarinnar $\mathbf{u}''$ er samsíða staðsetningunni $\mathbf{u}$ skv. forsendu, þ.e. til er fall $t\mapsto s(t)$ þ.a. $\mathbf{u}''(t) = s(t)\mathbf{u}(t)$, og þá er

$$\mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}''(t) = \mathbf{u}(t)\times(s(t)\mathbf{u}(t)) = s(t)\cdot\mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

■

Hvaða túlkun hefur stærðin $\mathbf{u}\times\mathbf{u}'$ í eðlisfræði í dæminu hér að ofan?

Æfingar 1.2

Æfing 1.2.1 Ögn ferðast eftir ferlinum $\mathbf{r} : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\,\mathbf{i} + t\sin(t)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}.$$

a) Lýsið (með orðum eða mynd) hvernig ferillinn sem ögnin ferðast eftir lítur út.
b) Finnið punktinn $P\in\mathbb{R}^3$ þar sem hraði agnarinnar er $v = \|\mathbf{v}(t)\| = 3$. ■

Æfing 1.2.2 Ögn ferðast til hægri eftir ferlinum $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} - 2x(t)\,\mathbf{j} + (x(t))^2\,\mathbf{k}$$

með jöfnum hraða (e. speed) $v = 7$. Hver er stefnuhraði (e. velocity) agnarinnar í punktinum $(-1, 2, 1)$? ■

Æfing 1.2.3 Ögn ferðast til hægri eftir ferlinum $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} - (x(t))^2\,\mathbf{j} + 2x(t)\,\mathbf{k}$$

með jöfnum hraða $v = 6$. Hver er stefnuhraði agnarinnar í punktinum $(1, -1, 2)$? ■

1.3 Bogalengd

Lengd ferils er oft nefnd bogalengd (e. arc length). Hvernig reiknar maður lengd ferils $\mathcal{C}$? Ein aðferð væri að stika ferilinn með $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ þ.a. hraðinn (eða ferðin) $\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = 1$ fyrir öll $t \in [a, b]$, þ.e. á 1 tímaeiningu ferðast maður vegalengdina 1, og athuga hversu margar tímaeiningar maður þarf til þess að komast á leiðarenda. Þessi aðferð hefur þann ókost að ef maður er búinn að finna einhverja stikun á ferlinum, þá vill maður gjarnan nota hana beint án þess að þurfa að breyta henni þ.a. hún hafi hraðann (eða ferðina) 1. Það er líka yfirleitt erfiðara að finna stikun með hraðann 1 en að reikna lengdina. Hver væri lengdin ef við hefðum slíka stikun með hraðann 1?

Þægilegra er að reikna hraðann (eða ferðina) á stikunninni $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sem við höfum og heilda hann yfir ferilinn. Þá er lengd ferilsins gefin með

$$|\mathcal{C}| = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Þetta heildi er óháð stikuninni $\mathbf{r}$!

Athugið að hér er að sjálfsögðu átt við stikun $\mathbf{r}$ sem fer á eðlilegan hátt einu sinni í gegnum ferilinn. Við getum t.d. stikað hring með $\mathbf{r} : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}$, en þar sem stikunin hleypur tvisvar sinnum eftir hringnum getum við ekki notað þessa stikun til þess að reikna lengdina á honum. Aftur á móti er ekkert því til fyrirstöðu að nota $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ með sömu formúlu. Almennt verður stikunin $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ að uppfylla að ekki mega vera til tvö hlutbil $[c_1, d_1]$ og $[c_2, d_2]$ á $[a, b]$ þ.a. $\mathbf{r}([c_1, d_1]) = \mathbf{r}([c_2, d_2])$. Fyrir allar slíkar stikanir er heildið hér að ofan óháð stikuninni eins og áður var sagt. Það má rökstyðja á eftirfarandi hátt: Látum $\mathbf{r}_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{r}_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vera tvær stikanir á ferlinum $\mathcal{C}$. Við getum þá skilgreint vaxandi fall $s : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ þ.a. $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(s(t))$. Við þurfum að sýna að

$$\int_a^b \|\mathbf{r}_1'(t)\| dt = \int_c^d \|\mathbf{r}_2'(t)\| dt.$$

Við athugum fyrst að

$$\mathbf{r}_2'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_2(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(s(t)) = \mathbf{r}_1'(s(t))s'(t)$$

og þar með að

$$\int_c^d \|\mathbf{r}_2'(t)\|dt = \int_c^d \|\mathbf{r}_1'(t)\|s'(t)dt.$$

Athugið að þar sem $s(t)$ er vaxandi er $s'(t) \geq 0$ og því megum við taka það út úr $\|\cdot\|$. Með breytuskiptunum $\tau = s(t)$ í heildinu fæst svo $d\tau = s'(t)dt$, $\tau(c) = a$, $\tau(d) = b$ og þá

$$\int_c^d \|\mathbf{r}_1'(t)\|s'(t)dt = \int_a^b \|\mathbf{r}_1'(\tau)\|d\tau$$

og við erum búin að sýna að lengdin er óháð stikuninni.

Auðveldast er að átta sig á því hvernig maður reiknar lengdir ferla út frá dæmum.

■ **Dæmi 1.17** Reiknum lengd hálfhrings með geislann 1 í planinu, þ.e. lengd ferilsins

$$\mathcal{C} := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \ \text{ og } \ x_2 \geq 0\}.$$

Lausn 1: Notum stikunina $\mathbf{r}_1 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}_1(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}.$$

Þá er

$$\mathbf{r}_1'(t) = -\sin(t)\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j}$$

og þá

$$\|\mathbf{r}_1'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1$$

svo

$$|\mathcal{C}| = \int_0^\pi \|\mathbf{r}_1'(t)\|dt = \int_0^\pi 1dt = \pi.$$

Lausn 2: Annar möguleiki er að nota stikunina $\mathbf{r}_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}_2(t) = \cos(\pi t)\,\mathbf{i} + \sin(\pi t)\,\mathbf{j}.$$

Þá er

$$\mathbf{r}_2'(\pi t) = -\pi\sin(t)\,\mathbf{i} + \pi\cos(t)\,\mathbf{j}$$

og þá

$$\|\mathbf{r}_2'(t)\| = \sqrt{(-\pi\sin(\pi t))^2 + (\pi\cos(\pi t))^2} = \pi$$

svo

$$|\mathcal{C}| = \int_0^1 \|\mathbf{r}_2'(t)\|dt = \int_0^1 \pi dt = \pi.$$

Lausn 3: Við getum líka skoðað graf fallsins $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Við sjáum að $\mathbf{r}_3 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}_3(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}$$

er stikun á hálfhringnum. Þá er

$$\mathbf{r}_3'(t) = \mathbf{i} + \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathbf{j}$$

og þá

$$\|\mathbf{r}_3'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

svo

$$|\mathcal{C}| = \int_{-1}^{1} \|\mathbf{r}_3'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)^2}} \cos(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi.$$

Hér notuðum við breytuskiptin $t = \sin(x)$, sem gefur $dt = \cos(x)dx$ og nýju mörkin í heildinu verða $x(-1) = \arcsin(-1) = -\pi/2$ og $x(1) = \arcsin(1) = \pi/2$. ∎

∎ **Dæmi 1.18** Látum $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vera diffranlegt fall. Þá er „lengd“ grafs fallsins á bilinu $[a,b]$ gefin með

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

af því að við getum stikað grafið með $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + f(t)\,\mathbf{j}$. Reiknum lengd grafs fallsins $f(x) = \sin(x)$ á bilinu $[0, 2\pi]$.

$$|\mathcal{C}| = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (-\cos(t))^2} dt \approx 7.64$$

Athugið að fallið $g(t) = \sqrt{1 + \cos^2(t)}$ hefur ekki einfalt stofnfall, þ.e. við getum ekki skrifað upp einfalda formúlu fyrir falli $G(t)$ þ.a. $G'(t) = g(t)$. Við notuðum því tölulega heildun með tölvu til að fá síðasta svarið. ∎

Oft er mjög erfitt að sjá hvort eitthvert tiltekið fall, eins og t.d. $g(t)$ hér að ofan, hefur einfalt stofnfall eða ekki. Sem dæmi hefur

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 10x^2 - 96 - 71}}$$

„einfalda“ stofnfallið

$$F(x) = -\frac{1}{8} \ln\Big((x^6 + 15x^4 - 80x^3 + 27x^2 - 528 + 781)\sqrt{x^4 + 10x^2 - 96x - 71} \\ - x^8 - 20x^6 + 128x^5 + 54x^4 + 1408x^3 - 3124x^2 - 10001\Big).$$

Aftur á móti er ekki til einfalt stofnfall fyrir

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 10x^2 - 96 - 72}}.$$

Til er algrím, nefnt Risch algóriþminn til heiðurs Robert Henry Risch, sem getur svarað því hvort gefið einfalt fall hafi einfalt stofnfall eða ekki. Í því tilfelli að einfalt stofnfall er til, reiknar Risch algóriþminn eitt slíkt.

Við getum á alveg sama hátt og í $\mathbb{R}^2$ reiknað lengd ferla í $\mathbb{R}^3$ (og jafnvel $\mathbb{R}^n$ þ.s. $n > 3$, þó erfiðara sé að sjá þá fyrir sér).

■ **Dæmi 1.19** Við þurfum að ganga upp brekku sem hefur lögun eins og ferillinn $\mathbf{r} : [0, 12] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ (getur þú séð ferilinn fyrir þér, eða teiknað hann í Matlab/Geogebru?). Við viljum vita hvað við þurfum að ganga langt svo við reiknum

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

og til að finna lengdina

$$|\mathcal{C}| = \int_0^{12} \sqrt{2}dt = 12\sqrt{2}$$

■

Æfingar 1.3

Æfing 1.3.1 Látum $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ vera takmarkaða svæðið sem afmarkast af línunni $x + y = 1$ og fleygboganum $y = 3 - x^2$. Finnið lengd ferilsins $\mathcal{C}$ sem umlykur svæðið $\mathcal{D}$. Heildin sem upp koma má reikna með tölvu. ■

Æfing 1.3.2 Ögn ferðast eftir ferli sem er gefinn með jöfnunni

$$\mathbf{r} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = t\cos(t)\,\mathbf{i} + t\sin(t)\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\,\mathbf{k}$$

a) Finnið punktinn $P \in \mathbb{R}^3$ þar sem ferðin er $v = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1 + \pi^2}$.
b) Ef ögn ferðast eftir ferlinum frá punktinum $(0, 0, 0)$ til punktsins $(-\pi, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\pi^2)$, hvað fór ögnin þá langt?

Heildin sem upp koma má reikna með tölvu. ■

Æfing 1.3.3 Hér erum við í $\mathbb{R}^3$.
a) Stikið skurðferil sívalningshvelsins $x^2 + y^2 = 9$ við planið $z = 2x - y$. Athugið að ferillinn á að vera einfaldur lokaður ferill.
b) Hvað er ferillinn sem stikaður var í a) lið langur? Athugið að nota má reiknivél til að reikna úr heildinu sem kemur upp.

■

1.4 Ferilheildi

Látum $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ og $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^n$. Oft hefur maður áhuga á að heilda f eftir ferlinum $\mathcal{C}$. Hvað er átt við með því? Látum $\mathbf{r} : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vera stikun á ferlinum $\mathcal{C}$ þ.a. $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$ fyrir öll nema etv. endanlega mörg $t \in [c, d]$. Þá er heildið af f yfir ferilinn $\mathcal{C}$ (e. line integral) skilgreint sem

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{x})ds := \int_c^d f(\mathbf{r}(t))dt.$$

Það kemur í ljós eins og áður að við getum notað hvaða stikun $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sem er ef við reiknum

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{x})ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt$$

því útkoman er alltaf sú sama.

■ **Dæmi 1.20** Látum $a > 0$, $\mathcal{C} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = a^2 \ \text{ og } \ x_2 \geq 0\}$ vera feril í $\mathbb{R}^2$ og $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_2$, vera fall. Við reiknum

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{x})ds,$$

þ.e. við heildum f yfir ferilinn $\mathcal{C}$.
Lausn 1: $\mathbf{r} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\,\mathbf{i} + a\sin(t)\,\mathbf{j}$, stikar ferilinn $\mathcal{C}$. Við höfum

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-a\sin(t))^2 + (a\cos(t))^2} = |a| = a$$

og þá

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{x})ds &= \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt \\ &= \int_0^{\pi} f(a\cos(t), a\sin(t))adt \\ &= \int_0^{\pi} a\sin(t)adt \\ &= a^2\Big[-\cos(t)\Big]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= 2a^2.\end{aligned}$$

Lausn 2: $\mathbf{r} : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sqrt{a^2 - t^2}\,\mathbf{j}$, stikar ferilinn $\mathcal{C}$. Við höfum

$$\mathbf{r}'(t) = 1\,\mathbf{i} + \frac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\,\mathbf{j}$$

svo

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}}\right)^2} = \sqrt{1^2 + \frac{t^2}{a^2 - t^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - t^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

og þá

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{x})ds &= \int_{-a}^{a} f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt \\ &= \int_{-a}^{a} f(t, \sqrt{a^2 - t^2})\frac{a}{\sqrt{a^2 - t^2}}dt \\ &= \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - t^2}\frac{a}{\sqrt{a^2 - t^2}}dt \\ &= \int_{-a}^{a} adt \\ &= \Big[at\Big]_{t=-a}^{t=a} \\ &= 2a^2.\end{aligned}$$

■

En hvaða merkingu hefur það að heilda fall eftir ferli? Við skulum skoða dæmi.

■ **Dæmi 1.21** Þéttleiki vírs er breytilegur eftir því hvar við erum stödd í rúminu og er gefin með fallinu $\delta(x,y,z) = xy$. Vírinn liggur eftir ferlinum $\mathbf{r} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$. Við viljum nú finna heildarmassa vírsins. Við heildum því þéttleikafallið eftir ferlinum og við reiknum

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{x})ds &= \int_0^1 f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|dt \\ &= \int_0^1 2t^2\sqrt{1+4+4t^2}dt \\ &\approx 1.809.\end{aligned}$$

Hér notuðum við tölulega heildun með tölvu til að fá síðasta svarið því fallið $g(t) = 2t^2\sqrt{5+4t^2}$ hefur ekki einfalt stofnfall. ■

Æfingar 1.4

Æfing 1.4.1 Heildið fallið $f(x,y,z) = xyz\sin(x^2+y^2)$ yfir ferilinn sem myndast þegar hálfkeiluhvelið $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ sker skálina $z = x^2+y^2$. ■

Æfing 1.4.2 Látum $\mathbf{x}^T = (1\ 2\ 3)$, $\mathbf{y}^T = (2\ -1\ 2)$ og $\mathbf{z}^T = (0\ 0\ 1)$ vera vektora í $\mathbb{R}^3$.

a)
Stikið feril $\mathbf{r}_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sem er beint línustrik á milli $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.
Stikið feril $\mathbf{r}_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sem er beint línustrik á milli $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$.
Stikið feril $\mathbf{r}_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sem er beint línustrik á milli $\mathbf{z}$ og $\mathbf{x}$.

b) Skoðum núna ferilinn $\mathcal{C}$ sem er stikaður af $\mathbf{r} : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) := \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & \text{ef } t \in [0,1], \\ \mathbf{r}_2(t-1), & \text{ef } t \in]1,2], \\ \mathbf{r}_3(t-2), & \text{ef } t \in]2,3]. \end{cases}$$

Er $\mathbf{r}$ skynsamlega skilgreint fall? Þ.e. er gildið $\mathbf{r}(t)$ ótvírætt ákvarðað fyrir sérhvert $t \in [0,3]$?. Er $\mathcal{C}$ einfaldur lokaður ferill?

c) Reiknið lengd ferilsins $\mathcal{C}$.

d) Heildið fallið $f(x,y,z) = x^2 \cdot y - z$ eftir ferilinum $\mathcal{C}$.

Ath. heildin sem upp koma má leysa með reiknivél.

■

Æfing 1.4.3 Hverfitregða (e. moment of inertia) ferils $\mathcal{C}$ um y-ásinn í $\mathbb{R}^3$ er gefin með heildinu

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2+z^2)ds$$

Við skoðum tvo ferla, annars vegar $\mathcal{C}_1$ sem er skurðferill sívalningshvelsins $x^2+z^2 = 4$ og plansins $y = 2$ og hins vegar ferilinn $\mathcal{C}_2$ sem er skurðferill sívalningshvelsins

$x^2 + z^2 = 4$ og plansins $y = x$.

Reiknið hverfitregðu beggja ferla um y-ás, þ.e. reiknið

$$\int_{\mathcal{C}_1} (x^2 + z^2) ds \quad \text{og} \quad \int_{\mathcal{C}_2} (x^2 + z^2) ds.$$

Heildið sem kemur upp fyrir $\mathcal{C}_2$ má leysa með reiknivél. ■

Æfing 1.4.4 Heildið fallið $f(x, y, z) = xyz \sin(x^2 + y^2)$ eftir ferilinum sem myndast þegar hálfkeiluhvelið $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sker skálina $z = x^2 + y^2$. ■

Æfing 1.4.5 Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^3$ sem er samsettur úr tveimur línustrikum; línustriki frá $(0, 0, 0)$ til $(1, 1, 0)$ og línustriki frá $(1, 1, 0)$ til $(1, 1, 1)$. Gefið er fall $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ með formúlunni

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy \sin(z).$$

Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds.$$

■

Æfing 1.4.6 Látum $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ vera fall og $\mathcal{C}$ vera ferillinn sem myndast þegar sívalningshvelið $x^2 + y^2 = 9$ sker skálina $z = x^2 + y^2$. Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds.$$

■

Það er gott að teikna yfirborðin og ferlana upp til að sjá dæmin betur fyrir sér. T.d. er hægt að teikna hálfkeiluna í Æfingu 1.4.4 í Matlab með því að skrifa

```
[x,y]=meshgrid(-3:0.01:3);
f1=2-sqrt(x.^2+y.^2);
mesh(x,y,f1)
```

og til að teikna t.d. ferilinn

$$\mathbf{r} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\sin(t)\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

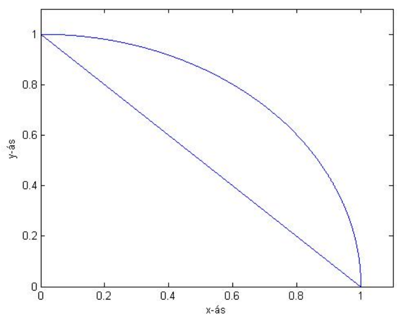
er ráð að skrifa

```
t=0:0.01:pi;
plot3(2*cos(t),2*sin(t),4*ones(length(t)),'k')
```

Einnig er með einföldum hætti hægt að teikna þessi yfirborð og ferla í Geogebru.

1.5 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 1.1.1 Á myndinni hér fyrir neðan sést ferill. Efri hluti ferilsins er fjórðungur úr hring $x^2 + y^2 = 1$ og neðri hluti ferilsins er bein lína. Stikið ferilinn rangsælis.



■ **Lausn** Hér eru margir möguleikar. Best er að byrja á að stika hvorn ferilinn fyrir sig, sem sagt hringbútinn og línustrikið, og setja að lokum saman í eina stikun. T.d. gætum við notað

$$\mathbf{r}_1 : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{r}_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Til að setja þetta saman í einn feril skilgreinum við nýja stikun $\mathbf{r} : [0, \pi/2 + 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gefna með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & t \in [0, \pi/2] \\ \mathbf{r}_2(t - \pi/2), & t \in]\pi/2, \pi/2 + 1] \end{cases}.$$

Annar möguleiki á að stika hálfhringinn væri t.d. gefinn með $\mathbf{r}_3 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}_3(t) = (1 - t)\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - (1 - t)^2}\,\mathbf{j}.$$

Æfing 1.1.5 Lýsið með orðum ferlinum

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \big(\cos(t) + 2\big)\,\mathbf{i} + \big(\sin(t) - 1\big)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Er þetta einfaldur lokaður ferill?

■ **Lausn** Ferillinn er hringur sem liggur í planinu $z = 2$, með miðju í $(2, -1, 2)$ og radíus $r = 1$. Þetta er einfaldur lokaður ferill því $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$ of fyrir öll t_1, t_2 þ.s. $0 < t_1 < t_2 < 2\pi$ er $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$.

Æfing 1.1.6 Stikið skurðferil flatanna $z = x^2 + y^2$ og $z = 4x - 2y + 4$.

■ **Lausn** Báðar jöfnurnar eru uppfylltar ef $x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4$, sem við getum skrifað $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 4$. Við fyllum í ferninginn og fáum

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

Setjum $x - 2 = 3\cos(t) \Leftrightarrow x = 3\cos(t) + 2$ og $y + 1 = 3\sin(t) \Leftrightarrow y = 3\sin(t) - 1$. Þá er $z = 4x - 2y + 4 = 12\cos(t) - 6\sin(t) + 14$. Stikunin er þá

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \mathbf{r}(t) = \big(3\cos(t) + 2\big)\,\mathbf{i} + \big(3\sin(t) - 1\big)\,\mathbf{j} + \big(12\cos(t) - 6\sin(t) + 14\big)\,\mathbf{k}.$$

Æfing 1.1.7 Stikið feril $\mathcal{C}$ sem **umlykur svæðið**

$$\mathcal{D} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le 1, \ \ y \le 0 \right\}$$

réttsælis.

■ **Lausn** Við getum t.d. stikað hringhlutann með

$$\mathbf{r}_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \ \mathbf{r}_1(t) = \cos(-\pi t)\,\mathbf{i} + \sin(-\pi t)\,\mathbf{j} = \cos(\pi t)\,\mathbf{i} - \sin(\pi t)\,\mathbf{j}$$

og línuna með

$$\mathbf{r}_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \ \mathbf{r}_2(t) = (2t-1)\,\mathbf{i}$$

og svo setjum við þetta saman í eina stikun með því að nota

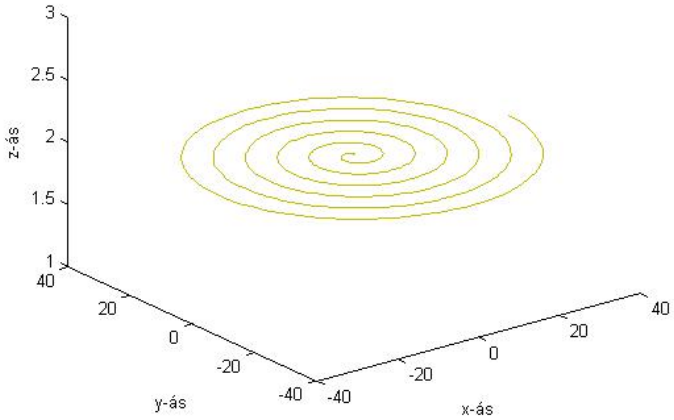
$$\mathbf{r} : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \ \mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & \text{ef } t \in [0,1], \\ \mathbf{r}_2(t-1), & \text{ef } t \in \,]1,2]. \end{cases}$$

Æfing 1.2.1 Ögn ferðast eftir ferlinum $\mathbf{r} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\,\mathbf{i} + t\sin(t)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}.$$

a) Lýsið (með orðum og/eða mynd) hvernig ferillinn sem ögnin ferðast eftir lítur út.
b) Finnið punktinn $P \in \mathbb{R}^3$ þar sem hraði (eða ferð, e. speed) agnarinnar er $v = \|\mathbf{v}(t)\| = 3$.

■ **Lausn** (a) Ögnin ferðast eftir spíral sem stækkar jafnt og þétt og liggur í planinu $z = 2$.



Mynd 1.3: Myndin fæst með skipununum `t=0:0.06:12*pi;` og `plot3(t.*cos(t),t.*sin(t),2*ones(length(t)))` í Matlab.

(b) Við byrjum á að finna stefnuhraðann

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

og reiknum nú hraðann, sem er lengd þessa vigurs

$$\begin{aligned} v = ||\mathbf{v}(t)|| &= \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) - 2t\cos(t)\sin(t) + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t\sin(t)\cos(t) + t^2\cos^2(t)} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))} \\ &= \sqrt{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Við viljum nú finna $t > 0$ þannig að $v = 3$, þ.e. $\sqrt{1+t^2} = 3$ sem hefur lausnina $t = \sqrt{8}$. Svo setjum við þetta gildi inn í staðsetningarvigurinn og fáum staðsetninguna á P,

$$\mathbf{r}(\sqrt{8}) = \begin{pmatrix} \sqrt{8}\cos(\sqrt{8}) \\ \sqrt{8}\sin(\sqrt{8}) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Æfing 1.2.2 Ögn ferðast til hægri eftir ferlinum $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} - 2x(t)\,\mathbf{j} + (x(t))^2\,\mathbf{k}$$

með jöfnum hraða (e. speed) $v = 7$. Hver er stefnuhraði (e. velocity) agnarinnar í punktinum $(-1, 2, 1)$?

■ **Lausn** Við byrjum á að difffra til að finna stefnuhraðann. Munum að við erum að diffra m.t.t. t svo við þurfum að beita keðjureglunni,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -2x'(t) \\ 2x(t)x'(t) \end{pmatrix}.$$

Hraðinn er því

$$\begin{aligned} v(t) = ||\mathbf{v}(t)|| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (-2x'(t))^2 + (2x(t)x'(t))^2} \\ &= \sqrt{(x'(t))^2(1 + 4 + 4x(t)^2)} \\ &= |x'(t)|\sqrt{1 + 4 + 4x(t)^2}. \end{aligned}$$

Nú er ögnin að ferðast til hægri svo $x'(t) > 0$ og við erum með jafnan hraða $v = 7$. Út frá þessum skilyrðum fæst

$$x'(t) = \frac{7}{\sqrt{1 + 4 + 4x(t)^2}}.$$

Táknum með t^* tímann þar sem ögnin er stödd í punktinum $(-1, 2, 1)$. Við fáum að

$$x'(t^*) = \frac{7}{\sqrt{1 + 4 + 4(-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}.$$

Nú getum við fundið stefnuhraðann í punktinum $(-1, 2, 1)$ með því að stinga inn gildunum fyrir $x(t^*)$ og $x'(t^*)$:

$$\mathbf{v}(t^*) = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -14/3 \\ -14/3 \end{pmatrix} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Æfing 1.2.3 Ögn ferðast til hægri eftir ferlinum $\mathbf{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} - (x(t))^2\,\mathbf{j} + 2x(t)\,\mathbf{k}$$

með jöfnum hraða (e. speed) $v = 6$. Hver er stefnuhraði (e. velocity) agnarinnar í punktinum $(1, -1, 2)$?

■ **Lausn** Við byrjum á að difffra til að finna stefnuhraðann. Munum að við erum að diffra m.t.t. t svo við þurfum að beita keðjureglunni

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -2x(t)x'(t) \\ 2x'(t) \end{pmatrix}.$$

Hraðinn er því

$$\begin{aligned} v(t) = ||\mathbf{v}(t)|| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (-2x(t)x'(t))^2 + (2x'(t))^2} \\ &= \sqrt{(x'(t))^2(1 + 4x(t)^2 + 4)} \\ &= |x'(t)|\sqrt{5 + 4x(t)^2}. \end{aligned}$$

Nú er ögnin að ferðast til hægri svo $x'(t) > 0$ og við erum með jafnan hraða $v = 6$ svo

$$x'(t) = \frac{6}{\sqrt{5 + 4x^2(t)}}.$$

Táknum með t^* tímann þar sem ögnin er stödd í punktinum $(1, -1, 2)$ og fáum að

$$x'(t^*) = \frac{6}{\sqrt{5 + 4(1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2.$$

Nú getum við fundið stefnuhraðann í punktinum $(1, -1, 2)$ með því að stinga inn gildunum fyrir $x(t^*)$ og $x'(t^*)$:

$$\mathbf{v}(t^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Æfing 1.3.1 Látum $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ vera takmarkaða svæðið sem afmarkast af línunni $x+y = 1$ og fleygboganum $y = 3 - x^2$. Finnið lengd ferilsins $\mathcal{C}$ sem umlykur svæðið $\mathcal{D}$. Heildin sem upp koma má reikna með tölvu.

■ **Lausn** Við stikum fleygbogann og línuna hvort fyrir sig, en til að vita á hvaða bili stikinn t á að vera þurfum við að finna hvar ferlarnir skerast. Til þess leysum við $3 - x^2 = 1 - x$ og fáum að $x = -1$ og $x = 2$. Við stikum fleybogahlutann með

$$\mathbf{r}_1 : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_1(t) = t\,\mathbf{i} + (3 - t^2)\,\mathbf{j}$$

og reiknum lengd hans með

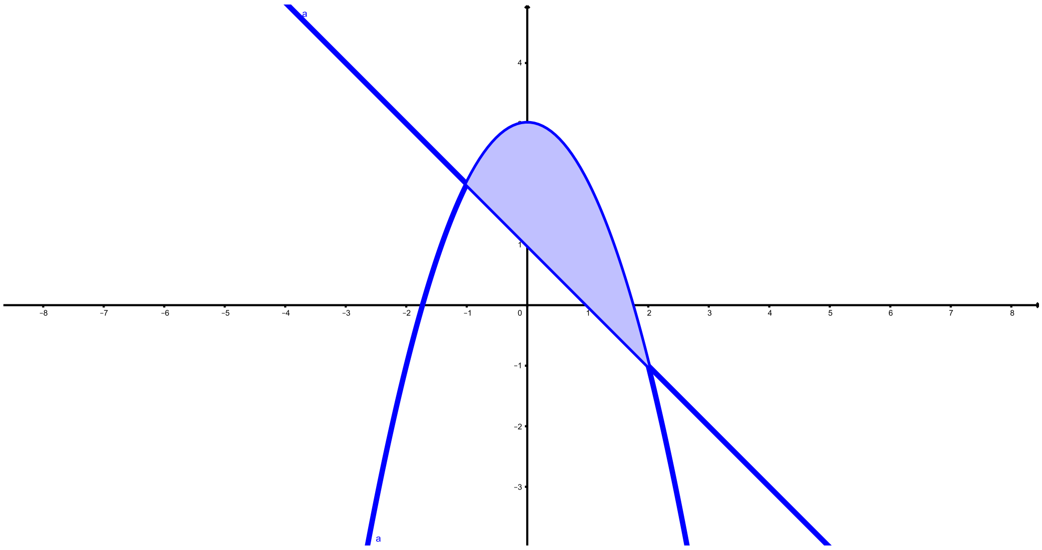
$$|\mathcal{C}_1| = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4t^2} dt = \left[\frac{1}{4} \ln\left(\sqrt{1 + 4t^2} + 2t\right) + \frac{t}{2}\sqrt{1 + 4t^2}\right]_{t=-1}^{t=2} \approx 6.126.$$

Lengd línunnar frá $(-1, 2)$ til $(2, -1)$ má finna með $\sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 + 1)^2} = 3\sqrt{2}$. En við getum líka (til gamans?) stikað línuna með

$$\mathbf{r}_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}_2(t) = (3t - 1)\,\mathbf{i} + (-3t + 2)\,\mathbf{j}$$

og reiknað lengd hennar með

$$|\mathcal{C}_2| = \int_0^1 \sqrt{3^+(-3)^2} dt = \int_0^1 3\sqrt{2} dt = 3\sqrt{2}.$$



Mynd 1.4: Svæðið í Æfingu 1.3.1 afmarkast af beinni línu og fleygboga.

Samtals er því ferillinn sem umlykur svæðið

$$|\mathcal{C}| = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \approx 6.126 + 3\sqrt{2} \approx 10.369 \ \text{ lengdareiningar}.$$

Æfing 1.3.2 Ögn ferðast eftir ferli sem er gefinn með jöfnunni

$$\mathbf{r} : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = t\cos(t)\,\mathbf{i} + t\sin(t)\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\,\mathbf{k}$$

a) Finnið punktinn $P \in \mathbb{R}^3$ þar sem ferðin er $v = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{1+\pi^2}$.

b) Ef ögn ferðast eftir ferlinum frá punktinum $(0,0,0)$ til punktsins $(-\pi, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\pi^2)$, hvað fór ögnin þá langt?

Heildin sem upp koma má reikna með tölvu.

■ **Lausn** a) Við byrjum á að finna stefnuhraðann

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

og reiknum nú hraðann, sem er lengd þessa vigurs

$$\begin{aligned} v = ||\mathbf{v}(t)|| &= \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2 + (\sqrt{3}t)^2} \\ &= \Big(\cos^2(t) - 2t\cos(t)\sin(t) + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) \\ &\qquad + 2t\sin(t)\cos(t) + t^2\cos^2(t) + 3t^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 3t^2} \\ &= \sqrt{1+4t^2}. \end{aligned}$$

Við viljum nú finna $t > 0$ þannig að $\sqrt{1+4t^2} = \sqrt{1+\pi^2}$, sem hefur lausnina $t = \pi/2$. Svo setjum þetta gildi inn í staðsetningarvigurinn og fáum

$$\mathbf{r}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \pi/2\cos(\pi/2) \\ \pi/2\sin(\pi/2) \\ \sqrt{3}\pi^2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \\ \sqrt{3}\pi^2/4 \end{pmatrix}.$$

Í þessum punkti hefur ögnin hraðann eða ferðina $v = \|\mathbf{v}(\pi/2)\| = \sqrt{1+\pi^2}$.

b) Ögnin ferðast frá $(0,0,0)$ til $(-\pi, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\pi^2)$ þegar $t \in [0,\pi]$, svo við getum reiknað lengd ferilsins með

$$|\mathcal{C}| = \int_0^\pi \sqrt{1+4t^2}dt \approx 10.628 \text{ lengdareiningar}.$$

Hér notum við tölvu til að reikna heildið tölulega. Stofnfallið er gefið í síðustu lausn.

Æfing 1.3.3 Hér erum við í $\mathbb{R}^3$.

a) Stikið skurðferil sívalningshvelsins $x^2 + y^2 = 9$ við planið $z = 2x - y$. Athugið að ferillinn á að vera einfaldur lokaður ferill.

b) Hvað er ferillinn sem stikaður var í a) lið langur? Athugið að nota má reiknivél til að reikna úr heildinu sem kemur upp.

■ **Lausn** a) Við getum stikað skurðferilinn með $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \\ 6\cos(t) - 3\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Þetta sést auðveldlega með því að stika fyrst hringinn $x^2 + y^2 = 9 = 3^2$ með $t \mapsto 3(\cos(t), \sin(t))^T$ og stinga svo $x(t) = 3\cos(t)$ og $y(t) = 3\sin(t)$ inn í formúluna $z = 2x - y$.

b) Við byrjum á að finna stefnuhraðann

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ -6\sin(t) - 3\cos(t) \end{pmatrix}$$

svo ferðin er

$$\begin{aligned} ||\mathbf{r}'(t)|| &= \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + (-6\sin(t) - 3\cos(t))^2} \\ &= \sqrt{9(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 36\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 36\cos(t)\sin(t)} \\ &= \sqrt{18 + 36\cos(t)\sin(t) + 27\sin^2(t)} \end{aligned}$$

og lengd ferilsins er því, reiknað með tölvu,

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{18 + 36\cos(t)\sin(t) + 27\sin^2(t)}dt \approx 33.96.$$

Æfing 1.4.3 Hverfitregða (e. moment of inertia) ferils $\mathcal{C}$ um y-ásinn í $\mathbb{R}^3$ er gefin með heildinu
$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2) ds$$
Við skoðum tvo ferla, annars vegar $\mathcal{C}_1$ sem er skurðferill sívalningshvelsins $x^2 + z^2 = 4$ og plansins $y = 2$ og hins vegar ferilinn $\mathcal{C}_2$ sem er skurðferill sívalningshvelsins $x^2 + z^2 = 4$ og plansins $y = x$.

Reiknið hverfitregðu beggja ferla um y-ás, þ.e. reiknið
$$\int_{\mathcal{C}_1} (x^2 + z^2) ds \quad \text{og} \quad \int_{\mathcal{C}_2} (x^2 + z^2) ds.$$
Heildið sem kemur upp fyrir $\mathcal{C}_2$ má leysa með reiknivél.

■ **Lausn** Byrjum á að stika ferilinn $\mathcal{C}_1$ með $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\mathbf{r}_1(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 2\sin(t)\,\mathbf{k}.$$
Þá er
$$\mathbf{r}_1'(t) = -2\sin(t)\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 2\cos(t)\,\mathbf{k}$$
og
$$||\mathbf{r}_1'(t)|| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = 2.$$
Ath. að stundum er $(\sin(t))^2$ ritað sem $\sin^2(t)$ eða jafnvel $\sin^2 t$ og samskonar fyrir ýmis önnur algeng föll eins og $\cos$ eða $\tan$. Við ætlum að nota þennan rithátt hér.
Fallið sem við ætlum að heilda er $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ svo
$$f(\mathbf{r}(t)) = f(2\cos(t), 2, 2\sin(t)) = 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) = 4.$$
Heildum nú
$$\int_{\mathcal{C}_1} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))||\mathbf{r}'(t)||dt = \int_0^{2\pi} 4 \cdot 2\; dt = 16\pi.$$

Stikum nú ferilinn $\mathcal{C}_2$ með $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\mathbf{r}_2(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\cos(t)\,\mathbf{j} + 2\sin(t), \mathbf{k}.$$
Þá er
$$\mathbf{r}_2'(t) = -2\sin(t)\mathbf{i} - 2\sin(t)\mathbf{j} + 2\cos(t)\mathbf{k}$$
og
$$||\mathbf{r}_2'(t)|| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\sin^2(t) + 4\sin^2(t)} = \sqrt{4 + 4\sin^2(t)} = 2\sqrt{1 + \sin^2(t)}.$$
Fallið sem við ætlum að heilda er $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ svo
$$f(\mathbf{r}(t)) = f(2\cos(t), 2\cos(t), 2\sin(t)) = 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) = 4.$$
Heildum nú með hjálp reiknivélar:
$$\int_{\mathcal{C}_2} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))||\mathbf{r}'(t)||dt = \int_0^{2\pi} 4 \cdot 2\sqrt{1 + \sin^2(t)}\; dt \approx 61.123.$$

Æfing 1.4.4 Heildið fallið $f(x, y, z) = xyz\sin(x^2 + y^2)$ eftir ferilinum sem myndast þegar hálfkeiluhvelið $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sker skálina $z = x^2 + y^2$.

■ **Lausn** Byrjum á að stika skurðferilinn og leysum $z = 2 - \sqrt{z}$. Hér sér maður að aðeins $z = 1$ uppfyllir jöfnuna, eða, ef maður sér það ekki getur maður fundið rætur annarsstigs jöfnunnar fyrir $\sqrt{z}$ til að fá sömu niðurstöðu. Yfirborðin tvö skerast s.s. þegar $z = 1$ og þar gildir að $x^2 + y^2 = 1$. Við höfum því hring í planinu $z = 1$ og stikum hann með

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og getum reiknað að $||\mathbf{r}'(t)|| = 1$.

Við viljum nú heilda fallið $f(x, y, z) = xyz\sin(x^2 + y^2)$ eftir ferlinum, svo við reiknum

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(\cos(t), \sin(t), 1) = \cos(t)\sin(t)\sin(1)$$

Heildið er því

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds &= \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t))||\mathbf{r}'(t)||dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(1)\cos(t)\sin(t)dt \\ &= \sin(1)\left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Þetta getur maður reyndar séð beint án þess að reikna út frá tveimur mismunandi staðreyndum.

a) Ferillinn $z = 1$ og $x^2 + y^2 = 1$ er samhverfur um x-ásinn. Þ.e. ef (x, y, z) er á ferlinum, þá er $(-x, y, z)$ það líka. Að auki er fallið $f(x, y, z)$ oddstætt um x-ásinn, þ.e.
$$f(-x, y, z) = f(x, y, z).$$
Því hlýtur heildið af f eftir ferlinum að vera 0, því hlutinn á $x \geq 0$ styttist út á móti hlutanum í $x \leq 0$.

b) Ferillinn $z = 1$ og $x^2 + y^2 = 1$ er samhverfur um y-ásinn. Þ.e. ef (x, y, z) er á ferlinum, þá er $(x, -y, z)$ það líka. Að auki er fallið $f(x, y, z)$ oddstætt um y-ásinn, þ.e.
$$f(x, -y, z) = f(x, y, z).$$
Því hlýtur heildið af f eftir ferlinum að vera 0, því hlutinn á $y \geq 0$ styttist út á móti hlutanum í $y \leq 0$.

Við munum sjá mörg svona dæmi síðar, þar sem samhverfur eru notaðar til þess að leysa eða einfalda heildi.

Æfing 1.4.5 Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^3$ sem er samsettur úr tveimur línustrikum; línustriki frá $(0, 0, 0)$ til $(1, 1, 0)$ og línustriki frá $(1, 1, 0)$ til $(1, 1, 1)$. Gefið er fall

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ með formúlunni

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy\sin(z).$$

Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds.$$

■ **Lausn** Línustrikið frá $(0, 0, 0)$ til $(1, 1, 0)$ stikum við með

$$\mathbf{r} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}.$$

Þá er $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}$ og $f(\mathbf{r}(t)) = 2t^2$.

Línustrikið frá $(1, 1, 0)$ til $(1, 1, 1)$ stikum við með

$$\mathbf{r} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Þá er $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$ og $f(\mathbf{r}(t)) = 2 + \sin(t)$.

Við getum nú reiknað ferilheildið

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds &= \int_0^1 2\sqrt{2}t^2\ dt + \int_0^1 (2 + \sin(t))\ dt \\ &= 2\sqrt{2}\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_{t=0}^{t=1} + \Big[2t - \cos(t)\Big]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} + 3 - \cos(1).\end{aligned}$$

Æfing 1.4.6 Látum $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ vera fall og $\mathcal{C}$ vera ferilinn sem myndast þegar sívalningshvelið $x^2 + y^2 = 9$ sker skálina $z = x^2 + y^2$. Reiknið ferilheildið

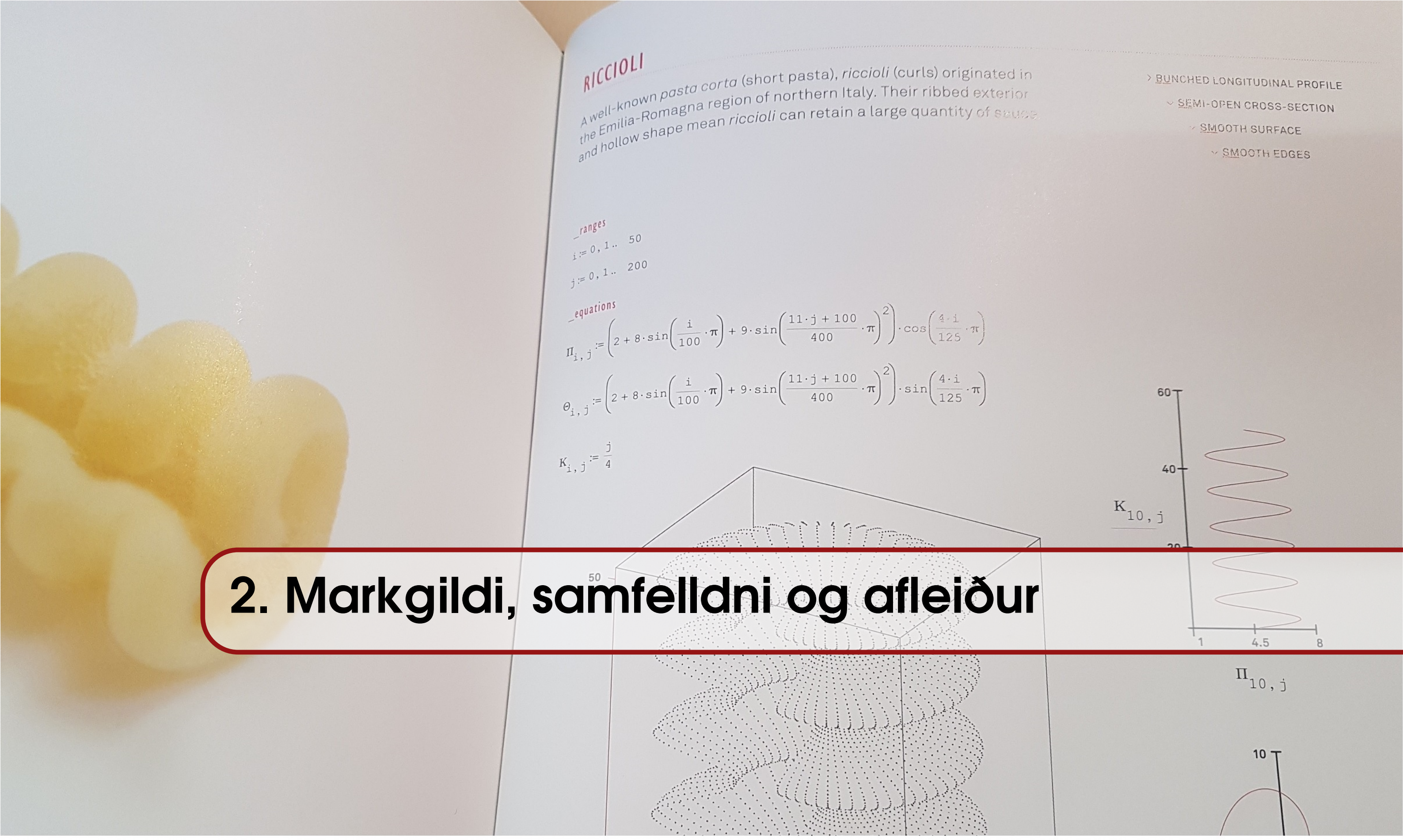
$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds.$$

■ **Lausn** Stikum ferilinn $\mathcal{C}$ með

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = 3\cos(t)\,\mathbf{i} + 3\sin(t)\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k},$$

þá er $\|\mathbf{r}'(t)\| = 3$ og við setjum upp og reiknum heildið

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\ dt = \int_0^{2\pi} 9 \cdot 3\ dt = 54\pi.$$



2. Markgildi, samfelldni og afleiður

Við skoðum nú föll $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ nánar og útvíkkum skilgreiningar fyrir markgildi, samfelldni og afleiður (e. limits, continuity, derivatives). Auk þess skilgreinum við línulega nálgun og útgildi.

2.1 Formengi og myndmengi

Alveg eins og föll $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sem úthluta sérhverri rauntölu x nákvæmlega einni rauntölu $g(x)$, getur maður talað um föll $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, sem úthluta þá sérhverjum vektor

$$\mathbf{x} = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

nákvæmlega einni rauntölu $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Oft er formengi (e. domain) f líka takmarkað við einhvert hlutmengi $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ og við notumst við formengishefðina: ef f er gefið með formúlu, þá er það skilgreint fyrir öll $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ þ.a. vit sé í formúlunni $f(\mathbf{x})$. T.d. er samkvæmt formengishefðinni

$$\mathcal{D}(f) = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \; : \; x_1 \geq 0 \text{ og } x_2 \geq 0 \text{ eða } x_1 < 0 \text{ og } x_2 < 0\}$$

fyrir $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, því fyrir $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(f)$ er $x_1 x_2 \geq 0$ og við getum tekið kvaðratrótina.

Fyrir fall f með formengið $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ kallast mengi allra talna $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fyrir alla punkta í $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{D}(f)$ myndmengi (e. codomain) f. Önnur oft notuð orð fyrir myndmengi eru bakmengi og varpmengi og formengið er líka oft kallað skilgreiningarmengi f.

■ **Dæmi 2.1** Fallið $f(x, y) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$ hefur formengið $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$ og myndmengið $\mathbb{R}$. ■

■ **Dæmi 2.2** Fallið $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ hefur formengið

$$\mathcal{D}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 9 \right\}$$

og myndmengið er $[0, 3]$. ■

ATH Þegar við fjöllum um vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, þá er stundum mikilvægt að gera grein fyrir hvort $\mathbf{x}$ er dálkvektor eða línuvektor, þ.e. hvort

$$\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n) \quad \text{eða} \quad \mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Oft lætur maður vektora $\mathbf{x}$ vera dálkvektora nema annað sé tekið sérstaklega fram. Aftur á móti skiptir stundum ekki miklu máli hvort vektorar eru dálkvektorar eða línuvektorar og maður er þá oft ekki jafn nákvæmur og ritar t.d.

$$\mathcal{D}(f) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 9\big\}$$

í dæminu hér að ofan í stað

$$\mathcal{D}(f) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

einfaldlega af því að það er styttra og ætti ekki að valda misskilningi.

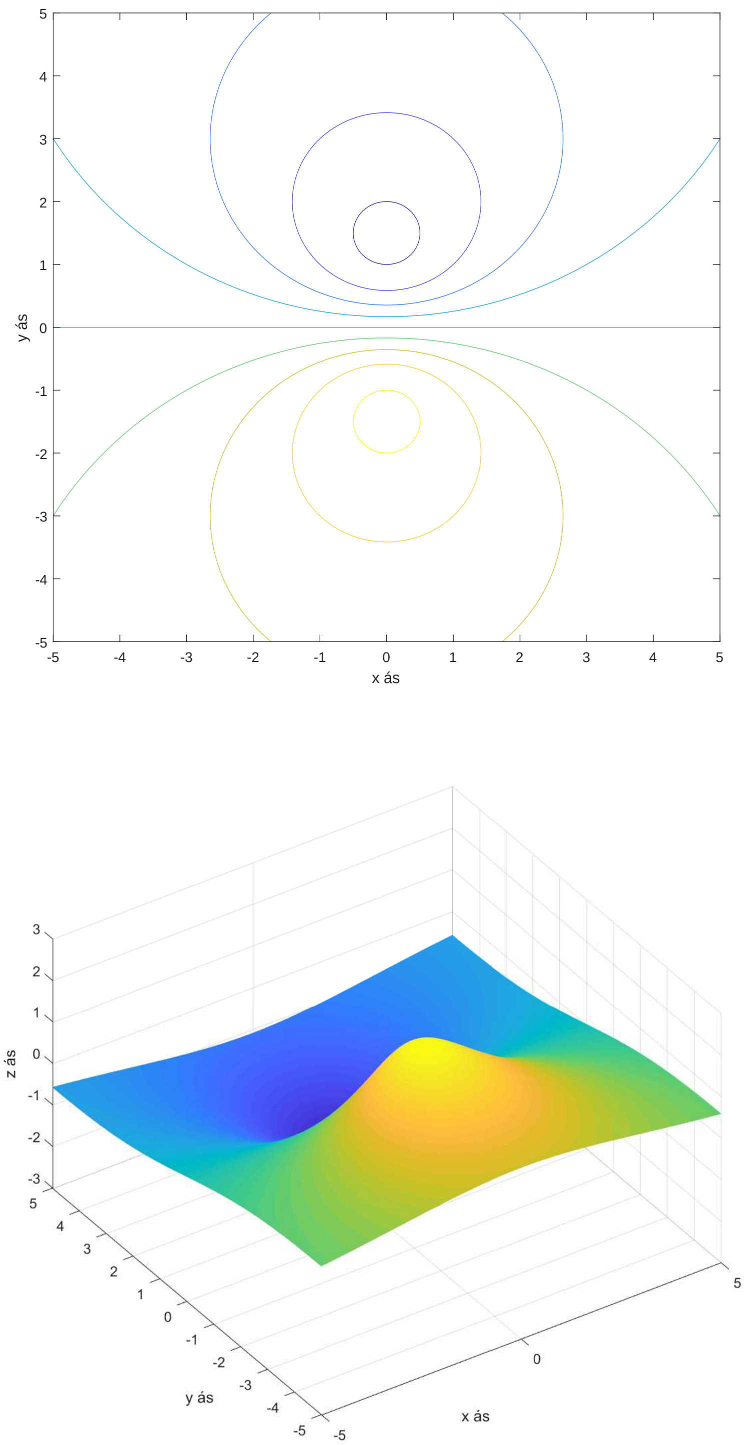
2.2 Gröf falla og hæðarlínur

Auðvelt er að teikna föll $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ í Geogebru og Matlab. Við höfum þegar séð dæmi um notkun á Geogebru og hér á eftir sjáum við dæmi þar sem Matlab er notað. Hafi maður ekki þennan eða sambærilegan hugbúnað við höndina en vill sjá fyrir sér fall $f(x, y)$ í þrívídd, er oft notast við hæðarlínur í tvívídd. Hæðarlínur fást með að teikna ferlana $C = f(x, y)$ fyrir nokkur gildi á C með jöfnu millibili. Ef hæðarlínurnar liggja þétt þýðir það mikla breytingu (sbr. þrýstilínur á veðurkorti).

■ **Dæmi 2.3** Fallið $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{-6y}{2 + x^2 + y^2},$$

sést á Mynd 2.1. Hæðarlínurnar er hægt að teikna með því að láta $\frac{-6y}{2+x^2+y^2} = C$ og teikna ferilinn fyrir C sem við veljum með jöfnu millibili, t.d. $C = 1, 2, 3, 4$. Í Matlab er hægt að teikna hæðarlínur með fallinu `contour`. ■



Mynd 2.1: Hér sést graf fallsins $f(x,y) = \dfrac{-6y}{2+x^2+y^2}$ á neðri myndinni og hæðarlínur þess fyrir ofan.

Teikningarnar hér að ofan fást með því að nota eftirfarandi skipanir í Matlab:

```
[x,y]=meshgrid(-5:0.01:5);  % hnitin (x,y)
z=-6*y./(2+x.^2+y.^2);      % fallgildin í (x,y)
mesh(x,y,z)     % fallið teiknað
contour(x,y,z) % hæðarlínur teiknaðar
```

Til að merkja ásana getur maður notað skipanirnar

```
xlabel('x ás')
ylabel('y ás')
zlabel('z ás')
```

2.3 Markgildi og samleitni

Fyrir fall $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ segir maður að $f(x)$ stefni á rauntöluna L þegar x stefnir á rauntöluna y, þþaa. fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $\delta_\varepsilon > 0$ þ.a.

$$0 < |x - y| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

eða með öðrum orðum: $f(x)$ er eins nálægt L og vera vill ef x er nógu nálægt y.

Í hærri-víddum er alhæfingin á þessu eftirfarandi:

Skilgreining 2.3.1 Fyrir fall $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ segir maður að $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ stefni á vektorinn $\mathbf{L}$ þegar $\mathbf{x}$ stefnir á vektorinn $\mathbf{y}$, þþaa. fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $\delta_\varepsilon > 0$ þ.a.

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon,$$

eða með öðrum orðum: $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ er eins nálægt $\mathbf{L}$ og vera vill ef $\mathbf{x}$ er nógu nálægt $\mathbf{y}$.

Allar reiknireglur sem við þekkjum fyrir markgildi gilda einnig í fleiri víddum.

Regla 2.3.1 Ef f og g eru raungild föll úr planinu þ.a.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad \text{og} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$$

og til er grennd við (a,b) sem er í $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ (nema mögulega (a,b)), þá gildir að

(i)
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M,$$

(ii)
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM,$$

(iii)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M} \quad \text{ef } M \neq 0.$$

Regla 2.3.1 er hér sett fram fyrir föll $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, en sambærileg regla gildir fyrir $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ föll. Regla 2.3.1 (i) gildir einnig fyrir föll $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, en þar sem margföldun og deiling er ekki skilgreind fyrir vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, geta (ii) og (iii) að sjálfsögðu ekki gilt ef $m \geq 2$.

■ **Dæmi 2.4** Auðvelt er að finna markgildið

$$\lim_{(x,y)\to(2,4)} \left(xy - \frac{x}{y}\right) = 8 - \frac{2}{4} = \frac{15}{2}.$$

■

Það sem veldur erfiðleikum í hærri víddum er að nú getur $\mathbf{x}$ ekki bara nálgast $\mathbf{y}$ frá hægri eða vinstri, heldur koma mun flóknari leiðir til greina.

■ **Dæmi 2.5** Finnið markgildið

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Hér dugir ekki að setja inn punktinn $(0,0)$ því fallið er ekki skilgreint í punktinum. Við prófum nú að nálgast punktinn $(0,0)$ eftir mismunandi leiðum og sjáum hvort markgildið verði það sama. Prófum fyrst að nálgast $(0,0)$ eftir x-ásnum (þ.e. $y = 0$), þar er fallið $f(x,y) = f(x,0) = 0$ svo markgildið er

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = 0.$$

Prófum nú að nálgast $(0,0)$ eftir y-ásnum, þar er fallið $f(x,y) = f(0,y) = 0$ svo

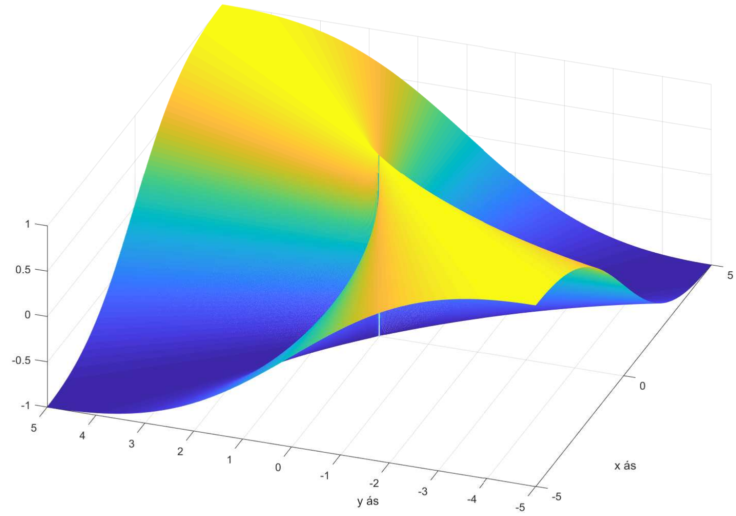
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0.$$

Hér gæti maður etv. freistast til að halda að markgildið sé til, þar sem við komum úr tveimur mismunandi áttum og fengum sama markgildið. En fallið verður að hafa sama markgildi sama úr hvaða átt við komum. Prófum nú t.d. að nálgast punktinn eftir línunni $y = x$. Þar er $f(x,y) = f(x,x)$ svo markgildið verður

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1.$$

Við höfum því að markgildið er ekki það sama úr öllum áttum og markgildið er því ekki til.

■



Mynd 2.2: Hér sést graf fallsins í Dæmi 2.5

■ **Dæmi 2.6** Finnið eftirfarandi markgildi ef það er til:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{þar sem} \quad f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ef } y = x^2, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Lausn: Nú gildir fyrir sérhverja línu $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, að

$$\lim_{(x,ax)\to(0,0)} f(x,ax) = 0$$

því fyrir $x < a$ er $y = ax \neq x^2$. Aftur á móti er skv. skilgreiningunni á f líka

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,x^2) = \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} 1 = 1.$$

Fallið f hefur því ekki markgildi í $(0,0)$, þrátt fyrir að við fáum sama gildið þegar við nálgumst $(0,0)$ eftir hvaða línu sem er. ■

Athugið að í dæmunum hér á undan þurftum við að finna tvær mismunandi leiðir að punktinum sem gáfu mismunandi markgildi og sýna þar með að markgildið sé ekki til. Þessi aðferð dugir ekki til að sýna að markgildi sé til, enda ekki hægt að skoða markgildið eftir öllum leiðum. Stundum er hægt að nota Klemmuregluna til að sýna að markgildið sé til.

■ **Dæmi 2.7** Finnið markgildið

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Lausn: Sjáum að þar sem

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1,$$

fyrir öll x og y er

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}\, x^2 \leq x^2.$$

Þar sem

$$\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

þá er skv. Klemmureglu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

■

■ **Dæmi 2.8** Finnið markgildið

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}.$$

Lausn: Sjáum að

$$0 \leq \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = \frac{(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}\, x^2 \leq x^2$$

og þar sem

$$\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

þá er skv. Klemmureglu

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = 0.$$

■

ATH Til að markgildið sé til þarf markgildið að vera það sama þegar við nálgumst punktinn frá öllum mögulegum leiðum.

Snúum okkur nú að samfelldni. Við höfum áður lært að fall $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er samfellt í punktinum $y \in \mathbb{R}$ ef við getum tryggt að $|g(x) - g(y)|$ verður eins lítið og við viljum ef við tökum x nógu nálægt y, þ.e. með því að láta $|x - y| > 0$ vera nógu lítið. Þetta er svipað fyrir föll $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Skilgreining 2.3.2 Við segjum að f sé samfellt í vektornum $\mathbf{y}$ ef við getum tryggt að $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|$ verður eins lítið og við viljum ef við tökum $\mathbf{x}$ nógu nálægt $\mathbf{y}$, þ.e. með því að láta $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > 0$ vera nógu lítið.

Það er nauðsynlegt skilyrði en ekki nægjanlegt að fallið $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sé samfellt fall af sérhverju $x_1, x_2, \ldots, x_n$ þegar öllum hinum breytunum er haldið föstum. Við sjáum dæmi um þetta í næsta dæmi:

■ **Dæmi 2.9** Skoðum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 1, & \text{ef } x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Þetta fall er ekki samfellt í $(0\ 0)^T$ þó að $f(x_1, 0) = 0$ fyrir öll $x_1 \in \mathbb{R}$ og $f(0, x_2) = 0$ fyrir öll $x_2 \in \mathbb{R}$. Vandamálið er að $f(r, r) = 1$ fyrir öll $r > 0$.

■

Eftirfarandi skilgreining er jafngild því sem við höfum fjallað um:

Regla 2.3.2 Fallið $f(x,y)$ er samfellt í (a,b) ef

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Þetta er því eins og áður; markgildið verður að vera til og vera jafnt fallgildinu. Skilgreiningin fyrir $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ með $n > 2$ er nákvæmlega eins.

Ef f er fall $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eða $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ þá ritar maður líka oft $f(x,y)$ í stað $f(x_1,x_2)$ og $f(x,y,z)$ í stað $f(x_1,x_2,x_3)$. Það skiptir einfaldlega engu máli hvað maður kallar breyturnar því þetta eru frjálsar breytur.

Fall f sem er samfellt í öllum punktum í skilgreiningarmengi sínu er einfaldlega sagt vera samfellt.

Æfingar 2.3

Æfing 2.3.1 Finnið eftirfarandi markgildi ef það er til, eða rökstyðjið að það sé ekki til

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} \frac{x^5y^3}{(x-1)^2+(y-1)^3}.$$

■

Æfing 2.3.2 Finnið markgildið $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$. ■

Æfing 2.3.3 Er fallið

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y}, & \text{ef } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{ef } x=y=0. \end{cases}$$

samfellt? ■

Æfing 2.3.4 Finnið markgildið eða sýnið að það sé ekki til

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

■

2.4 Hlutafleiður og heildarafleiður

Ef $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, þá skilgreinir maður hlutafleiðu (e. partial derivative) f m.t.t. k-tu breytunnar í vektor $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ á eftirfarandi hátt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}.$$

Önnur leið til þess að orða þetta er að maður heldur öllum breytunum $x_1, x_2, \dots, x_n$ föstum, nema x_k, og diffrar formúlu fallsins m.t.t. x_k.

■ **Dæmi 2.10** Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$. Þá er

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^2 e^{x_1 x_2^2}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 e^{x_1 x_2^2}.$$

■

Afleiða falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ í punkti a gefur okkur hver hallatala snertils við graf fallsins í punktinum a er. Snertill við graf falls $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ í punkti a er lína sem fer í gegnum punktinn $(a, f(a))$ og er sú lína sem nálgar graf fallsins best í nágrenni þessa punkts. Fyrir fall $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ getur maður talað um snertiplan í punkti (a, b), þ.e. graf sléttu sem fer í gegnum punktinn $(a, b, f(a, b))$ og nálgar graf fallsins $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ í nágrenni punktsins (a, b) best allra sléttna. Hér gefa hlutafleiður fallsins $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ í punktinum (a, b) okkur hver hallinn á snertiplaninu við graf fallsins í (a, b) er í stefnu $x-$áss og stefnu $y-$áss.

Athugið að

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

og ekkert er því til fyrirstöðu að taka einhverja hlutafleiðu af þessu nýja falli, t.d.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) := \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

o.s.frv.

■ **Dæmi 2.11** Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2^2}$. Þá er

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^2 e^{x_1 x_2^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 e^{x_1 x_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^4 e^{x_1 x_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 e^{x_1 x_2^2} + 4x_1^2 x_2^2 e^{x_1 x_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_2 e^{x_1 x_2^2} + 2x_1 x_2^3 e^{x_1 x_2^2}$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 e^{x_1 x_2^2} + 2x_1 x_2^3 e^{x_1 x_2^2}.$$

■

Það er ekki tilviljun í síðasta dæmi að

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2).$$

Eftirfarandi regla er mjög mikilvæg og oft gagnleg. Ath. að þegar talað er um að fall f sé skilgreint í *grennd* punkts eða vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, merkir að til er $\epsilon > 0$ þ.a. f er skilgreint á menginu

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon\}.$$

Regla 2.4.1 Ef $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ og hlutafleiðurnar

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

eru skilgreindar í grennd vektorsins $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

er samfellt fall í grenndinni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, þá er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$

skilgreint í $\mathbf{x}$ og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{x}).$$

■ **Dæmi 2.12** Skoðum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 3x_1 \sin(x_2)$. Þá eru

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3\sin(x_2)$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_1 \cos(x_2)$$

skilgreind fyrir hvaða vektor $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ sem er og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 3\cos(x_2)$$

er samfellt fall. Þess vegna er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = 3\cos(x_2)$$

fyrir öll $(x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, sem er reyndar lítið mál að reikna beint út. ■

Skilgreining 2.4.1 Látum $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vera fall og gerum ráð fyrir að hlutafleiðurnar

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

séu allar samfelld föll í nágrenni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Þá er f sagt vera diffranlegt í $\mathbf{x}$ og *heildarafleiða* f í $\mathbf{x}$ skilgreind sem línuvektorinn

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Maður skilgreinir oft virkjann nabla

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

og ritar $\nabla f(\mathbf{x})$ fyrir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

og talar um *stigul* (e. gradient) fallsins f í punktinum (eða vektornum) $\mathbf{x}$.

■ **Dæmi 2.13** Finnið stigul fallsins $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x\sin(y)$.
Lausn:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}[x\sin(y)] & \frac{\partial}{\partial y}[x\sin(y)] & \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(y) & x\cos(y) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Stigull $\nabla f(\mathbf{x})$ falls $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ í punkti $\mathbf{x}$ er vektor í $\mathbb{R}^n$ sem gefur stefnu hröðustu breytinga á fallgildi f.

Skilgreining 2.4.2 Látum $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vera fall þar sem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Fallið $\mathbf{f}$ er sagt vera diffranlegt í $\mathbf{z}$ og $D\mathbf{f}$ er *heildarafleiða* fallsins $\mathbf{f}$ í vektornum $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, þ.e. $m \times n$-fylkið

$$D\mathbf{f}(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{z}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{z}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{z}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{z}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{z}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{z}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{z}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{z}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

svo fremi sem allar afleiðurnar sem koma fyrir í fylkinu séu samfelld föll í grennd

z.

Fylkið $D\mathbf{f}$ er oft kallað *Jacobi fylki* fallsins $\mathbf{f}$ (e. Jacobian matrix). Oft er líka bara talað um afleiðu í stað heildarafleiðu.

Dæmi 2.14 Látum $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \\ f_3(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1x_2^2 \\ \sin(x_2)+2 \end{pmatrix}.$$

Þá er

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1+2x_2) = 1,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+2x_2) = 2,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}x_1x_2^2 = x_2^2,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}x_1x_2^2 = 2x_1x_2,$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\sin(x_2)+2) = 0$$

og

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\sin(x_2)+2) = \cos(x_2)$$

svo heildarafleiðan er

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(x_1,x_2) := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 \\ 0 & \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

■

ATH Athugið að heildarafleiða falls $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ er $1 \times n$-vigur sem er kallaður stigull og heildarafleiða falls $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ er er $m \times n-$ fylki sem kallast Jacobi fylki.

Aðrir ritháttir sem oft eru notaðir fyrir hlutafleiður eru t.d.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \partial_1\partial_2 f = \partial_{2,1} f = \partial_{21} f = f_{2,1} = f_{21}.$$

Takið eftir hvernig röðin er öfug í $\partial_{2,1}f$, $\partial_{21}f$ og f_{21} miðað við $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ og $\partial_1\partial_2 f$. Rithættinn f_1 og svipað má náttúrlega einungis nota ef f er raungilt fall. Fyrir vektorgilt $\mathbf{f}$ stendur f_1 fyrir fyrsta lið $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ o.s.frv.
Maður talar um fyrstastigs hlutafleiður fyrir $\partial_k f$, annarsstigs hlutafleiður fyrir $\partial_{k,\ell} f$ o.s.frv. Ef við erum að skoða fallið $f(x,y)$ ritar maður líka t.d.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \text{o.s.frv.}$$

Fjölvísar: Þegar hlutafleiður eru notaðar af miklu kappi borgar sig að nota svokallaða fjölvísa (e. multi-indices). n-víður fjölvísir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ er vektor þar sem stökin eru öll heiltölur ≥ 0. Fyrir fall $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ skilgreinir maður svo

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Hér er $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ og $D^\alpha f$ merkir að fallið f á að diffra α_1-sinni m.t.t. fyrstu breytunnar x_1, α_2-sinni m.t.t. annarar breytunnar x_2 o.s.frv. Ef $\alpha_i = 0$ á að diffra 0-sinnum m.t.t. breytunnar x_i, þ.e. það á ekki að diffra m.t.t. hennar. Þessi ritháttur er einungis notaður þegar allar hlutafleiður f til og með einhvers stigs $k \in \mathbb{N}$ eru samfelld föll á opnu mengi $U \subseteq \mathbb{R}^n$ og því skiptir röðin á diffrununum ekki máli. Maður ritar svo $C^k(U)$ fyrir mengi allra slíkra falla.

Æfingar 2.4

Æfing 2.4.1 Finnið allar aðrar fyrstastigs hlutafleiður fallanna

a) $f(x, y) = xy + y^2$

b) $g(x, y, z) = x^2 e^{yz} - zxe^{xy^2}$

■

Æfing 2.4.2 Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vera diffranlegt fall með samfelldar afleiður og skilgreinum

$$F(x, y) = x^2 \sin(y) + \int_y^{y^2} f(t)dt.$$

Reiknið

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y).$$

■

Æfing 2.4.3 Reiknið

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \text{ þar sem } u(x, y, t) = \sqrt{x^2 + y} + \cos(t)y, \quad x(t, s) = \frac{s}{t} \text{ og } y(t, s) = 5t - s.$$

Ath. hér þarf að nota keðjuregluna. ■

Æfing 2.4.4 Látum $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

a) Reiknið stigul fallsins $f(x, y, z)$.

b) Við skilgreinum fallið

$$\mathbf{g}(x,y,z) = [\nabla f(x,y,z)]^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Reiknið heildarafleiðu $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

2.5 Snertiplan og normalvigur

Ef graf fallsins $z = f(x,y)$ er þjált í punktinum $P = (a,b,f(a,b))$, þ.e. ef fallið f hefur samfelldar fyrstastigs afleiður í grennd punktsins, þá hefur grafið snertiplan og normalvigur í P. Normalvigurinn er hornréttur á graf fallsins í punktinum. Snertiplanið sker $y = b$ í beinni línu sem er snertill skurðferils yfirborðsins $z = f(x,y)$ við planið $y = b$ í punktinum P. Línan hefur hallatöluna $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ og er því samsíða vigrinum

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\mathbf{k}.$$

Með því að skoða snertilinn sem fæst á skurðferli $x = a$ við yfirborðið fáum við með svipuðum rökum að skurðferill yfirborðsins $z = f(x,y)$ við planið $x = a$ er lína sem er samsíða vigrinum

$$\mathbf{v} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\mathbf{k}.$$

Normalvigur snertilplansins og þar með yfirborðsins $z = f(x,y)$ í punktinum P er vigur sem er hornréttur á þessa tvo vigra, $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, og fæst með formúlunni:

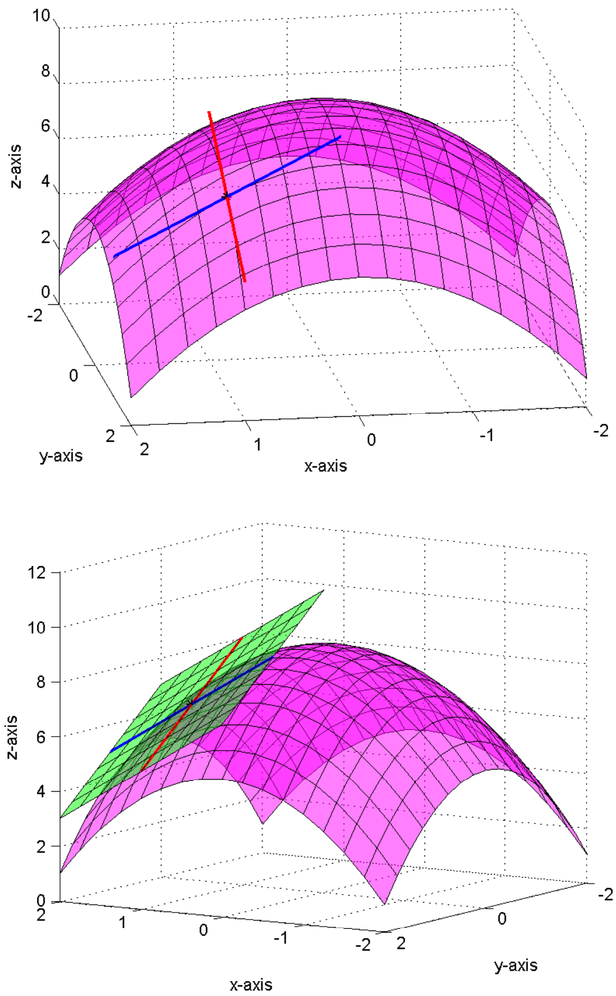
$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Snertiplanið er plan sem inniheldur punktinn P með hnit $(a,b,f(a,b))$ og er hornrétt á normalvektorinn. Það inniheldur því þá punkta $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ sem uppfylla

$$\mathbf{n} \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Með því að setja inn í þessa jöfnu formúluna fyrir $\mathbf{n}$ vigurinn fæst svo þægilegri formúla fyrir snertiplaninu:

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$



Mynd 2.3: Graf fallsins $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$. Á eftir myundinni sjáum við snertla við yfirborðið í $(1,1)$ í x- og y- stefnu. Á neðri myndinni sjáum við að auki snertiplan við yfirborðið í punktinum.

■ **Dæmi 2.15** Finnum snertiplan fyrir fallið

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sin(xy)$$

í $(a,b) = (\frac{\pi}{3}, -1)$.

Lausn: Reiknum fyrst hlutafleiðurnar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$$

svo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{3}, -1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{3}, -1) = \frac{\pi}{6} \quad \text{og} \quad f(\frac{\pi}{3}, -1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Því er snertiplanið gefið með jöfnunni

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{6}(y+1).$$

■

2.6 Línuleg nálgun

Við rifjum upp að besta línulega nálgun við graf fallsins $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ í nágrenni $z \in \mathbb{R}$, ef g er diffranlegt í z, er

$$y(x) = g'(z)(x - z) + g(z).$$

Þetta er svipað í hærri víddum.

Regla 2.6.1 Besta línulega nálgun við graf fallsins $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ í nágrenni $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ er

$$y(\mathbf{x}) = [\nabla f(\mathbf{z})](\mathbf{x} - \mathbf{z}) + f(\mathbf{z})$$

Hér er gert ráð fyrir að f sé diffranlegt í $\mathbf{z}$.

Ath. að $\mathbf{x}$ og $\mathbf{z}$ eru dálkvektorar og $\nabla f(\mathbf{z})$ er línuvektor og 1×1-fylkið $[\nabla f(\mathbf{z})](\mathbf{x} - \mathbf{z})$ er túlkað sem rauntala.

Það er svolítið ruglandi, sérstaklega í hærri víddum, að fallið $y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sé kallað línleg nálgun, því fallið y er ekki línulegt. Þ.e. almennt er

$$y(a\mathbf{x} + b\mathbf{z}) \neq ay(\mathbf{x}) + by(\mathbf{z}).$$

Aftur á móti er auðvelt að ganga úr skugga um að fallið $\mathbf{x} \mapsto y(\mathbf{x}) - a$, þar sem $a = f(\mathbf{z})$, sé línulegt. Föll $y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ þ.a. til er tala a svo $\mathbf{x} \mapsto y(\mathbf{x}) - a$ er línulegt kallast vildarföll eða línuföll (e. affine functions).

■ **Dæmi 2.16** Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = e^{ax_1x_2^2}$, $a \in \mathbb{R}$. Reiknið bestu línulegu nálgun við f í nágrenni punktsins $\mathbf{x} = (2\ 3)^T$.

Lausn: Heildarafleiða f í $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T$ er

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2^2 e^{ax_1x_2^2} & 2ax_1x_2e^{ax_1x_2^2} \end{pmatrix}$$

og besta línulega nálgunin við f í nágrenni $(2\ 3)^T$ er gefin með

$$\begin{aligned} y(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} a3^2e^{a\cdot 2\cdot 3^2} & 2\cdot a\cdot 2\cdot 3e^{a\cdot 2\cdot 3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} + e^{a\cdot 2\cdot 3^2} \\ &= ae^{18a} \begin{pmatrix} 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} + e^{18a} \end{aligned}$$

■

ATH Athugið að fyrir fall $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ er línulega nálgunin í (a, b) snertiplanið í punktinum.

Fall $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ er þægilegast að líta á sem samantekt af m föllum $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Þ.e. fyrir sérhvern vektor $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ er

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Maður feitletrar oft föll $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ til þess að ljóst sé að $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sé vektor (dálkvektor). Nú er, fyrir sérhvert $i = 1, 2, \ldots, m$, besta línulega nálgunin við fallið $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ í nágrenni $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ fallið

$$y(\mathbf{x}) := [\nabla f_i(\mathbf{z})](\mathbf{x} - \mathbf{z}) + f_i(\mathbf{z}).$$

Besta línulega nálgunin við fallið $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ í nágrenni $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ hlýtur nú líka að vera fall $\mathbf{y} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Þ.e.

$$\mathbf{y}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y_1(\mathbf{x}) \\ y_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ y_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

þar sem $y_1, y_2, \ldots, y_m$ eru línuleg föll $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Þ.e. y_1 er besta línulega nálgunin við f_1, y_2 er besta línulega nálgunin við f_2 o.s.frv. En þá hlýtur

$$\begin{aligned} y_i(\mathbf{x}) &= [\nabla f_i(\mathbf{z})](\mathbf{x} - \mathbf{z}) + f_i(\mathbf{z}) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{z}) & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}(\mathbf{z}) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ \vdots \\ x_n - z_n \end{pmatrix} + f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \end{aligned}$$

svo

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = [D\mathbf{f}(\mathbf{z})](\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \mathbf{f}(\mathbf{z}),$$

þar sem $D\mathbf{f}$ er *heildarafleiðan* af $\mathbf{f}$ í vektornum $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, þ.e. $m \times n$-fylkið

$$D\mathbf{f}(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{z}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{z}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{z}) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{z}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{z}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{z}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{z}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{z}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

Eins og áður hefur komið fram er fylkið $D\mathbf{f}$ kallað *Jacobi-fylki* fallsins $\mathbf{f}$ (e. Jacobian matrix).

Almennt fyrir sérhvert fall $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sem er diffranlegt í $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ getum við því skilgreint línulega nálgun $\mathbf{y} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ á eftirfarandi hátt:

Regla 2.6.2 Besta línulega nálgunin við $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ í nágrenni $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$ er gefin með

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = [D\mathbf{f}(\mathbf{z})](\mathbf{x}-\mathbf{z}) + \mathbf{f}(\mathbf{z}),$$

þar sem $D\mathbf{f}$ er heildarafleiða $\mathbf{f}$.

Athugið að línulega nálgunin $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ er gott mat á gildið $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ef $\mathbf{x}$ er nálægt $\mathbf{z}$, þ.e. ef $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|$ er lítið. Nánar gildir

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{z}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|} = 0.$$

■ **Dæmi 2.17** Látum $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vera diffranlegt fall. Hvaða víddir hefur Jacobi-fylki $D\mathbf{f}$ fallsins $\mathbf{f}$?
Lausn: Víddirnar $m\times n$. ■

■ **Dæmi 2.18** Látum $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\sin(x_1x_2) \\ x_1x_3\end{pmatrix}$$

vera fall. Reiknið heildarafleiðu $\mathbf{f}$ sem fall af $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ og bestu línulegu nálgun við $\mathbf{f}$ í nágrenni $(\pi\ 1\ 2)^T \in \mathbb{R}^3$.

Lausn: Við reiknum fyrst stigla fallanna f_1 og f_2,

$$\nabla f_1(x_1,x_2,x_3) = \big(\sin(x_1x_2) + x_1x_2\sin(x_1x_2),\ x_1^2\cos(x_1x_2),\ 0\big)$$

og

$$\nabla f_2(x_1,x_2,x_3) = (x_3,\ 0,\ x_1).$$

Heildarafleiða $\mathbf{f}$ í $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ er þá 2×3-fylkið

$$D\mathbf{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_1,x_2,x_3) \\ \nabla f_2(x_1,x_2,x_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x_1x_2)+x_1x_2\cos(x_1x_2) & x_1^2\cos(x_1x_2) & 0 \\ x_3 & 0 & x_1\end{pmatrix}.$$

Nú er

$$D\mathbf{f}(\pi,1,2) = \begin{pmatrix} \sin(\pi\cdot 1)+\pi\cdot 1\cos(\pi\cdot 1) & \pi^2\cos(\pi\cdot 1) & 0 \\ 2 & 0 & \pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & -\pi^2 & 0 \\ 2 & 0 & \pi\end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{f}(\pi,1,2) = \begin{pmatrix} \pi\sin(\pi\cdot 1) \\ \pi\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi\end{pmatrix}$$

svo

$$\mathbf{y}(x_1,x_2,x_3) = [D\mathbf{f}(\pi,1,2)](\mathbf{x}-(\pi,1,2)^T)+\mathbf{f}(\pi,1,2) = \begin{pmatrix} -\pi & -\pi^2 & 0 \\ 2 & 0 & \pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\pi \\ x_2-1 \\ x_3-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi\end{pmatrix}$$

er besta línulega nálgunin við $\mathbf{f}$ í nágrenni $(\pi\ 1\ 2)^T$. ■

■ **Dæmi 2.19** Látum $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ vera diffranlegt fall. Hver er heildarafleiða f?

Lausn: f er fall $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ svo heildarafleiðan er 1×1-fylki.

$$Df(x_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1)\right) = \big(f'(x_1)\big).$$

Þetta þýðir einfaldlega að heildarafleiða falls $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ er ekkert annað en „venjulega“ afleiðan, því maður gerir sjaldnast greinarmun á 1×1-fylki og rauntölu. ■

2.7 Stefnuafleiður

Þegar við finnum hlutafleiður fallsins $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ erum við að finna breytingu fallsins f í stefnu x- og y-áss. Við getum fundið breytingu fallsins í hvaða stefnu sem er, með því að reikna út stefnuafleiðuna (e. directional derivative).

Regla 2.7.1 Látum f vera diffranlegt fall í (a, b) og látum $\mathbf{u} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j}$ vera einingarvektor, þ.e. $\|\mathbf{u}\| = 1$. Þá er stefnuafleiða f í (a, b) í stefnu vektorsins $\mathbf{u}$ gefin sem

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b).$$

Hér erum við s.s. að finna þann þátt $\nabla f(a, b)$ sem er í stefnu vigursins $\mathbf{u}$.

■ **Dæmi 2.20** Reiknum stefnuafleiðu fallsins $f(x, y) = x^2 y^3$ í punktinum (a, b) í stefnu vigursins $\mathbf{i}$ og stefnu vigursins $\mathbf{j}$.
Lausn: Nú er

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + 3x^2y^2\,\mathbf{j}$$

svo stefnuafleiða fallsins í stefnu $\mathbf{i}$ er

$$D_{\mathbf{i}} f(a, b) = \mathbf{i} \cdot \nabla f(a, b) = 2ab^3 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

og stefnuafleiða fallsins í stefnu $\mathbf{j}$ er

$$D_{\mathbf{j}} f(a, b) = \mathbf{j} \cdot \nabla f(a, b) = 3a^2b^2 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Þessi niðurstaða ætti ekki að koma á óvart. ■

ATH Það er svolítið ónákvæmt að skrifa að

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + 3x^2y^2\,\mathbf{j}$$

í dæminu hér að ofan, því $\nabla f(x, y)$ er línuvektor en $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ eru dálkvektorar. Réttara væri því að skrifa

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i}^T + 3x^2y^2\,\mathbf{j}^T$$

eða

$$[\nabla f(x, y)]^T = 2xy^3\,\mathbf{i} + 3x^2y^2\,\mathbf{j}.$$

Þar sem við tökum síðar depilfeldi $\nabla f(x, y)$ skiptir það ekki máli í þessu dæmi og þar sem þetta er oft gert gerum við það líka. Aftur á móti mundum við lenda í vandræðum ef við reyndum að nota þessa formúlu í línulegu nálguninni, því margfeldi tveggja vektora í $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, er ekki skilgreint og nauðsynlegt er að sá fyrri sé línuvektor, þ.e. af gerðinni $\mathbb{R}^{1\times n}$, og sá síðari dálkvektor, þ.e. af gerðinni $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

■ **Dæmi 2.21** Finnum stefnuafleiðu fallsins $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ í punktinum $(0, 1)$ í stefnu vektorsins $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.
Lausn: Nú er

$$\nabla f(x, y) = (2y^3 + 2xy^2)\,\mathbf{i} + (4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y)\,\mathbf{j}$$

svo í punktinum $(0,1)$ höfum við

$$\nabla f(0,1) = 2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$$

Finnum nú einingarvigur $\mathbf{v}$ í stefnu $\mathbf{u}$ með $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ og reiknum stefnuafleiðuna

$$D_{\mathbf{v}} f(0,1) = \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j}}{\|\mathbf{i} - 2\mathbf{j}\|} \cdot (2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}) = \frac{2-8}{\sqrt{5}} = \frac{-6}{\sqrt{5}}.$$

■

Skoðum aðeins betur hvað stefnuafleiðan merkir. Látum $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vera diffranlegt í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og látum $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vera einhvern vektor. Við reiknum markgildið

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

með því að nota Keðjuregluna, sem við fjöllum nánar um í næsta undirkafla. Skilgreinum fyrst fallið $\mathbf{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Þá er

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{g}(h)) - f(\mathbf{g}(0))}{h} = (f \circ \mathbf{g})'(0)$$

og samkvæmt Keðjureglunni er

$$(f \circ \mathbf{g})'(0) = [Df(\mathbf{g}(0))][D\mathbf{g}(0)].$$

Nú er $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}$, $Df(\mathbf{z}) = \nabla f(\mathbf{z})$ og $D\mathbf{g}(t) = \mathbf{y}$ fyrir öll $t \in \mathbb{R}$ svo

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})}{h} &= (f \circ \mathbf{g})'(0) \\
&= [\nabla f(\mathbf{x})]\mathbf{y} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Þar sem $[\nabla f(\mathbf{x})]\mathbf{y} = [\nabla f(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{y}$ sjáum við að fyrir einingarvigur $\mathbf{u}$ er

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Sem sagt er $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ afleiðan af f í stefnu einingarvigursins $\mathbf{u}$.

2.8 Keðjureglan, almenn útgáfa

Rifjum fyrst um Keðjuregluna fyrir föll $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ef $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er diffranlegt í $a \in \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er diffranlegt í $f(a)$, þá er fallið $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ diffranlegt í a og $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Skoðum næst Keðjuregluna í einfaldri mynd fyrir föll $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Látum f vera fall af x og y, sem hefur samfelldar fyrstu afleiður, og látum x og y vera föll af t, þá er afleiða f m.t.t. t

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Oft mundi maður líka skilja $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ sem

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

þar sem maður lítur svo á að $f(x,y) = f(x(t),y(t)) = g(t)$ sé fall af t. Þetta er samt ekki ótvírætt og ætti maður að forðast slíkan ritihátt!

■ **Dæmi 2.22** Gefið er fallið

$$z(x,y) = \sin(x^2y),$$

þar sem

$$x(s,t) = st^2 \quad \text{og} \quad y(s,t) = s^2 + \frac{1}{t}.$$

Reiknið

$$\frac{dz}{ds}.$$

Lausn:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 2xy\cos(x^2y)\cdot t^2 + x^2\cos(x^2y)\cdot 2s$$

■

Munurinn á

$$\frac{dz}{dt} \quad \textbf{og} \quad \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Ef $z = z(t)$, þ.e. z er bara fall af einni breytu sem við köllum t, þá er enginn munur. Ef $z = z(x,t)$, þar sem x er óháð t, þá er heldur enginn munur. Ef aftur á móti $x = x(t)$ er fall af t þá er munur. Með $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ er meint að það eigi að diffra m.t.t. breytunnar t, þ.e. breytu nr. 2 í inntaki $z = z(x,t)$. Þess vegna er rithátturinn $\partial_2 z$ eiginlega betri í þessu tilfelli þó að maður riti mjög oft $\dfrac{\partial z}{\partial t}$. Meint er að það eigi að bæta h við breytu nr. 2 í markgildinu

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial z}{\partial t}(x(t),t) := \lim_{h\to 0}\frac{z(x(t),t+h) - z(x(t),t)}{h}.$$

Það að $x = x(t)$ sé líka fall af t skiptir ekki máli. Aftur á móti þýðir $\dfrac{dz}{dt}$ að það á að bæta h við t allstaðar þar sem það kemur fyrir í markgildinu

$$\frac{dz}{dt}(x,t) = \frac{dz}{dt}(x(t),t) := \lim_{h\to 0}\frac{z(x(t+h),t+h) - z(x(t),t)}{h}.$$

Með almennu Keðjureglunni, sem við sjáum betur síðar, fæst svo

$$\frac{dz}{dt}(x(t),t) = \frac{\partial z}{\partial x}(x(t),t)\frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial z}{\partial t}(x(t),t)$$

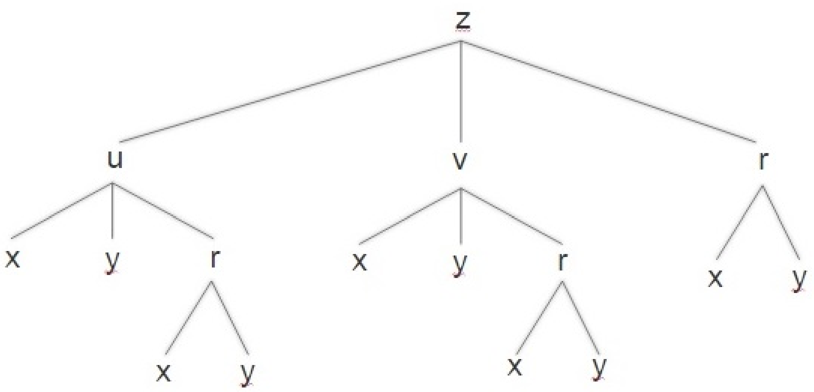
og niðurstaðan í almennt ekki sú sama og fyrir $\dfrac{\partial z}{\partial t}(x(t),t)$.
Ef $z = z(x,y)$, þar sem $x = x(t)$ og $y = y(t)$, er ekki augljóst hvað maður á við með $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, því í $z = z(x,y)$ er ekkert t. Hér á eftir munum við túlka $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ sem afleiðu

$f(t) = z(x(t), y(t))$ m.t.t. t, og þá er, því enginn munur er á $\dfrac{df}{dt}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ af því að f er bara fall af einni breytu sem við köllum t,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

■ **Dæmi 2.23** Notið Keðjuregluna til að reikna hlutafleiðuna $\frac{\partial z}{\partial x}$ fyrir fallið z, sem er fall af u, v og r, þar sem u og v eru föll af x, y og r og r er fall af x og y.
Lausn: Teiknum tré eins og á Mynd 2.4 þar sem sést hvernig breyturnar eru háðar hver annarri. Þá verður ljóst að hlutafleiðan er

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}.$$



Mynd 2.4: Hér er tré sem sýnir hvernig breyturnar eru háðar.

■

Skoðum nú almennu útgáfuna af Keðjureglunni fyrir föll $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ og $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Ef $\mathbf{f}$ er diffranlegt í $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{g}$ er diffranlegt í $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m$, þá er samskeytta fallið

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

diffranlegt í $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ og heildarafleiðan er

$$[D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})](\mathbf{a}) = [D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))][D\mathbf{f}(\mathbf{a})].$$

Ath. $D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))$ er $p \times m$-fylki og $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ er $m \times n$-fylki svo $[D\mathbf{g}(\mathbf{f}(a))][D\mathbf{f}(\mathbf{a})]$ er $p \times n$-fylki.

■ **Dæmi 2.24** Látum $\mathbf{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vera föll,

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+2 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Þá er Jacobi fylki $\mathbf{f}$ í t

$$D\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

og Jacobi fylki $\mathbf{g}$ í $\mathbf{x} = (x_1\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ er

$$D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Samskeytta vörpunin $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ er gefin með formúlunni

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(t) = \begin{pmatrix} g_1(f_1(t), f_2(t)) \\ g_2(f_1(t), f_2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t)f_2(t) \\ (f_1(t))^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2(t+2) \\ (t^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 + 2t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}.$$

Við reiknum nú Jacobi fylki $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ í $t \in \mathbb{R}$.

Lausn 1: Við búum til samskeytta fallið

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 2t^2 \\ t^4 \end{pmatrix},$$

diffrum það og fáum

$$[D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})](t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 4t \\ 4t^3 \end{pmatrix}.$$

Lausn 2: Við notum Keðjuregluna

$$\begin{aligned}
[D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})](t) &= D\mathbf{g}(\mathbf{f}(t))D\mathbf{f}(t) = D\mathbf{g}(f_1(t), f_2(t))D\mathbf{f}(t) \\
&= \begin{pmatrix} f_2(t) & f_1(t) \\ 2f_1(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t+2 & t^2 \\ 2t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3t^2 + 4t \\ 4t^3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 2.25** Látum $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vera föll,

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ \exp(x_3) \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 \cdot x_2) \\ x_1^2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ í $(\pi\ 1\ 0)^T \in \mathbb{R}^3$.

Lausn: Nú er

$$\mathbf{f}(\pi, 1, 0) = \begin{pmatrix} \pi \cdot 1 \cdot 0 \\ \exp(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D\mathbf{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_2\cdot x_3 & x_1\cdot x_3 & x_1\cdot x_2 \\ 0 & 0 & \exp(x_3) \end{pmatrix}$$

og þá

$$D\mathbf{f}(\pi,1,0) = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 & \pi\cdot 0 & \pi\cdot 1 \\ 0 & 0 & \exp(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$D\mathbf{g}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_2\cos(x_1\cdot x_2) & x_1\cos(x_1\cdot x_2) \\ 2x_1x_2^2 & 2x_1^2x_2 \end{pmatrix}.$$

Einnig er

$$D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\pi,1,0)) = D\mathbf{g}(0,1) = \begin{pmatrix} 1\cos(0\cdot 1) & 0\cos(0\cdot 1) \\ 2\cdot 0\cdot 1^2 & 2\cdot 0^2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heildarafleiða $\mathbf{g}\circ\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ í $(\pi\ 1\ 0)^T \in \mathbb{R}^3$ er þá

$$[D(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})](\pi,1,0) = [D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\pi,1,0))][D\mathbf{f}(\pi,1,0)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Æfingar 2.8

Æfing 2.8.1 Gefið er fallið $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ x+2z^2 \end{pmatrix}$$

og fallið $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{g}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Reiknið Jacobi-fylki $\mathbf{f}(x,y,z)$.
b) Reiknið Jacobi-fylki $\mathbf{g}(x_1,x_2)$.
c) Reiknið Jacobi-fylki fallsins $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$, ef það er hægt.
d) Reiknið Jacobi-fylki fallsins $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$, ef það er hægt.

■

Æfing 2.8.2 Látum $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ og $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vera föll gefin með formúlunum

$$\mathbf{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1\cdot x_2 \\ \sin(e^{x_1\cdot x_2}) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad g(x_1,x_2) = x_1\cdot x_2.$$

a) Reiknið heildarafleiðu $\mathbf{f}$ sem fall af $\mathbf{x}$.
b) Reiknið $D\mathbf{f}(3,2)$.
c) Reiknið bestu línulegu nálgun $\mathbf{y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ við fallið $\mathbf{f}$ í nágrenni $(3\ 2)^T$.
d) Reiknið heildarafleiðu g sem fall af $\mathbf{x}$.
e) Reiknið formúlu $(g\circ\mathbf{f})(\mathbf{x}) = g(\mathbf{f}(x_1,x_2))$.

f) Reiknið heildarafleiðu $g \circ \mathbf{f}$ sem fall af $\mathbf{x}$.
g) Reiknið heildarafleiðu $g \circ \mathbf{f}$ í $(3\ 2)^T$.
h) Reiknið bestu línulegu nálgun $y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ við fallið $g \circ \mathbf{f}$ í nágrenni $(3\ 2)^T$.

■

Æfing 2.8.3 Gefið er fall

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

og punktur $(1, 2)$ í planinu. Verkefnið er að:
a) Finna stigul fallsins (e. gradient) í punktinum.
b) Finna jöfnu snertiplans (e. tangent plane) við graf yfirborðsins $z = f(x, y)$ í punktinum.
c) Stika ferilinn sem myndast þegar planið $x = 1$ sker yfirborðið og ferilinn sem myndast þegar planið $y = 2$ sker yfirborðið $z = f(x, y)$.
d) Finna snertla við ferlana tvo úr (c)-lið í punktinum.
e) Finna stefnuafleiðu fallsins í stefnu vigursins $\mathbf{u} = (-1, 2)^T$ í punktinum.
f) Teikna þetta allt í Matlab og skoða frá öllum köntum.

■

2.9 Útgildi falla í $\mathbb{R}^n$

Ef $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er diffranlegt fall, þá segir maður að g hafi útgildi í $x \in \mathbb{R}$ ef $g'(x) = 0$. Einnig vitum við að öll staðbundin hágildi og staðbundin lággildi g eru í útgildum. Fyrir diffranleg föll $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ er þetta mjög svipað. Við tölum um að f hafi útgildi í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ef $Df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Til að greina hvort um hágildi, lággildi eða söðulpunkt er að ræða notum við eftirfarandi reglu:

Regla 2.9.1 Heildarafleiða f í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ er

$$Df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

og önnur afleiða f í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ er gefin með *Hesse-fylki* (e. Hessian matrix) f í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$H := \begin{pmatrix} \nabla \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \nabla \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Ef annarsstigs hlutafleiðurnar eru samfelld föll þá gildir að

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) \qquad \text{fyrir öll } i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

og Hesse-fylkið er þá samhverft, þ.e. $H^T = H$, og hefur því rauntölu eigingildi. Nú gildir fyrir öll $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ þ.a. f hefur útgildi í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, þ.e. $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:

(i) Ef Hesse-fylki f í $\mathbf{x}$ hefur öll eigingildi > 0, þá hefur f staðbundið lággildi í $\mathbf{x}$.

(ii) Ef Hesse-fylki f í $\mathbf{x}$ hefur öll eigingildi < 0, þá hefur f staðbundið hágildi í $\mathbf{x}$.

(iii) Ef Hesse-fylki f í $\mathbf{x}$ hefur a.m.k. eitt eigingildi < 0 og a.m.k. eitt eigingildi > 0, þá hefur f hvorki staðbundið hágildi né staðbundið lággildi í $\mathbf{x}$. Í þessu tilfelli er $\mathbf{x}$ kallað *söðulpunktur* (e. saddle point) f; sjá Mynd 2.5.

Athugið að ef ekkert af skilyrðunum í (i), (ii) og (iii) eru uppfyllt gefur Regla 2.9.1 okkur engar upplýsingar.

Aðeins nákvæmar um útgildi: Ef g hefur staðbundið hágildi í $x \in \mathbb{R}$, þ.e. $g(x) \geq g(y)$ fyrir öll $y \in \mathbb{R}$ þ.a. $|x - y| < \varepsilon$ fyrir eitthvert $\varepsilon > 0$, eða g hefur staðbundið lággildi í $x \in \mathbb{R}$, þ.e. $g(x) \leq g(y)$ fyrir öll $y \in \mathbb{R}$ þ.a. $|x - y| < \varepsilon$ fyrir eitthvert $\varepsilon > 0$, að þá er x nauðsynlega útgildi g. Nú vitum við líka, að ef $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hefur útgildi í $x \in \mathbb{R}$ og $g''(x) > 0$, að þá hefur g lággildi í x og ef $g''(x) < 0$ að þá hefur g hágildi í x. Þetta leiðir af því að

$$P_g(y) = g(x) + g'(x)(y - x) + \frac{1}{2}g''(x)(y - x)^2 = g(x) + \frac{1}{2}g''(x)(y - x)^2$$

er sú annarsstigs margliða sem lýsir fallinu g í nágrenni $x \in \mathbb{R}$ best.

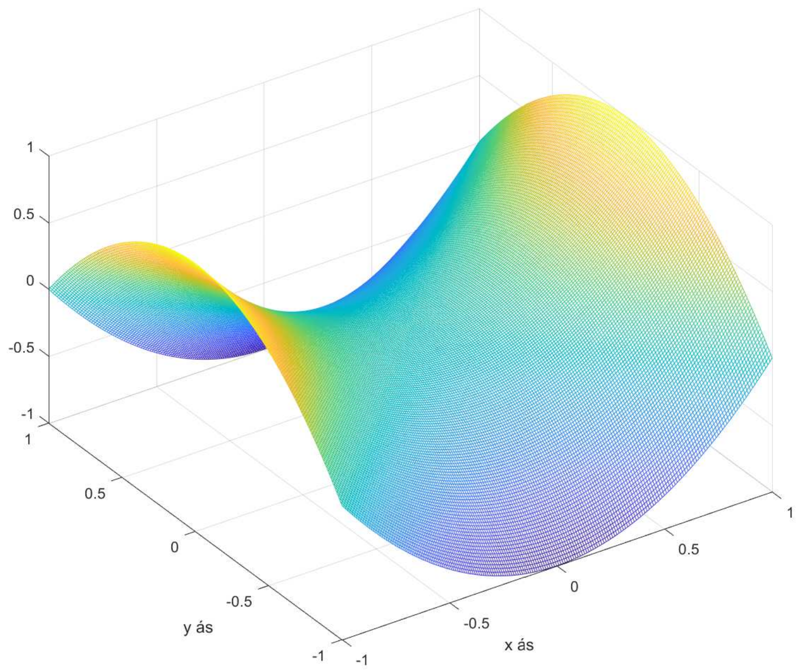
Þetta er mjög svipað fyrir föll $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Maður segir að f hafi útgildi í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ef $Df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ef f hefur staðbundið hágildi í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, þ.e. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$ fyrir öll $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ þ.a. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon$ fyrir eitthvert $\varepsilon > 0$, eða f hefur staðbundið lággildi í $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, þ.e. $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ fyrir öll $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ þ.a. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon$ fyrir eitthvert $\varepsilon > 0$, að þá er $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nauðsynlega útgildi. Önnur afleiða f í $\mathbf{x}$ er fylki en ekki tala, svokallað Hesse-fylki sem við táknum með $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sú annarsstigs margliða sem lýsir fallinu f best í nágrenni $\mathbf{x}$ er nú gefin með formúlunni

$$P_f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + [\nabla f(\mathbf{x})](\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T H(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

og maður þarf að skoða eigingildi H þess til þess að greina hvort um hágildi eða lággildi er að ræða. Ástæðan fyrir þessu er í grófum dráttum sú að ef $\lambda \in \mathbb{R}$ er eigingildi H þá getum við valið $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ þ.a. $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{x}$ sé eiginvektor H m.t.t. eigingildisins λ og þá er

$$P_f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^T H\mathbf{z} = \mathbf{z}^T(\lambda\mathbf{z}) = \lambda\mathbf{z}^T\mathbf{z} = \lambda\|\mathbf{z}\|^2.$$

Þar sem til er hornréttur grunnur fyrir $\mathbb{R}^n$ sem samanstendur af eiginvigrum H fæst að ef öll eigingildin eru > 0, þá er $\mathbf{x}$ lággildi, og ef öll eru < 0, þá er $\mathbf{x}$ hágildi. Einnig bætist nýr möguleiki við ef sum eigingildin eru < 0 og sum eru > 0, nefnilega sá að $\mathbf{x}$ sé svokallaður söðulpunktur.



Mynd 2.5: Graf fallsins $f(x,y) = x^2 - y^2$. Þetta fall hefur söðulpunkt í núlli; eftir x-ásnum hefur það lággildi og eftir y-ásnum hefur það hágildi.

■ **Dæmi 2.26** Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$. Þá er

$$\nabla f(x,y) = (2x,\ 2y)$$

svo f hefur útgildi í nákvæmlega einum vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, nefnilega $(x\ y)^T = (0\ 0)^T$. Hesse-fylki f í $(0\,0)^T$ er

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

og Hesse-fylkið hefur eitt eigingildi $\lambda = 2 > 0$. Þess vegna hefur f staðbundið lággildi í $(0\,0)^T$. ■

■ **Dæmi 2.27** Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Þá er

$$\nabla f(x,y) = (-2x,\ -2y)$$

svo f hefur útgildi í nákvæmlega einum vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, nefnilega $(x\ y)^T = (0\ 0)^T$. Hesse-fylki f í $(0\,0)^T$ er

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

og Hesse-fylkið hefur eitt eigingildi $\lambda = -2 < 0$. Þess vegna hefur f staðbundið hágildi í $(0\,0)^T$. ■

■ **Dæmi 2.28** Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. Þá er

$$\nabla f(x,y) = (2x,\ -2y)$$

svo f hefur útgildi í nákvæmlega einum vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, nefnilega $(x\ y)^T = (0\ 0)^T$. Hesse-fylki f í $(0\ 0)^T$ er

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

og Hesse-fylkið hefur tvö eigingildi $\lambda_1 = 2 > 0$ og $\lambda_2 = -2 < 0$. Þess vegna hefur f söðulpunkt í $(0\ 0)^T$, sjá Mynd 2.5. ■

Afhverju skildi núllpunkturinn í síðasta dæmi vera kallaður söðulpunktur (ath. söðull merkir hnakkur)?

■ **Dæmi 2.29** Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$. Finnið útgildi fallsins f og flokkið þau.
Launs: Nú er

$$\nabla f(x, y) = (6x^2 - 6y, \quad -6x + 6y)$$

svo f hefur útgildi nákvæmlega þá þegar $6x^2 = 6y$ og $6x = 6y$, þ.e. í nákvæmlega tveimur vektorum $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, nefnilega $(x\ y)^T = (0\ 0)^T$ og $(x\ y)^T = (1\ 1)^T$. Hesse-fylki f í $(x\ y)^T$ er

$$H = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nú er Hesse-fylkið í $(0\ 0)^T$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

sem hefur eigingildin $\lambda_1 = 3 + 3\sqrt{5} > 0$ og $\lambda_2 = 3 - 3\sqrt{5} < 0$. Þess vegna hefur f söðulpunkt í $(0\ 0)^T$.

Hesse-fylkið í $(1\ 1)^T$ er

$$H = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

sem hefur eigingildin $\lambda_1 = 9 + 3\sqrt{5} > 0$ og $\lambda_2 = 9 - 3\sqrt{5} > 0$. Þess vegna hefur f staðbundið lággildi í $(1\ 1)^T$. ■

■ **Dæmi 2.30** Rúmmál kassa með hliðarlengdir x, y og z er gefið með $V(x, y, z) = xyz$ og samanlagt flatarmál hliða hans er

$$S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

ef hann hefur ekki lok. Látið rúmmálið vera fast $V(x, y, z) = xyz = V$ og reiknið út minnsta flatarmálið.

Launs: Við byrjum á að sjá að við getum losað okkur við eina breytu, t.d. z, með því að nota að $xyz = V$, þ.e. $z = V/(xy)$. Þá er flatarmálið

$$f(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

Finnum útgildi f,

$$\nabla f(x, y) = \left(y - \frac{2V}{x^2}, \quad x - \frac{2V}{y^2}\right)$$

sem er núllvektorinn þþaa.

$$y = \frac{2V}{x^2} \quad \text{og} \quad x = \frac{2V}{y^2},$$

sem er uppfyllt ef

$$0 = 2V - 2V = x^2y - xy^2 = xy(x-y),$$

þ.e. $x = y$ verður að gilda, því við höfum ekki áhuga á $x = 0$ og $y = 0$. En þá er

$$x = y = \frac{2V}{x^2}$$

svo $x = \sqrt[3]{2V}$ og þá líka $y = \sqrt[3]{2V}$. Hesse-fylkið er

$$H = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$$

svo í $x = y = \sqrt[3]{2V}$ er þá

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eigingildin eru rætur

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - (-1)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

svo H hefur eigingildin $\lambda_1 = (4 + \sqrt{16-12})/2 = 3 > 0$ og $\lambda_2 = (4 - \sqrt{16-12})/2 = 1 > 0$. Því hefur f staðbundið lággildi í $(\sqrt[3]{2V}, \ \sqrt[3]{2V})^T$ og það er

$$f(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \sqrt[3]{2V} \cdot \sqrt[3]{2V} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} = (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})V^{\frac{2}{3}},$$

sem er þá minnsta flatarmálið fyrir rúmmálið V. ■

Æfingar 2.9

Æfing 2.9.1 Finnið öll útgildi fallsins

$$f(x,y) = x^3 - y^2 + 2xy$$

og greinið hvort um staðbundið hágildi, staðbundið lággildi eða söðulpunkt er að ræða. ■

Æfing 2.9.2 Skoðum fallið

$$f(x,y) = ye^{-(x^2+y^2)/2}.$$

a) Finnið snertiplan fallsins í punktinum $(-1,1)$. Skrifið planið á forminu

$$Ax + By + Cz = D.$$

b) Finnið tvo punkta (a, b) þar sem snertiplan fallsins er lárétt. ■

Æfing 2.9.3 Finnið öll útgildi fallsins

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$$

og greinið hvort um staðbundið hágildi, staðbundið lággildi eða söðulpunkt er að ræða. ■

Æfing 2.9.4 Sýnið að fallið

$$f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$$

hafi staðbundið hágildi í $(1, 1, 1)$. ■

Æfing 2.9.5 Hámarkið fallið $f(x, y, z) = xy^2z^3$ undir þeim skorðum að $x, y, z \geq 0$ og $x + y + z = 30$. ■

Æfing 2.9.6 Reiknið stærsta mögulega rúmmál kassa sem koma má inn í kúlu

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Ábending: Ef (x_0, y_0, z_0) eru einn hornpunktur kassans með stærsta rúmmálsins er ekki erfitt að sjá að rúmmálið er

$$V = (2x_0)(2y_0)(2z_0) = 8x_0y_0z_0$$

og að

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1.$$

Nú er hægt að losa sig við eina breytu og finna útgildi. ■

Æfing 2.9.7 Reiknið stærsta mögulega rúmmál kassa sem koma má inn í sporvöluna (e. ellipsoid)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Ábending: Ekki ósvipað síðasta dæmi, bara erfiðara. ■

2.10 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 2.3.1 Finnið eftirfarandi markgildi ef það er til, eða rökstyðjið að það sé ekki til

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} \frac{x^5y^3}{(x-1)^2+(y-1)^3}.$$

■ **Lausn** Látum

$$f(x,y) = \frac{x^5y^3}{(x-1)^2+(y-1)^3} \text{ og } g(y) = f(1,y) = \frac{y^3}{(y-1)^3}.$$

Nú er

$$\lim_{y\longrightarrow 1^-} \frac{y^3}{(y-1)^3} = -\infty$$

en

$$\lim_{y\longrightarrow 1^+} \frac{y^3}{(y-1)^3} = \infty$$

Sem gefur okkur tvö mismunandi markgildi, svo markgildið

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} \frac{x^5y^3}{(x-1)^2+(y-1)^3}$$

er ekki til.

Æfing 2.8.1 Gefið er fallið $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ x+2z^2 \end{pmatrix}$$

og fallið $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{g}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Reiknið Jacobi-fylki $\mathbf{f}(x,y,z)$.
b) Reiknið Jacobi-fylki $\mathbf{g}(x_1,x_2)$.
c) Reiknið Jacobi-fylki fallsins $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$, ef það er hægt.
d) Reiknið Jacobi-fylki fallsins $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$, ef það er hægt.

■ **Lausn** a)

$$D\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 1 & 0 & 4z \end{pmatrix}$$

b)

$$D\mathbf{g}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Við getum búið til samskeytta fallið

$$(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(xy, x+2z^2) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ 2(x+2z^2) \end{pmatrix}$$

og diffrað það svo

$$D\left[(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})\right](\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \\ 2 & 0 & 8z \end{pmatrix}.$$

Annar möguleiki er að nota Keðjuregluna beint og reikna

$$D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\ D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos(xy) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 1 & 0 & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \\ 2 & 0 & 8z \end{pmatrix}.$$

d) Ekki hægt, varpmengi $\mathbf{g}$ er $\mathbb{R}^2$ en formengi $\mathbf{f}$ er $\mathbb{R}^3$, svo samskeytta fallið $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ er ekki til og því ekki hægt að finna afleiðu þess.

Æfing 2.9.1 Finnið öll útgildi fallsins

$$f(x,y) = x^3 - y^2 + 2xy$$

og greinið hvort um staðbundið hágildi, staðbundið lággildi eða söðulpunkt er að ræða.

■ **Lausn** Byrjum á að diffra f til að finna stigul fallsins $\nabla f(x,y) = (3x^2+2y,\ \ -2y+2x)$. Nú gefur $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ okkur tvær jöfnur:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y &= 0 \\ -2y + 2x &= 0 \end{aligned}$$

Seinni jafnan gefur okkur $x = y$ og sú fyrra þá að $x = y = 0$ eða $x = y = -\frac{2}{3}$. Við höfum því 2 mögulega útgildispunkta. Við reiknum nú Hesse-fylkið.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Eigingildi fylkisins

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

eru rætur

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2) - (-2)^2 = \lambda^2 + 2\lambda - 4$$

sem eru

$$\lambda_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4\cdot(-4)}}{2} = -1 + \sqrt{5} > 0$$

og

$$\lambda_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4\cdot(-4)}}{2} = -1 - \sqrt{5} < 0.$$

Þar sem eigingildin hafa sitthvort formerkið er $(0,0)$ söðulpunktur.

Fylkið

$$H(-2/3,-2/3)=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

eru rætur

$$\begin{vmatrix}\lambda+4 & -2\\ -2 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda+2)-(-2)^2=\lambda^2+6\lambda+4$$

sem eru

$$\lambda_1=\frac{-6+\sqrt{6^2-4\cdot 4}}{2}=-3+\sqrt{5}<0$$

og

$$\lambda_2=\frac{-6-\sqrt{6^2-4\cdot 4}}{2}=-3-\sqrt{5}<0.$$

Þar sem bæði eigingildin eru neikvæð er $(-2/3,-2/3)$ staðbundið hágildi.

Æfing 2.9.2 Skoðum fallið

$$f(x,y)=ye^{-(x^2+y^2)/2}.$$

a) Finnið snertiplan fallsins í punktinum $(-1,1)$. Skrifið planið á forminu

$$Ax+By+Cz=D.$$

b) Finnið tvo punkta (a,b) þar sem snertiplan fallsins er lárétt.

■ **Lausn** a) Fallgildið í punktinum er $f(-1,1)=e^{-1}$. Finnum stigul fallsins

$$\nabla f(x,y)=\left(-xye^{-(x^2+y^2)/2},\quad e^{-(x^2+y^2)/2}(1-y^2)\right)$$

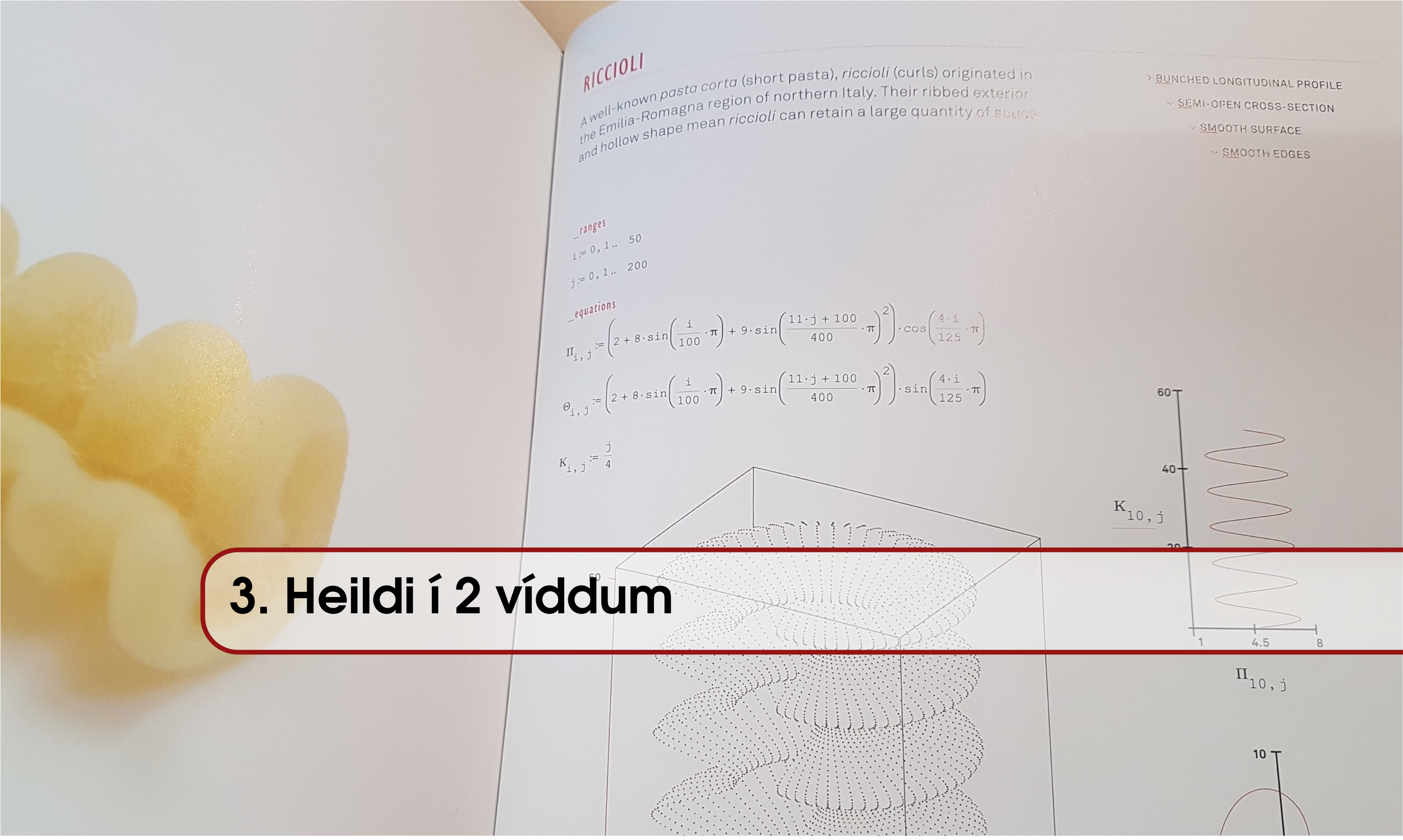
sem í punktinum $(-1,1)$ er

$$\nabla f(-1,1)=\begin{pmatrix}e^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

Jafna snertiplansins er þá

$$z=e^{-1}+e^{-1}(x+1)\quad \text{sem má rita sem}\quad x-ez=-2.$$

b) Snertiplanið er lárétt fyrir þau (x,y) þar sem stigull fallsins er $=\mathbf{0}$. Við sjáum að $e^{-(x^2+y^2)/2}(1-y^2)=0$ þegar $y=\pm 1$ og þá er $-xye^{-(x^2+y^2)/2}=0$ aðeins þegar $x=0$. Við fáum því punktana $(0,1)$ og $(0,-1)$.



3. Heildi í 2 víddum

Í þessum kafla skoðum við heildi í tveimur víddum, einnig kölluð tvöföld heildi, bæði í kartesískum hnitum (xy-hnitum) og í pólhnitum ($r\theta$-hnitum). Í næsta kafla skoðum við svo heildi í þremur víddum eða þreföld heildi. Þau eru oft sett upp í kartesískum hnitum (xyz-hnitum), í sívalnings hnitum ($r\theta z$-hnitum) eða í kúluhnitum ($\rho\phi\theta$-hnitum). Ný hnitakerfi eru yfirleitt notuð til þess að nýta sér ákveðnar samhverfur í verkefninu sem á að leysa og geta einfaldað alla reikninga mjög mikið.

3.1 Heildi í 2-víddum

Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vera samfellt fall og látum $a < b$ og $c < d$ vera rauntölur og skilgreinum svæðið

$$\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d] := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b \ \text{ og } \ c \leq y \leq d\}.$$

Heildi f yfir $\mathcal{D}$, oft ritað

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \quad \text{eða} \quad \int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA,$$

er nú skilgreint á eftirfarandi hátt: Við byrjum á að skilgreina fallið $F : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (*)$$

fyrir sérhvert $y \in [c,d]$ (ath. í $(*)$ er y fasti). Heildið af f yfir $\mathcal{D}$ er síðan skilgreint sem rauntalan

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Nú ætti að vera ljóst af hverju líka er talað um tvöföld heildi eða ítrekuð heildi.

■ **Dæmi 3.1** Heildum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3$, yfir $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 2]$. Athugum að við búumst við að fá rúmmál kassa með hliðarlengdir 1, 2 og 3 og því ættum við að fá niðurstöðuna $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Lausn: Höfum

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx = \int_0^1 3\, dx = \Big[3x\Big]_{x=0}^{x=1} = 3$$

fyrir öll $y \in \mathbb{R}$ og þá

$$\int_0^2 F(y)\, dy = \int_0^2 3\, dy = \Big[3y\Big]_{y=0}^{y=2} = 6$$

eins og við bjuggumst við. ■

■ **Dæmi 3.2** Heildum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \sin(y)$, yfir $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, \pi]$.

Lausn: Nú er

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx = \int_0^1 x \sin(y)\, dx = \Big[\frac{1}{2} x^2 \sin(y)\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \sin(y)$$

fyrir öll $y \in \mathbb{R}$ og þá

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dA = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin(y) dy = \Big[\frac{-1}{2} \cos(y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} = 1.$$

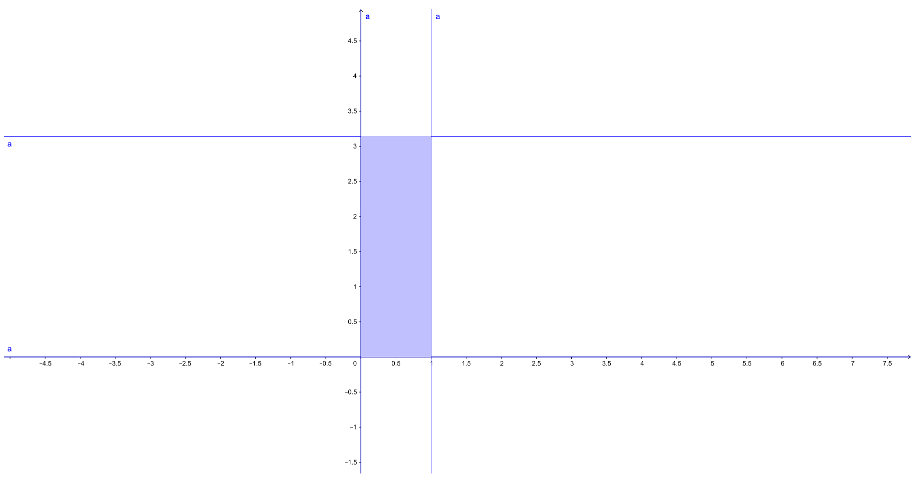
Prófum nú að skilgreina fallið $G : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_0^\pi x \sin(y)\, dy = \Big[-x \cos(y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} = 2x.$$

Þá er

$$\int_0^1 G(x)\, dx = \int_0^1 2x\, dx = \Big[x^2\Big]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

■



Mynd 3.1: Í Dæmi 3.2 heildum við yfir svæðið $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, \pi]$ sem er litaða svæðið á myndinni.

Það að röðin á heildunum í síðasta dæmi skipti ekki máli er ekki tilviljun.

Regla 3.1.1 Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vera samfellt fall og skilgreinum svæðið $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Þá er

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Reglan segir okkur með öðrum orðum, að það skiptir ekki máli í hvaða röð við heildum.

Ekki alveg augljós ástæða fyrir því að röð heildanna skiptir ekki máli er að fyrir fall $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ þ.a.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x,y) = f(x,y)$$

gildir líka

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y).$$

Út frá þessu fæst svo

$$\begin{aligned}
\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x,y)\,dx \right) dy \\
&= \int_c^d \left(\left[\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \right]_{x=a}^{x=b} \right) dy \\
&= \int_c^d \left(\frac{\partial H}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial H}{\partial y}(a,y) \right) dy \\
&= \Big[H(b,y) - H(a,y) \Big]_{y=c}^{y=d} \\
&= H(b,d) - H(a,d) - H(b,c) + H(a,c)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx &= \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\left[\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \right]_{y=c}^{y=d} \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial H}{\partial x}(x,d) - \frac{\partial H}{\partial x}(x,c) \right) dx \\
&= \Big[H(x,d) - H(x,c) \Big]_{x=a}^{x=b} \\
&= H(b,d) - H(b,c) - H(a,d) + H(a,c)
\end{aligned}$$

og við sjáum að

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Sem sagt erfist það að röðin á diffruninni skipti ekki máli yfir á heildið.

Hvernig förum við að ef við viljum heilda fall $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ yfir hlutmengi $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ sem er ekki ferhyrningur? Almennt er það ekki auðvelt, en ef hægt er að lýsa rönd $\mathcal{D}$ með grafi falla $y = c(x)$ og $y = d(x)$ af x, eða falla $x = a(y)$ og $x = b(y)$, að þá er það oft ekki heldur mjög erfitt. Við sýnum þetta með dæmum.

■ **Dæmi 3.3** Látum $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $c(x) = -x^2$ og $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x) = x^2$ og skilgreinum

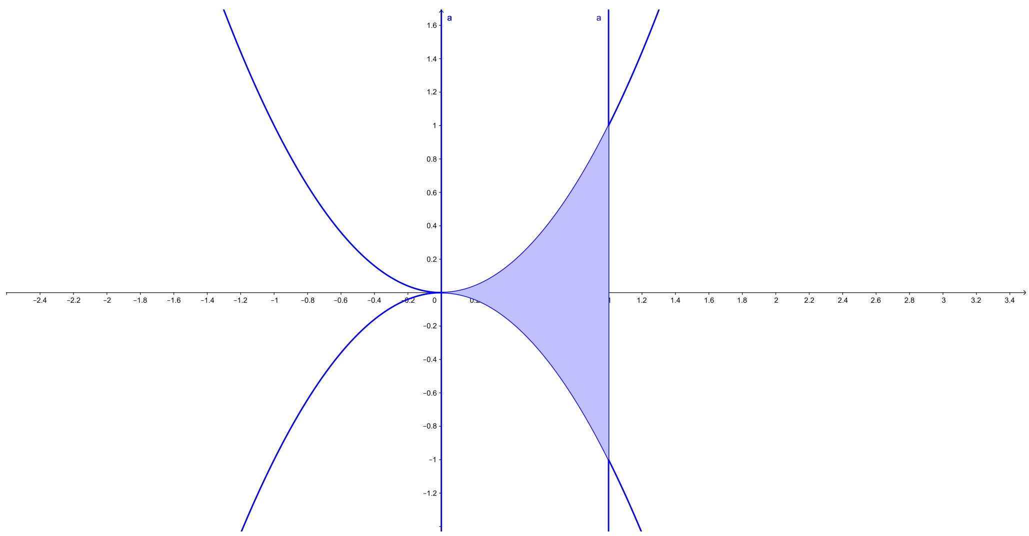
$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1 \ \text{ og } \ c(x) \leq y \leq d(x) \ \}.$$

Heildum fallið $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2$, yfir $\mathcal{D}$.

Lausn: Nú gildir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA &= \int_0^1 \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} xy^2 dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=-x^2}^{y=x^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} [x(x^2)^3 - x(-x^2)^3] \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3} x^7 dx \\
&= \left[\frac{2}{3 \cdot 8} x^8 \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

■



Mynd 3.2: Við sjáum hér svæðið $\mathcal{D}$ úr Dæmi 3.3.

■ **Dæmi 3.4** Látum $c, d : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $c(x) = 0$ og $d(x) = \sqrt{x}$ og skilgreinum

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 \le x \le 2 \;\; \textbf{og} \;\; c(x) \le y \le d(x) \; \}.$$

Heildum fallið $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2$, yfir $\mathcal{D}$.

Lausn 1: Nú gildir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA &= \int_0^2 \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y^2 dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_{x=0}^{x=2} \\
&= \frac{2}{15} 2^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

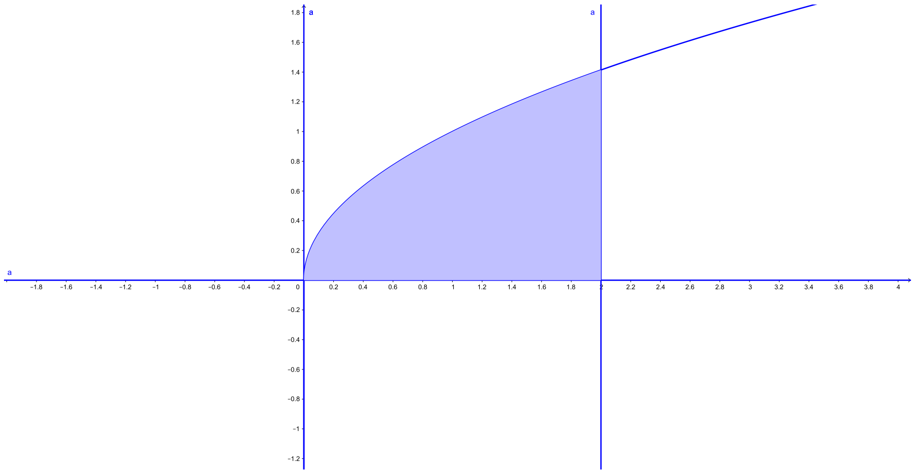
Lausn 2: Önnur leið til þess að lýsa menginu $\mathcal{D}$ er að setja $a(y) = y^2$ og $b(y) = 2$ og þá er

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; a(y) \le x \le b(y) \quad \textbf{og} \quad 0 \le y \le \sqrt{2} \}.$$

Við reiknum nú heildi f yfir $\mathcal{D}$ með því að heilda í annarri röð en áðan:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{y^2}^{2} y^2 dx \right) dy \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[xy^2 \right]_{x=y^2}^{x=2} \right) dy \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(2y^2 - y^4 \right) dy \\
&= \left[\frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{3} 2\sqrt{2} - \frac{1}{5} 4\sqrt{2} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Sem sagt sama niðurstaða eins og það á að vera. ■



Mynd 3.3: Við sjáum hér svæðið $\mathcal{D}$ úr Dæmi 3.4.

■ **Dæmi 3.5** Reiknum ítrekaða heildið

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^x (xy+y^2)dy\right)dx &= \int_0^1\left(\left[\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=x}\right)dx\\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{2}xx^2+\frac{1}{3}x^3\right)dx\\ &= \int_0^1 \frac{5}{6}x^3dx\\ &= \left[\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

Hvað vorum við að reikna? Þ.e. hvaða fall vorum við að heilda og yfir hvaða svæði? ■

■ **Dæmi 3.6** Reiknum ítrekaða heildið

$$I=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dy\right)dx.$$

Lausn: Það er mjög erfitt (ómögulegt) að reikna I með formúlunni beint, en með því að athuga að við erum að heilda fallið $f(x,y)=e^{y^3}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D}=\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le 1 \quad \text{og} \quad \sqrt{x}\le y\le 1\}$$

sem við getum allt eins lýst með

$$\mathcal{D}=\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\le 1 \quad \text{og} \quad 0\le x\le y^2\},$$

að þá sjáum við að

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\mathcal{D}} e^{y^3}\, dA \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{y^3}\, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[x e^{y^3} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy \\
&= \int_0^1 y^2 e^{y^3}\, dy \\
&= \left[\frac{1}{3} e^{y^3} \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{e-1}{3}.
\end{aligned}
$$

■

3.1.1 Tvöföld heildi með smá kænsku

Skoðum nokkur dæmi þar sem við getum beitt smá kænsku til að sleppa við mikla útreikninga í tvöföldum heildum. Við getum nýtt okkur að við þekkjum rúmmál ákveðinna hluta og einnig getur verið mjög gagnlegt að nýta sér það að sum föll eru oddstæð eða jafnstæð. Við skulum skoða dæmi.

■ **Dæmi 3.7** Reiknum

$$\iint_{\mathcal{D}} 3\, dA$$

þar sem $\mathcal{D} = [4,6] \times [2,9]$.
Lausn:

$$\iint_{\mathcal{D}} 3\, dA = 3 \iint_{\mathcal{D}} dA = 3 \cdot [\text{ flatarmál } \mathcal{D}] = 3 \cdot (6-4) \cdot (9-2) = 42.$$

Við erum s.s. hér að finna flatarmál kassa með hliðarlengdir 2 og 7 og hæð 3. ■

Eins og í þessu dæmi er heildið sem við erum að reikna stundum ekkert annað en flatarmál hlutar sem við þekkjum. Við notuðum að þegar við heildum 1 yfir svæði $\mathcal{D}$ fáum við flatarmál svæðisins.

ATH Þegar við heildum 1 yfir svæðið $\mathcal{D}$ fáum við flatarmál svæðisins $\mathcal{D}$, s.s. er

$$\iint_{\mathcal{D}} dA = [\text{flatarmál svæðisins } \mathcal{D}].$$

Það er auðvelt að sjá að fyrir ferhyrning $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ er

$$\iint_{\mathcal{D}} dA = [\text{flatarmál svæðisins } \mathcal{D}],$$

út frá því að $H(x,y) = xy$ er fall þ.a. $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$. Með því sem við sáum áðan er þá

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,dA = \iint_{\mathcal{D}} 1\,dA$$
$$= H(b,d) - H(b,c) - H(a,d) + H(a,c)$$
$$= bd - bc - ad + ac$$
$$= (b-a)\cdot(d-c),$$

sem er einmitt flatarmál ferhyrningsins $[a,b]\times[c,d]$, þ.e. svæðisins $\mathcal{D}$.

Í næsta dæmi sjáum við hvert heildið er með því að sjá hvernig hlut við erum að heilda yfir.

■ **Dæmi 3.8**

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dA = [\text{ rúmmál hálfrar kúlu með geisla 1 }]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}r^3\Big|_{r=1}$$
$$= \frac{2\pi}{3}.$$

■

Ef við erum með oddstæð eða jafnstæð föll og svæðið $\mathcal{D}$ er samhverft er oft hægt að einfalda heildið töluvert.

■ **Dæmi 3.9** Við reiknum

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\sin(x) + y^3 + 4\right)\,dA = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 4\,dA = 4\pi.$$

Hér nýttum við okkur að fallið $f(x,y) = \sin(x)$ er oddstætt um $x = 0$ því $f(-x,y) = -f(x,y)$ og svæðið $x^2+y^2 \leq 1$ er samhverft um $x = 0$ svo við fáum

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sin(x)\,dA = 0.$$

Að auki nýttum við okkur að fallið $g(x,y) = y^3$ er oddstætt um $y = 0$ því $g(x,-y) = -g(x,y)$ og svæðið $x^2+y^2 \leq 1$ er samhverft um $y = 0$ svo við fáum að

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} y^3\,dA = 0.$$

Eftir stendur þá

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} 4\,dA = 4\iint_{x^2+y^2\leq 1} dA = 4\cdot[\text{ flatarmál hringsskífu með geisla 1}] = 4\pi.$$

■

Til að sjá betur fyrir sér hvað er að gerast í Dæmi 3.9 er gott að teikna föllin og svæðið sem heildað er yfir, t.d. í Matlab. Til þess er hægt að nota eftirfarandi keyrsluskrá. Athugið að ef skráin er keyrð opnast þrjár myndir og það borgar sig að snúa þeim til og frá til þess að átta sig betur á þeim.

■ **Keyrsluskrá 1**

```
% heilda sin(x) yfir hring
hold on
t=0:0.01:2*pi;
plot(cos(t),sin(t),'b') % afmarka svæðið sem heilda á yfir
[x y]= meshgrid(-1:0.01:1);
h1=surf(x,y,sin(x)); % teikna fallið sem á að heilda
set(h1,'FaceColor','magenta','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')
xlabel('x-ás'), ylabel('y-ás'), zlabel('z-ás')
title('z=sin(x) yfir hring')


% heilda y^3 yfir hring
figure(2)
hold on
t=0:0.01:2*pi;
plot(cos(t),sin(t),'b') % afmarka svæðið sem heilda á yfir
xlabel('x-ás'), ylabel('y-ás'), zlabel('z-ás')
title('z=y^3 yfir hring')
h2=surf(x,y,y.^3); % teikna fallið sem á að heilda
set(h2,'FaceColor','red','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')

% heilda 4 yfir hring, sem gefur sívalning
figure(3)
z4=0:0.1:4;
[z4,t]=meshgrid(z4,t);
h3=surf(cos(t),sin(t),z4);
xlabel('x-ás'), ylabel('y-ás'), zlabel('z-ás')
title('Sívalingur')
set(h3,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')
```

3.1.2 Meðalfallgildi

Við skilgreinum töluna

$$\overline{f} := \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$$

og köllum $\overline{f}$ *meðalgildi* fallsins $f(x,y)$ á svæðinu $\mathcal{D}$. Hér er talan A flatarmál svæðisins $\mathcal{D}$, sem má reikna með $A := \iint_{\mathcal{D}} dA$.

■ **Dæmi 3.10** Til að finna x-hnit massamiðju $\mathcal{D}$ reiknum við

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} x\;dA.$$

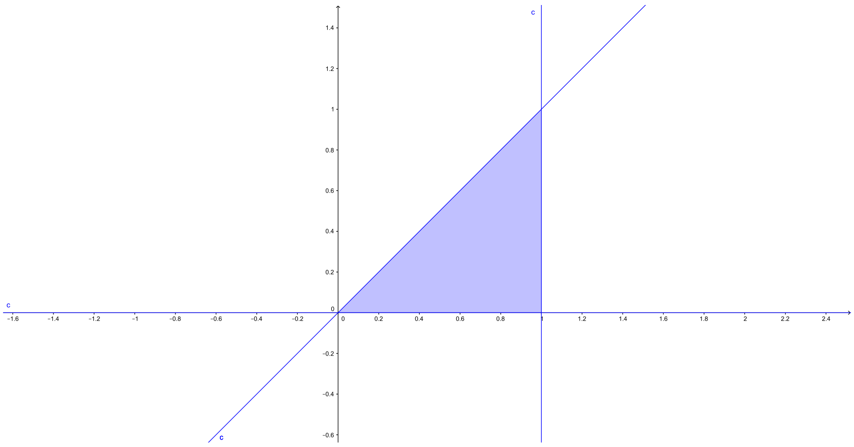
Látum nú

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2 \le x \le 3 \;\text{ og }\; 1 \le y \le 4\,\}.$$

Reiknið massamiðju svæðisins $\mathcal{D}$. **Lausn:** Við sjáum að A er flatarmál rétthyrnds fernings með hliðarlengdir 1 og 3, þ.e. $A = 3$, og við reiknum

$$\overline{x} = \frac{1}{3}\int_1^4\int_2^3 x\;dx\;dy = \frac{1}{3}\int_1^4 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=2}^{x=3} dy = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{5}{2}dy = \frac{5}{2}.$$

■



Mynd 3.4: Þríhyrningurinn í Dæmi 3.11 afmarkast af línunum $y = x$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 1$. Við sjáum á myndinni að þríhyrningurinn hefur flatarmálið $1/2$.

■ **Dæmi 3.11** Finnið meðalgildi fallsins $f(x, y) = x^2 + y^2$ yfir þríhyrning sem hefur hornpunktana $(0, 0)$, $(1, 0)$ og $(1, 1)$.
Lausn:
Við reiknum

$$
\begin{aligned}
\overline{f} &= \frac{1}{1/2} \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\, dA \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) dy\, dx \\
&= 2 \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= 2 \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx \\
&= 2 \int_0^1 \frac{4x^3}{3}\, dx \\
&= \frac{8}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

■

Æfingar 3.1

Æfing 3.1.1 Teiknið upp mynd af svæðunum:

a)
$$\mathcal{D}_1 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{og } x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \leq 0\}$$

b)
$$\mathcal{D}_2 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5\}$$

c)
$$\mathcal{D}_3 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2 \quad \text{og } 0 \leq x \leq 1\}$$

d)
$$\mathcal{D}_4 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x) \leq y \leq g(x) \quad \text{og } a \leq x \leq b\}.$$

e) Finnið að auki föll $f(x)$ og $g(x)$ og fasta a og b þannig að $\mathcal{D}_4$ lýsi svæðinu innan þríhyrnings með hornpunkta $(0, 0)$, $(1, 1)$ og $(1, 3)$. ■

Æfing 3.1.2 Reiknið
$$\iint_{\mathcal{D}} 4x^3 e^{y^3}\, dA,$$
þar sem
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 \leq y \leq 1 \;\; \text{og} \; -1 \leq x \leq 0\}.$$
Athugið að heildin sem upp koma hér á að reikna án þess að nota reiknivél. ■

Æfing 3.1.3 Reiknið
$$\int_{\mathcal{D}} \left(3 - \pi \sin(x) + y^2\right) dA$$
þar sem $\mathcal{D}$ er ferhyrningslaga svæðið sem hefur hornpunktana $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ og $(0, -2)$. ■

Æfing 3.1.4 Gefið er mengið
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 \leq y \leq x^2 \text{ og } \; 0 \leq x \leq 2\}.$$
Setjið rétt mörk á seinni tvö heildin hér fyrir neðan, þar sem heildunarröðinni hefur verið breytt.
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dA = \int \int f(x, y)\, dy\, dx = \int \int f(x, y)\, dx\, dy.$$

■

Æfing 3.1.5 Flatartregðuvægi (e. moment of inertia) svæðisins $\mathcal{D}$ m.t.t. y er skilgreint sem

$$I_y = \int_{\mathcal{D}} x^2 dA.$$

Reiknið I_y fyrir svæðið $\mathcal{D}$, sem er sá hluti svæðisins

$$y \leq 2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

sem liggur í 1. fjórðungi. ■

Æfing 3.1.6 Reiknið meðalfallgildi fallsins $f(x, y) = x^2 + y^2$ yfir svæðið $\mathcal{D}$, sem er þríhyrningur með hornpunkta í $(0, 0)$, $(0, a)$ og $(a, 0)$, þar sem $a > 0$ er fasti. ■

Æfing 3.1.7 Reiknið heildið

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}(1 + y^2)\, dx\, dy.$$

Ábending: Hér getur verið góð hugmynd að breyta mörkunum þannig að heildað er fyrst m.t.t. y. ■

3.2 Óeiginleg heildi í 2-víddum

Rifjum upp hvernig við reiknum óeiginleg heildi í einni vídd eins og

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+} \left[2\sqrt{x}\right]_{x=c}^{x=1} = \lim_{c\to 0+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

eða

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to +\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=c} = \lim_{c\to +\infty} \left(-\frac{1}{c} - (-1)\right) = 1.$$

Við getum líka reiknað tvöföld heildi

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dA$$

með ítrekun, þar sem óeiginleg heildi koma fram í ítrekuðu heildunum, ef $f(x, y) \geq 0$ fyrir öll $(x\ y)^T$ á heildunarsvæðinu. Ef f tekur bæði jákvæð og neikvæð gildi verður

$$\int_{\mathcal{D}} |f(x, y)| dA < +\infty$$

að gilda, ef við ætlum að nota ítrekun, og maður talar um *alsamleitin heildi*. Við skoðum nokkur dæmi.

■ **Dæmi 3.12** Heildum $f(x,y) = e^{-x^2}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \;\; \textbf{og} \;\; -x \le y \le x\}.$$

Lausn: Nú er $f(x,y) \ge 0$ fyrir öll $(x\ y)^T \in \mathcal{D}$ svo við getum notað ítrekaða heildun:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-x}^{x} e^{-x^2} dy\right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left[ye^{-x^2}\right]_{y=-x}^{y=x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx \\
&= \lim_{c\to+\infty} \int_0^c 2xe^{-x^2} dx \\
&= \lim_{c\to+\infty} \left[-e^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=c} \\
&= \lim_{c\to+\infty} \left(-e^{-c^2} - (-1)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 3.13** Heildum $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ yfir takmarkaða svæðið í planinu sem lokast á milli $y = x$ og $y = x^2$.

Lausn: Með

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1 \;\; \textbf{og} \;\; x^2 \le y \le x\}$$

sjáum við að $f(x,y) \ge 0$ á heildunarsvæðinu og við reiknum

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \frac{dA}{xy} &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\int_{x^2}^{x} \frac{1}{y}\, dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x} \Big[\ln(y)\Big]_{y=x^2}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\ln(x) - \ln(x^2)\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\ln(x) - 2\ln(x)\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{-\ln(x)}{x} dx \\
&= -\int_{+\infty}^0 t\; dt \\
&= -\lim_{c\to+\infty} \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{t=c}^{t=0} \\
&= -(0 - \infty) \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

þar sem við notuðum breytuskiptin $t = -\ln(x)$, með $dt = -dx/x$, $t(1) = 0$ og $t(0) = -(-\infty) = +\infty$. ■

■ **Dæmi 3.14** Heildum $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 1 \;\; \textbf{og} \quad 0 \le y \le x^2\}.$$

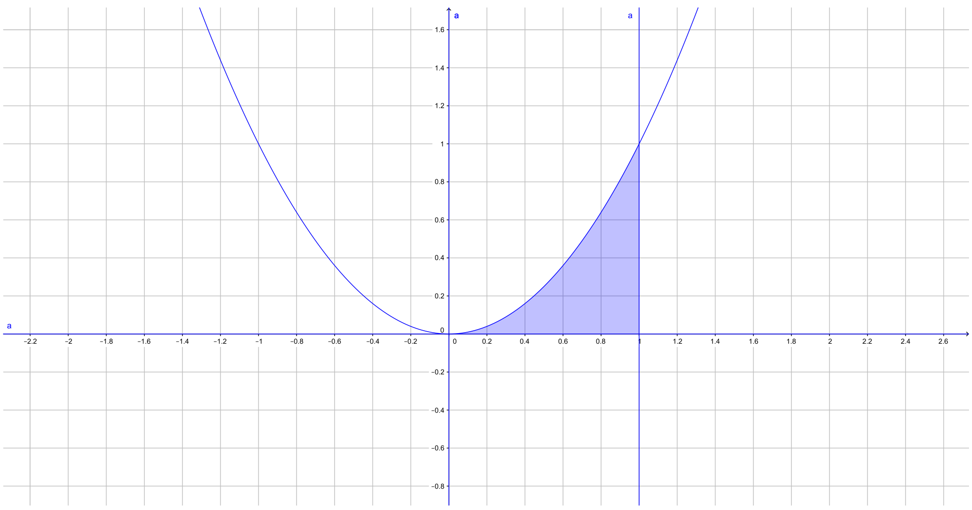
Lausn: Athugið að heildið

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x+y)^2}\, dA$$

er óeiginlegt því $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$. Við reiknum nú

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x+y)^2} dA &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{-1+x+1}{x(x+1)} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\
&= \Big[\ln(1+x) \Big]_{x=0}^{x=1} \\
&= \ln(2).
\end{aligned}$$

■



Mynd 3.5: Svæðið $\mathcal{D}$ í Dæmi 3.14.

Athugasemd: Takið eftir hvernig öll vandamál í heildinu í síðasta dæmi hurfu í miðjum reikningunum því

$$-\frac{1}{x+x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x+1}{x(x+1)}=\frac{1}{1+x}$$

og hægri hliðin er samfellt fall af x í $x=0$. Ef við viljum reikna heildið í dæminu stranglega rétt, þá eru reikningarnir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x+y)^2}dA &= \lim_{\substack{a\to 0+\\ b\to 0+}} \int_b^1 \left(\int_a^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\right)dx \\
&= \lim_{\substack{a\to 0+\\ b\to 0+}} \int_b^1 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{y=a}^{y=x^2} dx \\
&= \lim_{\substack{a\to 0+\\ b\to 0+}} \int_b^1 \left(-\frac{1}{x+x^2}+\frac{1}{x+a}\right)dx \\
&= \lim_{\substack{a\to 0+\\ b\to 0+}} \int_b^1 \frac{-x-a+x+x^2}{(x+x^2)(x+a)}\,dx \\
&= \lim_{\substack{a\to 0+\\ b\to 0+}} \int_b^1 \frac{(x-a)(x+a)}{x(1+x)(x+a)}\,dx \\
&= \lim_{\substack{a\to 0+\\ b\to 0+}} \int_b^1 \frac{x-a}{x(1+x)}\,dx \\
&= \lim_{b\to 0+} \int_b^1 \frac{x}{x(1+x)}\,dx \\
&= \lim_{b\to 0+} \int_b^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\
&= \Big[\ln(1+x)\Big]_{x=0}^{x=1} \\
&= \ln(2).
\end{aligned}$$

Æfingar 3.2

Æfing 3.2.1 Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} \frac{1}{x^2}\,dA,$$

þar sem $\mathcal{T}$ er (ótakmarkaða) svæðið $x\le y\le x+1$ og $x\ge 1$. Teiknið einnig mynd af svæðinu.

■

Æfing 3.2.2 Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} e^{-x-y} dA,$$

þar sem $\mathcal{T}$ er (ótakmarkaða) svæðið $x \geq 0$ og $y \geq 0$.
■

Æfing 3.2.3 Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} \frac{1}{x\sqrt{y}} dA,$$

þar sem $\mathcal{T}$er þvíhyrningur með hornpunkta $(0,0)$, $(1,1)$ og $(1,2)$.
■

3.3 2-víð heildi í pólhnitum

Við viljum reikna rúmmál hálfkúlu í $\mathbb{R}^3$ með geisla $R > 0$. Kúla í $\mathbb{R}^3$ með geisla $R > 0$ og miðju í $(0,0,0)$ er mengi allra punkta $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sem uppfylla jöfnuna

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

og hálfkúlu má þá lýsa með því að krefjast að auki að $z \geq 0$.

Rúmmálið getum við reiknað með því að heilda fallið

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{yfir mengið} \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

og ítrekaða heildið sem kemur upp er

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y) dA = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx \right) dy$$

og við erum í vandræðum, því þetta heildi er illviðráðanlegt.

Stundum, sérstaklega ef vandamálið sem á að leysa hefur einhverja samhverfu, er betra að skipta um hnitakerfi, þ.e. lýsa staðsetningu punkta í planinu á annan hátt en með því að gefa upp x- og y-hnit þeirra.
Við vitum að þegar við vinnum með tvinntölur er stundum sniðugt að rita $w = x + iy$ á pólformi $w = re^{i\theta}$, t.d. af því að það er miklu auðveldara að leysa jöfnur af gerðinni $z^n = w$ ef w er á pólformi. Þegar við settum tvinntölu $w = x + iy$ á pólform þá notuðum við jöfnurnar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \left(\text{eða} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \right)$$

til þess að ákvarða r og θ. Í hnitakerfisskiptum fyrir heildun (og marga aðra hluti) er mun gagnlegra að nota formúlurnar $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ og það er líka yfirleitt þægilegra.

Ef við lýsum staðsetningu punkts P í planinu með því að gefa upp x- og y-hnit hans, þá erum við að nota **kartesísk hnit** (e. Cartesian coordinates).

Ef við lýsum staðsetningu punkts P í planinu með því að gefa upp fjarlægð hans r frá núllpunkti og hornið θ sem stöðuvektor hans myndar við pósitíva x-ásinn, þá erum við að nota **pólhnit** (e. polar coordinates).

Sambandið á milli kartesískra hnita og pólhnita er

$$x = r\cos\theta \quad \text{og} \quad y = r\sin\theta$$

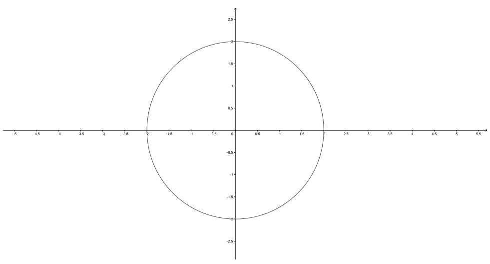
þar sem $\theta \in [0, 2\pi[$.

Kartesískt hnitakerfi er nefnt eftir franska heims- og stærðfræðingnum René Descart (f. 1596, d. 1650), sem varð að Renatus Cartesius á Latínu.

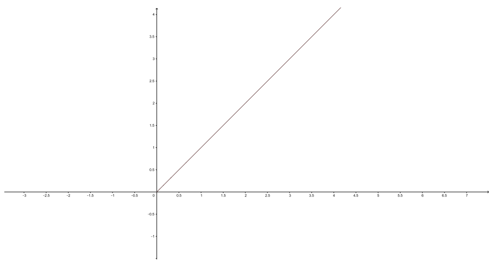
■ **Dæmi 3.15** Skoðum nokkra ferla og svæði í kartesískum hnitum og pólhnitum:

a) Hvernig lítur línan sem gefin er með $r = 2$ í pólhnitum út í kartesískum hnitum?
b) Hvernig lítur línan sem gefin er með $\theta = \pi/4$ í pólhnitum út í kartesískum hnitum?
c) Hvernig lítur svæðið sem gefið er með $r \le 2$ og $0 \le \theta \le \pi/2$ í pólhnitum út í kartesískum hnitum?
d) Hvernig lítur svæðið sem gefið er með $x^2 + y^2 \le 4$ í kartesískum hnitum út í pólhnitum?

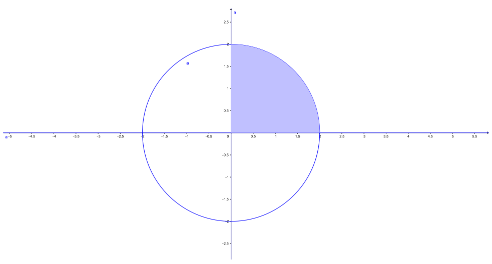
Lausn:



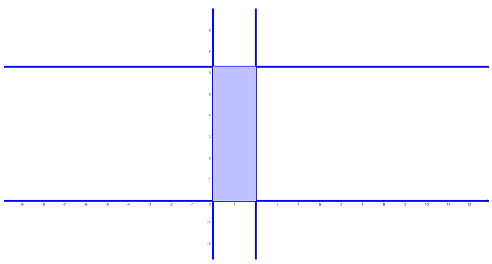
(a) Línan $r = 2$ í pólhnitum teiknuð í xy-planið.



(b) Línan $\theta = \pi/4$ í pólhnitum teiknuð í xy-planið.



(c) Svæðið $0 \le \theta \le \pi/2$ og $r \le 2$ í pólhnitum teiknað í xy-planið.



(d) Svæðið $x^2 + y^2 \le 4$ í kartesískum hnitum teiknað í $r\theta$-planið.

■

Snúum okkur aftur að því að reikna rúmmál hálfkúlu. Formúla fallsins $f(x, y) =$

$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ í pólhnitum fæst á einfaldann hátt með því að nota formúlurnar $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \\ &= f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \sqrt{R^2 - [r\cos\theta]^2 - [r\sin\theta]^2} \\ &= \sqrt{R^2 - r^2}. \end{aligned}$$

Svæðið $\mathcal{D}$ sem heilda á yfir var gefið sem

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

í kartesískum hnitum. Í pólhnitum er lýsing þessa svæðis

$$[x(r,\theta)]^2 + [y(r,\theta)]^2 = [r\cos\theta]^2 + [r\sin\theta]^2 = r^2 \leq R^2,$$

þ.e. $r \leq R$. Við erum þar með búin að sýna að

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA = \int_{r\leq R} \sqrt{R^2 - r^2}\, dA.$$

Nú væri freistandi að setja $dA = dr\, d\theta$, alveg eins og við setjum $dA = dx\, dy$ í kartesískum hnitum, og nota ítrekaða heildun til þess að reikna rúmmálið. En hér vorum við að gera breytuskipti og að því þarf að huga í dA. Það kemur í ljós að $dA = dx\, dy = r\, dr\, d\theta$.

> Þegar við heildum yfir svæði $\mathcal{D}$ í kartesískum hnitum er $dA = dx\, dy$, en í pólhnitum er $dA = r\, dr\, d\theta$.

Nú verður heildið

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} f(x,y) dA &= \int_{r\leq R} \sqrt{R^2 - r^2}\, dA \\ &= \int_{r\leq R} \sqrt{R^2 - r^2}\; r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\; r dr \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{-(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{r=0}^{r=R} \\ &= \frac{2\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

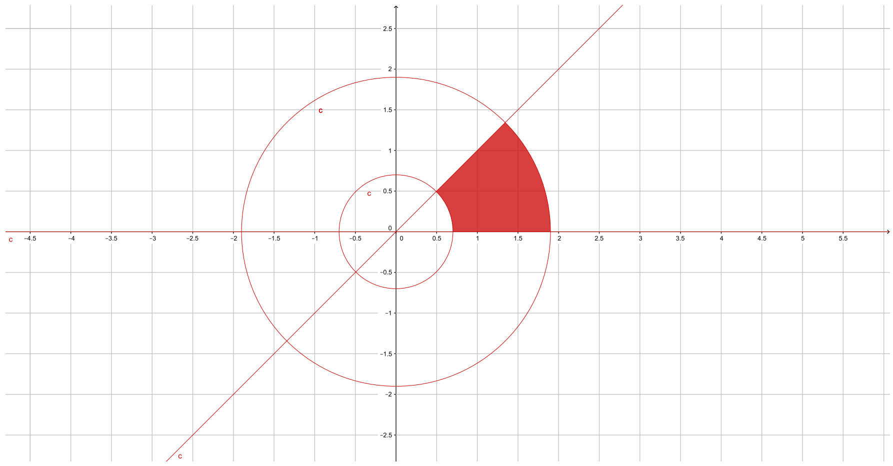
■ **Dæmi 3.16** Skilgreinum $\mathcal{R}$ sem svæðið

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \text{ og } \; y \leq x \; \text{ og } \; y \geq 0\}.$$

Reiknið heildið

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{y^2}{x^2} dA$$

með því að nota pólhnit.



Mynd 3.7: Svæðið $\mathcal{R}$ í Dæmi 3.16.

Lausn: Svæðið $\mathcal{R}$ hefur lýsinguna $a \leq r \leq b$ og $0 \leq \theta \leq \pi/4$ í pólhnitum. Við reiknum

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} \frac{y^2}{x^2} dA &= \int_a^b \left(\int_0^{\pi/4} \tan^2\theta \, d\theta \right) r dr \\
&= \int_a^b \Big[\tan\theta - \theta \Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} r dr \\
&= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \int_a^b r dr \\
&= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=a}^{r=b} \\
&= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\
&= \frac{4-\pi}{8}(b^2 - a^2).
\end{aligned}
$$

■

■ **Dæmi 3.17** Sýnum að

$$
I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.
$$

Lausn: Við notfærum okkur að við höfum lært að reikna 2-víð heildi í pólhnitum.

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \\
&= 2\pi \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=c} \\
&= 2\pi \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

Þar sem $I^2 = \pi$ höfum við að $I = \sqrt{\pi}$. ■

■ **Dæmi 3.18** Finnið rúmmál þess hluta sívalningsins $x^2 + y^2 \le a^2$ sem er í 1. áttungi (þ.s. $x \ge 0, y \ge 0$ og $z \ge 0$) og undir planinu $z = y$. Gerið þetta með því að heilda fallið $z = y$ yfir svæðið $\mathcal{D}$, sem er fjórðungur úr hringskífu. Reiknið þetta bæði með því að nota pólhnit og í kartesískum hnitum.

Lausn: Svæðinu er auðvelt að lýsa í pólhnitum. Við setjum $x = r\cos(\theta)$ og $y = r\sin(\theta)$. Þá er fallið okkar $f(r,\theta) = r\sin(\theta)$ og svæðið okkar afmarkast af $0 \le r \le a$ og $0 \le \theta \le \pi/2$. Við reiknum

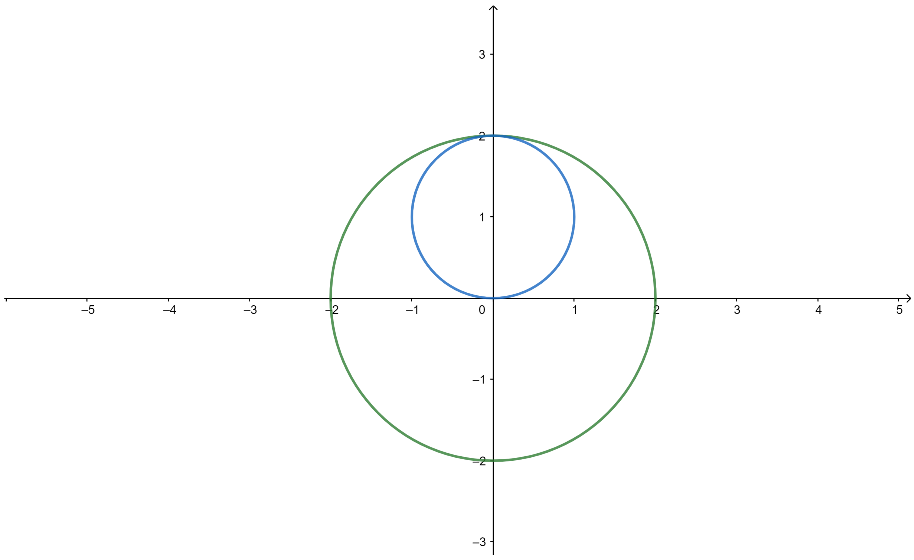
$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a r\sin(\theta) r dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^2 \sin(\theta) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=a} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \frac{a^3}{3} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\Big[-\cos(\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= \frac{a^3}{3}.
\end{aligned}
$$

Sama heildi í kartesískum hnitum er

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\, dy\, dx \\
&= \int_0^a \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
&= \int_0^a \frac{a^2-x^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a} \\
&= \frac{a^3}{3}.
\end{aligned}
$$

■

■ **Dæmi 3.19** Reiknið rúmmál þess rúmskika sem er inni í kúlunni $x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$ og inni í sívalningnum $x^2+y^2 \le 2ay$, $a>0$, s.s. rúmmálið sem er inni í þeim báðum.



Mynd 3.8: Á myndinni sjáum við skurðferla kúlunnar og sívalningsins við xy planið ($z=0$) í Dæmi 3.19.

Lausn: Við getum umskrifað jöfnu sívalningsins í $x^2+(y-a)^2 \le a^2$, og sjáum þá að hann hefur radíus a og miðju í $(0,a,z)$, $z \in \mathbb{R}$. Við erum með jafn mikið rúmmál beggja vegna við xy-planið og beggja vegna um yz-planið, svo við getum látið nægja að finna rúmmál þess hluta sem er í 1. áttungi (þar sem $x \ge 0$, $y \ge 0$ og $z \ge 0$) og margfaldað það með 4.

Við heildum því jöfnu kúlunnar á þessu svæði, s.s. $z = \sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ yfir svæðið $\mathcal{D}$ sem sést á Mynd 3.8. Við getum skipt í pólhnit, $x = r\cos(\theta)$ og $y = r\sin(\theta)$ og kúluhvelið hefur þá formúluna $z = \sqrt{4a^2-r^2}$.

Svæðið sem við heildum yfir er $x^2+y^2 \leq 2ay$ sem í pólhnitum verður $r^2 = 2ar\sin(\theta)$ svo $r = 2a\sin(\theta)$, sem gefur þá radíus sívalningsins í pólhnitum. Við reiknum nú heildið

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\sin(\theta)} \sqrt{4a^2-r^2}\cdot r\, dr\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{r=0}^{r=2a\sin(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\left(4a^2-4a^2\sin^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \left(4a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2a)^3 - (2a)^3\left(1-\sin^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}\right] d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-\cos^3(\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-\left(1-\sin^2(\theta)\right)\cos(\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\left[\theta - \sin(\theta) + \frac{\sin^3(\theta)}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{8a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{4}{9}a^3(3\pi-4).
\end{aligned}$$

Eins og áður sagði er rúmmál rúmskikans 4 sinnum þetta heildi, þ.e. svarið er

$$[\text{rúmmál rúmskikans}] = 4\cdot\frac{4}{9}a^3(3\pi-4) = \frac{16}{9}a^3(3\pi-4).$$

■

Æfingar 3.3

Æfing 3.3.1 Reiknið meðalfallgildi fallsins $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \leq 3 \text{ og } x+y \leq 0\right\}.$$

■

Æfing 3.3.2 Flatartregðuvægi (e. moment of inertia) svæðis $\mathcal{D}$ m.t.t. y er skilgreint sem

$$I_y = \int_{\mathcal{D}} x^2 dA.$$

Reiknið I_y fyrir svæðið

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \ \text{ og } \ x \leq 0 \text{ og } \ y \geq 0 \}.$$

■

Æfing 3.3.3 Skoðum eftirfarandi svæði í $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \quad \text{og } y \leq 0 \}$$

Teiknið mynd af svæðinu $\mathcal{D}$ og heildið svo fallið

$$f(x, y) = \frac{y^3 - x^3}{x^2 + xy + y^2}$$

yfir svæðið $\mathcal{D}$. ■

Æfing 3.3.4 Finnið rúmmál þess hlutar sem er bæði inni í kúlunni

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9a^2$$

og inni í sívalningnum

$$x^2 + y^2 \leq 2ax,$$

þ.s. $a > 0$. Notið pólhnit. Það má (og á að) nota reiknivél til að reikna lokaútkomuna.
■

Æfing 3.3.5 Skoðum eftirfarandi svæði í $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 5 \ \text{ og } x \geq 0 \}$$

a) Teiknið mynd af svæðinu $\mathcal{D}$ og stikið feril sem umlykur svæðið, annað hvort réttsælis eða rangsælis (tilgreinið áttunina á myndinni).
b) Heildið fallið

$$f(x, y) = x + yx^2$$

yfir svæðið $\mathcal{D}$ (án þess að nota reiknivél).

■

3.4 Hnitakerfaskipti í 2-víðum heildum almennt

Almenna formúlan, þegar skipt er í heildi úr kartesískum hnitum x og y yfir í annað hnitakerfi u og v reiknast á eftirfarandi hátt (samskonar gildir fyrir hærri víddir):

1. Skilgreinum fallið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}.$$

2. Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{F}$, þ.e. Jacobi-fylkið $D\mathbf{F}(u, v)$, og athugum að það er 2×2

fylki.

3. Reiknum ákveðu Jacobi-fylkisins

$$\det(D\mathbf{F}(u,v)) \quad \left(\text{oft táknað } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \text{ og kallað Jacobi-ákveða hnitakerfaskiptanna}\right)$$

4. Nú er

$$dx\,dy = |\det(D\mathbf{F}(u,v))|\,du\,dv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv.$$

Prófum þessa aðferð á hnitakerfisskipti yfir í pólhnit, þar sem við vitum niðurstöðuna:

1. Skilgreinum fallið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(r,\theta) = \begin{pmatrix} x(r,\theta) \\ y(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

2. Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{F}$,

$$D\mathbf{F}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \dfrac{\partial}{\partial\theta} r\cos\theta \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial r} r\sin\theta & \dfrac{\partial}{\partial\theta} r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3. Reiknum ákveðu Jacobi-fylkisins

$$\det(D\mathbf{F}(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

4. Nú er

$$dx\,dy = |\det(D\mathbf{F}(r,\theta))|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

Athugið að við erum nú komin með almenna formúlu fyrir hvaða hnitakerfaskipti sem er, jafnvel í hærri víddum.

> Fyrir hnitakerfaskipti úr kartesískum xy-hnitum yfir í uv-hnit er almennt
>
> $$dA = dx\,dy = |\det(D\mathbf{F}(u,v))|\,du\,dv,$$
>
> þar sem hnitakerfaskiptin eru gefin með fallinu $\mathbf{F}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$.

■ **Dæmi 3.20** Heildum fallið $f(x,y) = y$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0 \text{ og } y \geq 0 \text{ og } x^2 + y^2 \leq a^2\},$$

þar sem $a > 0$ er einhver fasti, með því að nota pólhnit.

Lausn: Fallið f hefur formúluna $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta$ í pólhnitum og svæðinu $\mathcal{D}$ má lýsa með

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ og } r \leq a.$$

Þá er

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r\sin\theta \cdot rdr\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=a} d\theta \\ &= \frac{1}{3}a^3\Big[-\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3}a^3.\end{aligned}$$

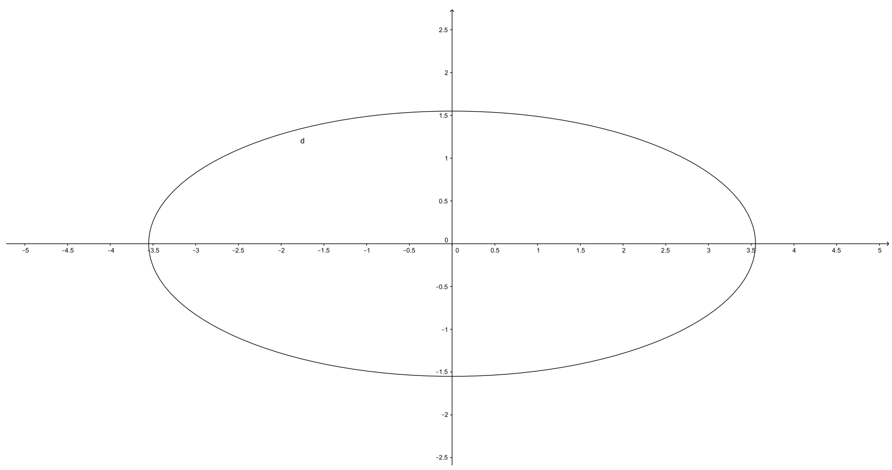
■

■ **Dæmi 3.21** Við viljum finna flatarmál sporbaugslaga flatarins

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Við gerum það með því að heilda fastafallið $f(x,y) = 1$ yfir flötinn, sem við skulum kalla E,

$$[\text{Flatarmál E}] = \iint_E dA.$$



Mynd 3.9: Svæðið E sem við viljum finna flatarmálið af í Dæmi 3.21.

Lausn 1: Við getum gert þetta í kartesískum hnitum með því að umskrifa jöfnuna fyrir jaðri svæðisins E í

$$y = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$$

og reikna svo

$$\iint_E dA = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}}^{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}} dy\,dx = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx = ab\pi.$$

Til að reikna útkomuna úr heildinu einföldum við fyrst (með $a, b > 0$)

$$\int_{-a}^{a} 2\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

og notuðum svo (öfugu) innsetninguna $x = a\sin(t)$ með $a = x(a) = a\sin(t(\pi/2)) = a\sin(\pi/2)$, $-a = x(-a) = a\sin(t(-\pi/2)) = a\sin(-\pi/2)$ og

$$dx = a\cos(t)dt = a\sqrt{1-\sin^2(t)}\,dt = a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dt = \sqrt{a^2-x^2}\,dt.$$

Með henni fæst

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{a^2-x^2}\,dt\\ &= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(1-\sin^2(t)\Big)\,dt\\ &= a^2\pi - a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)dt.\end{aligned}$$

Svo má reikna með hlutheildun

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\cdot\sin(t)dt\\ &= \Big[-\cos(t)\cdot\sin(t)\Big]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\cdot\cos(t)dt\\ &= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(1-\sin^2(t)\Big)\,dt\\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)dt,\end{aligned}$$

sem gefur

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)dt = \frac{\pi}{2}.$$

Sem sagt er

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2\pi}{2}$$

og við fáum niðurstöðuna

$$\iint_E dA = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = ab\pi.$$

Lausn 2: Önnur leið er að nota hnitakerfi sem er aðlagað að samhverfu verkefnisins. Við gerum breytuskiptin $x = au$ og $y = bv$. Þá verður jafna sporbaugsins í nýja uv-hnitakerfinu

$$u^2+v^2 = \frac{(au)^2}{a^2}+\frac{(bv)^2}{b^2} \le 1.$$

Við reiknum nú dA og fáum

$$dA = |\det(D\mathbf{F}(u,v))|\,dudv = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix} = ab\,du\,dv.$$

Við höfum s.s.

$$\iint_E dA = \iint_{u^2+v^2\leq 1} ab\, du\, dv = ab \iint_{u^2+v^2\leq 1} du\, dv = ab\pi,$$

og athugið að þar sem við þekkjum flatarmál hrings með radíus 1, þá þurfum við ekki að heilda. ■

3.5 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 3.1.1 Teiknið upp mynd af svæðunum:

a)

$$\mathcal{D}_1 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2+y^2 \leq 4 \quad \text{og } x \geq 0 \;\; \text{og} \quad y \leq 0\}$$

b)

$$\mathcal{D}_2 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 5\}$$

c)

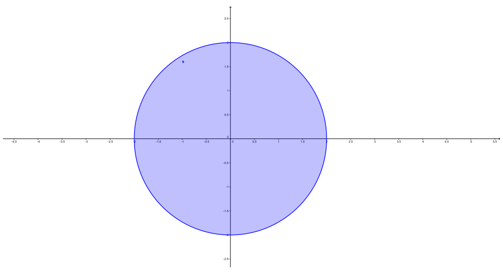
$$\mathcal{D}_3 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2 \quad \text{og } 0 \leq x \leq 1\}$$

d)

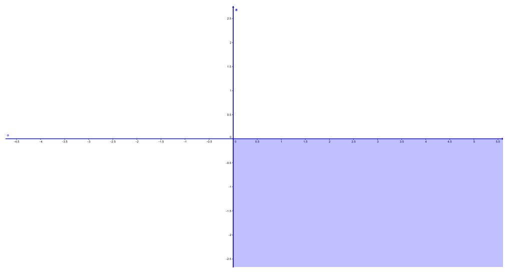
$$\mathcal{D}_4 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x) \leq y \leq g(x) \quad \text{og } a \leq x \leq b\}.$$

e) Finnið að auki föll $f(x)$ og $g(x)$ og fasta a og b þannig að $\mathcal{D}_4$ lýsi svæðinu innan þríhyrnings með hornpunkta $(0,0)$, $(1,1)$ og $(1,3)$.

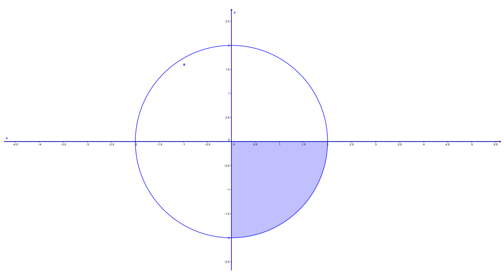
■ **Lausn** Hér fyrir neðan má sjá svæðin teiknuð upp. Athugið að sum svæðin eru ótakmörkuð, t.d. svæðið $x \geq 0$ og $y \leq 0$ sem er allur fjórði fjórðungur.



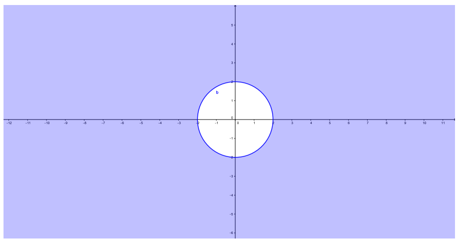
$x^2+y^2 \leq 4$



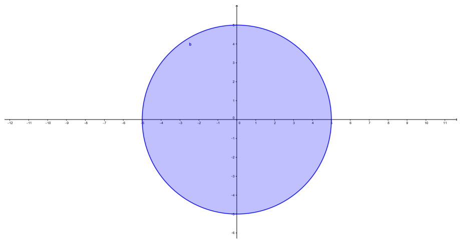
$x \geq 0$ og $y \leq 0$



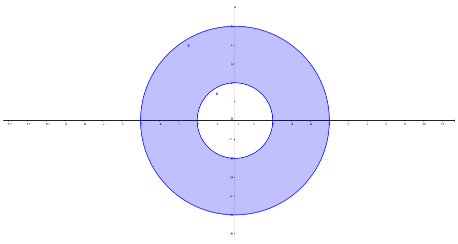
Svæðið $\mathcal{D}_1$



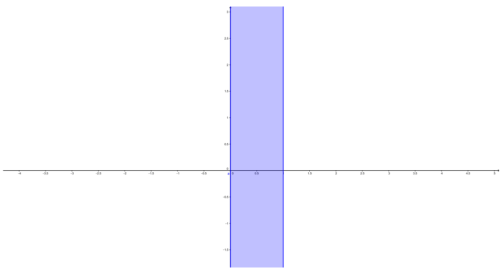
$2 \leq \sqrt{x^2 + y^2}$



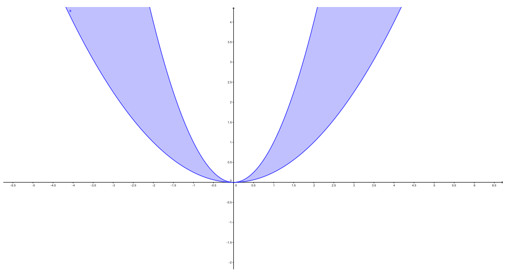
$5 \geq \sqrt{x^2 + y^2}$



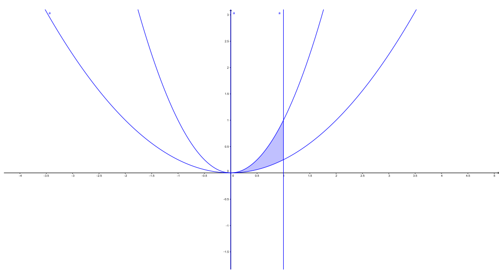
Svæðið $\mathcal{D}_2$



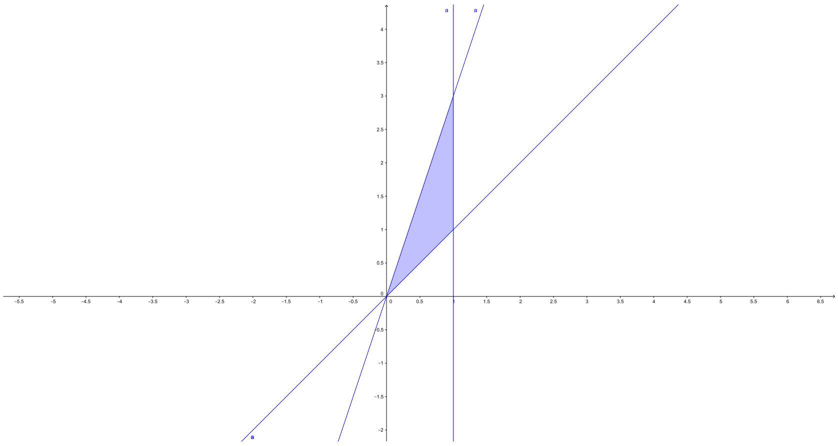
$0 \leq x \leq 1$



$\frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2$



Svæðið $\mathcal{D}_3$.



Mynd 3.16: Svæðið $\mathcal{D}_4$ sem afmarkast af $x \leq y \leq 3x$ og $0 \leq x \leq 1$.

Æfing 3.1.2 Reiknið

$$\iint_{\mathcal{D}} 4x^3 e^{y^3} dA,$$

þar sem

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ x^2 \leq y \leq 1 \ \text{ og } \ -1 \leq x \leq 0\}.$$

Athugið að heildin sem upp koma hér á að reikna án þess að nota reiknivél.

■ **Lausn** Illmögulegt er að heilda fallið $4x^3 e^{y^3}$ m.t.t. y, svo við byrjum á að breyta mörkunum á svæðinu okkar í

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ -\sqrt{y} \leq x \leq 0 \ \text{ og } 0 \leq y \leq 1\}.$$

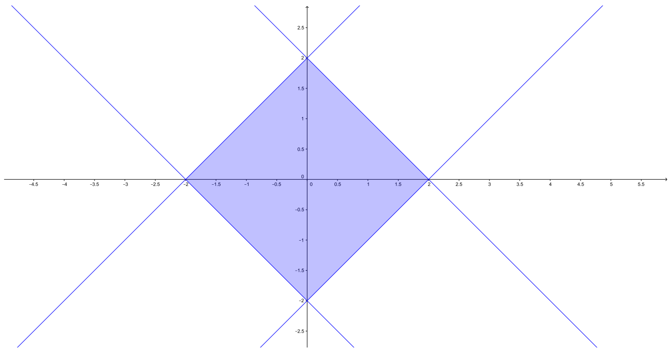
Við getum núna sett upp heildið og reiknað

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^0 4x^3 e^{y^3} dx \, dy &= \int_0^1 \left[x^4 e^{y^3} \right]_{x=-\sqrt{y}}^{x=0} dy \\
&= \int_0^1 -y^2 e^{y^3} dy \\
&= \left[-\frac{1}{3} e^{y^3} \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= -\frac{1}{3}(e - 1).
\end{aligned}$$

Æfing 3.1.3 Reiknið

$$\int_{\mathcal{D}} \left(3 - \pi \sin(x) + y^2\right) dA$$

þar sem $\mathcal{D}$ er ferhyrningslaga svæðið sem hefur hornpunktana $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ og $(0,-2)$.



Mynd 3.17: Ferhyrningslaga svæðið afmarkast af línunum $y = 2 - x$, $y = 2 + x$, $y = -2 - x$ og $y = -2 + x$. Ferhyrningurinn hefur flatarmálið 8.

■ **Lausn** Svæðið sem við heildum yfir er teiknað á Mynd 3.17. Við heildum lið fyrir lið. Fyrsta heildið er einfaldlega 3 sinnum flatarmál svæðisins sem heildað er yfir.

$$\int_{\mathcal{D}} 3dA = 3 \cdot 8 = 24.$$

Annað heildið er

$$\int_{\mathcal{D}} \pi \sin(x) dA = 0,$$

því $\sin(x)$ er oddstætt um $x = 0$ og svæðið $\mathcal{D}$ er samhverft um $x = 0$.

Í þriðja heildinu látum við nægja að heilda yfir E, sem er sá hluti ferhyrningsins $\mathcal{D}$ sem er í fyrsta fjórðungi, vegna þess að fallið $f(x,y) = y^2$ er jafnstætt um $x = 0$ og $y = 0$. Við fáum s.s.

$$\int_{\mathcal{D}} y^2 dA = 4 \int_E y^2 dA = 4 \int_0^2 \int_0^{2-x} y^2 dy\, dx = \frac{16}{3}.$$

Samantekið höfum við

$$\int_{\mathcal{D}} \left(3 - \pi \sin(x) + y^2\right) dA = 24 + 0 + \frac{16}{3} = \frac{88}{3} \approx 29.3.$$

Sama niðurstaða fæst með því að setja upp heildið

$$\int_0^2 \int_{x-2}^{2-x} \left(3 - \pi \sin(x) + y^2\right) dy\, dx + \int_{-2}^0 \int_{-x-2}^{2+x} \left(3 - \pi \sin(x) + y^2\right) dy\, dx.$$

Æfing 3.1.4 Gefið er mengið

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 \le y \le x^2 \text{ og } 0 \le x \le 2\}.$$

Setjið rétt mörk á seinni tvö heildin hér fyrir neðan, þar sem heildunarröðinni hefur verið breytt.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int\int f(x,y)\,dydx = \int\int f(x,y)\,dxdy.$$

■ **Lausn**

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)dy\,dx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx\,dy.$$

Æfing 3.1.5 Flatartregðuvægi (e. moment of inertia) svæðisins $\mathcal{D}$ m.t.t. y er skilgreint sem

$$I_y = \int_{\mathcal{D}} x^2 dA.$$

Reiknið I_y fyrir svæðið $\mathcal{D}$, sem er sá hluti svæðisins

$$y \leq 2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

sem liggur í 1. fjórðungi.

■ **Lausn** Við setjum upp heildið og reiknum

$$\begin{aligned}
I_y &= \int_0^2 \int_0^{2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} x^2 dy\,dx \\
&= \int_0^2 x^2 \Big[y\Big]_{y=0}^{y=2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} dx \\
&= \int_0^2 2x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{10}\right]_{x=0}^{x=2} \\
&= \frac{32}{15}.
\end{aligned}$$

Æfing 3.1.6 Reiknið meðalfallgildi fallsins $f(x,y) = x^2 + y^2$ yfir svæðið $\mathcal{D}$, sem er þríhyrningur með hornpunkta í $(0,0)$, $(0,a)$ og $(a,0)$, þar sem $a > 0$ er fasti.

■ **Lausn** Svæðið $\mathcal{D}$ er þríhyrningur með flatarmál $a^2/2$. Þríhyrningurinn $\mathcal{D}$ afmarkast af $0 \leq x \leq a$ og $0 \leq y \leq a - x$, þ.s. $a > 0$. Við setjum upp heildið

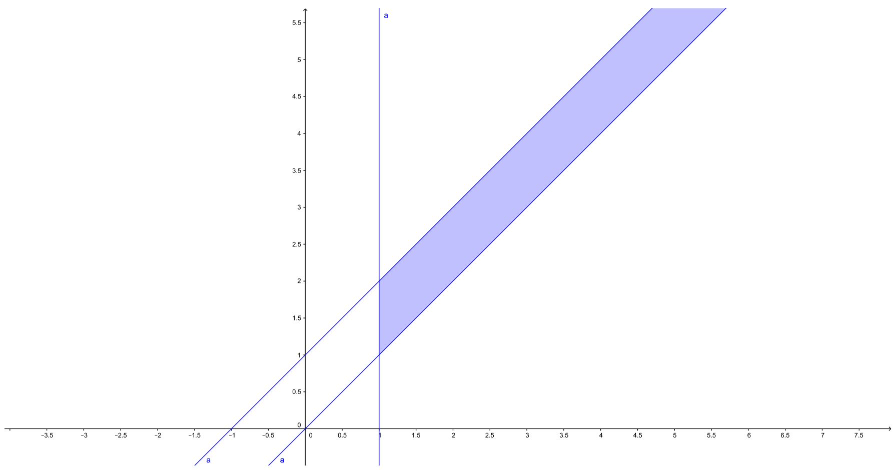
$$\begin{aligned}
\frac{1}{A}\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \frac{2}{a^2}\int_0^a \int_0^{a-x} \left(x^2+y^2\right)\, dy\, dx \\
&= \frac{2}{a^2}\int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=a-x} dx \\
&= \frac{2}{a^2}\int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3}\right] dx \\
&= \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(a-x)^4}{12}\right]_{x=0}^{x=a} \\
&= \frac{2}{a^2}\left[\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{12}\right] \\
&= \frac{a^2}{3}.
\end{aligned}$$

Æfing 3.2.1 Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} \frac{1}{x^2}\, dA,$$

þar sem $\mathcal{T}$ er (ótakmarkaða) svæðið $x \leq y \leq x+1$ og $x \geq 1$. Teiknið einnig mynd af svæðinu.

■ **Lausn** Svæðið sem við heildum yfir sést á myndinni hér fyrir neðan.



Mynd 3.18: Ótakmarkaða svæðið $x \leq y \leq x+1$ og $x \geq 1$.

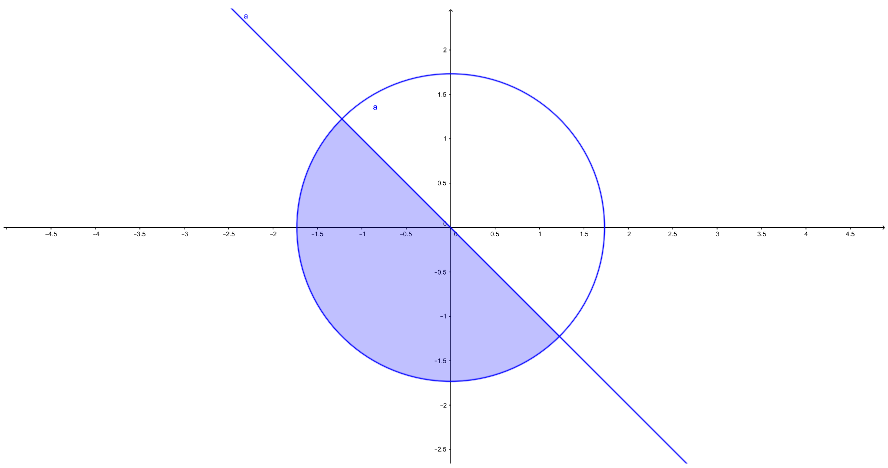
Við reiknum

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{x^2}dy\,dx &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\int_x^{x+1}\,dy\,dx\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}(x+1-x)dx\\ &= \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=+\infty}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)-(-1)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Æfing 3.3.1 Reiknið meðalfallgildi fallsins $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 3 \text{ og }\ x+y\leq 0\}.$$

■ **Lausn** Svæðið sem við heildum yfir sést á myndinni hér fyrir neðan



Mynd 3.19: Við heildum yfir hálfan hring með radíus $\sqrt{3}$. Flatarmál svæðisins er $3\pi/2$.

Flatarmál svæðisins $\mathcal{D}$ er $A = 3\pi/2$, svo meðlfallgildið er

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{A}\int_{\mathcal{D}} e^{-(x^2+y^2)}dA &= \frac{2}{3\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{3}} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{2}{3\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{3}} d\theta \\
&= \frac{2}{3\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(1-e^{-3}\right)d\theta \\
&= \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(1-e^{-3}\right)\cdot\pi \\
&= \frac{1-e^{-3}}{3}.
\end{aligned}
$$

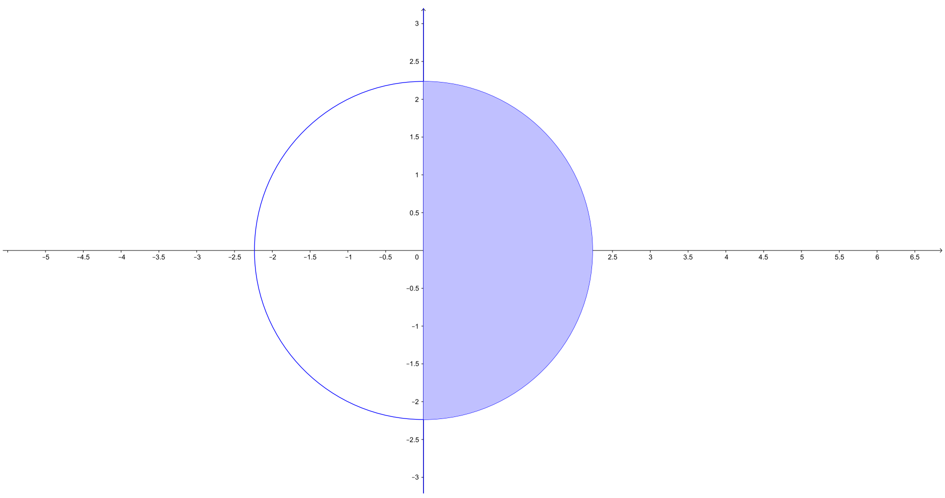
Æfing 3.3.5 Skoðum eftirfarandi svæði í $\mathbb{R}^2$

$$
\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2+y^2 \leq 5 \ \text{ og } x \geq 0\}
$$

a) Teiknið mynd af svæðinu $\mathcal{D}$ og stikið feril sem umlykur svæðið, annað hvort réttsælis eða rangsælis (tilgreinið áttunina á myndinni).
b) Heildið fallið

$$
f(x,y) = x + yx^2
$$

yfir svæðið $\mathcal{D}$ (án þess að nota reiknivél).



Mynd 3.20: Svæðið $\mathcal{D}$ sem við heildum yfir í Dæmi 3.3.5.

■ **Lausn** Ferill sem umlykur svæðið og er stikaður rangsælis er t.d.

$$
\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \sqrt{5}\,\cos(t)\,\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\sin(t)\,\mathbf{j}, & \text{ef } -\pi/2 \leq t \leq \pi/2, \\ \sqrt{5}(\pi/2 - t + 1)\,\mathbf{j}, & \text{ef } \pi/2 \leq t \leq \pi/2 + 2. \end{cases}
$$

Fyrir heildunin í lið b) nýtum við okkur að $g(x, y) = yx^2$ er oddstætt fall um $y = 0$ því $g(x, -y) = -g(x, y)$ og svæðið er samhverft um $y = 0$. Við fáum því að

$$\int_{\mathcal{D}} yx^2 \, dA = 0.$$

Þá verður heildið töluvert einfaldara og við fáum

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \left(x + yx^2\right) dA &= \int_{\mathcal{D}} x \, dA \\
&= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{x=0}^{x=\sqrt{5-y^2}} x \, dx \, dy \\
&= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{5-y^2}} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(5 - y^2\right) dy \\
&= \frac{1}{2} \left[5y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{5}}^{y=\sqrt{5}} \\
&= \frac{10\sqrt{5}}{3}.
\end{aligned}$$

Það er líka þægilegt að reikna þetta heildi í pólhnitum:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \left(x + yx^2\right) dA &= \int_{\mathcal{D}} x \, dA \\
&= \int_0^{\sqrt{5}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos(\theta) \, r d\theta \, dr \\
&= \int_0^{\sqrt{5}} r^2 \Big[\sin(\theta)\Big]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} dr \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{5}} r^2 dr \\
&= 2 \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{5}} \\
&= \frac{10\sqrt{5}}{3}.
\end{aligned}$$

Æfing 3.3.4 Finnið rúmmál þess hlutar sem er bæði inni í kúlunni

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9a^2$$

og inni í sívalningnum

$$x^2 + y^2 \leq 2ax,$$

þ.s. $a > 0$. Notið pólhnit. Það má (og á að) nota reiknivél til að reikna lokaútkomuna.

■ **Lausn** Við skiptum í pólhnit, þá er kúlunni lýst með

$$-\sqrt{9a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{9a^2 - r^2}$$

og sívalningurinn hefur lýsinguna

$$r^2 \leq 2ar\cos(\theta), \quad \textbf{það er} \quad r \leq 2a\cos(\theta).$$

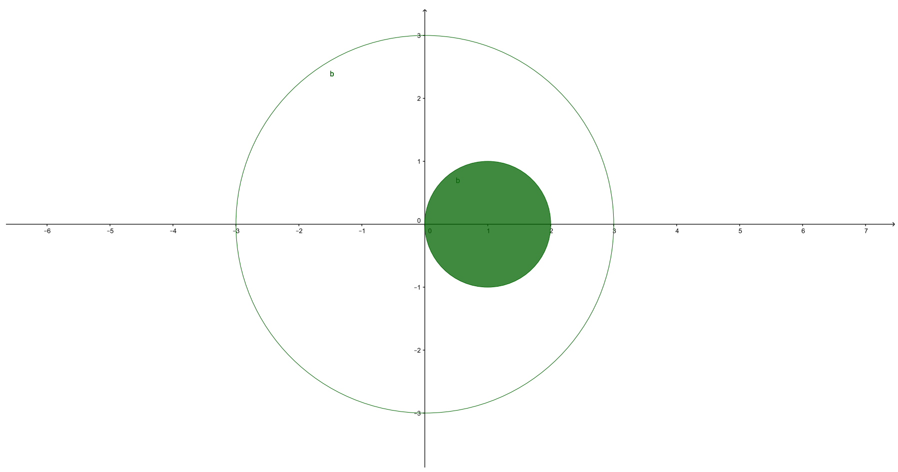
Við nýtum okkur að svæðið er samhverft um $y = 0$ og um $z = 0$ og við getum því látið nægja að finna rúmmál þess hluta sem er í $y \geq 0$og $z \geq 0$ og margfaldað svo niðurstöðuna með 4.

Við reiknum

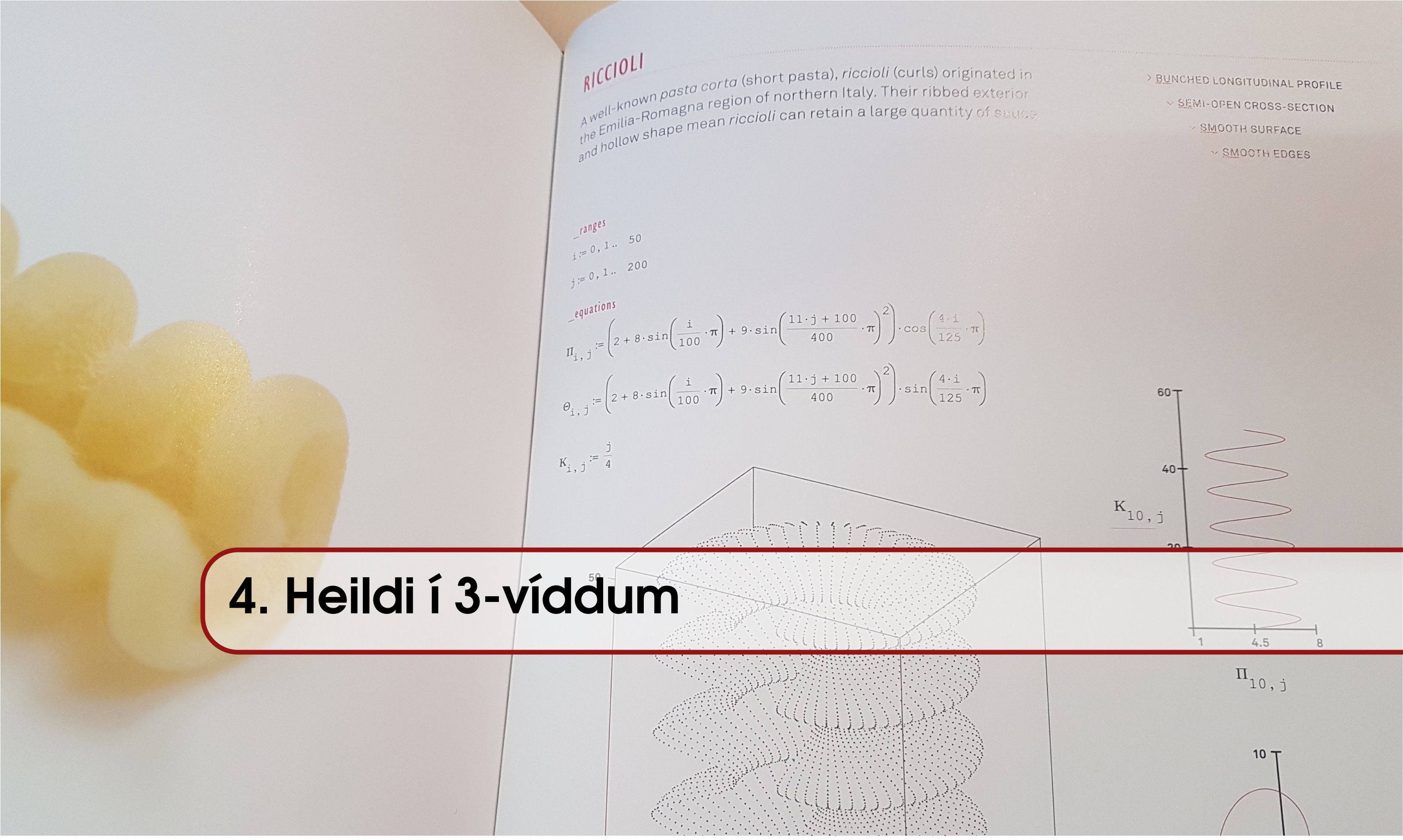
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{9a^2 - r^2} dA &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos(\theta)} \sqrt{9a^2 - r^2}\; r\; dr\, d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(9a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=2a\cos(\theta)} d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(9a^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(9a^2 - 4a^2\cos^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}} \right] d\theta \\
&= \frac{4}{3} \cdot 3^3 \cdot a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}} \right] d\theta.
\end{aligned}$$

Hér leyfum við okkur að grípa til reiknivélar og fáum lokaniðurstöðuna

$$= 17.1639038 \cdot a^3.$$



Mynd 3.21: Skoðum mynd af kúlunni og sívalningnum í Dæmi 3.3.4 þegar $z = 0$, s.s. í xy-planinu.



4. Heildi í 3-víddum

Í þessum hluta skoðum við heildi í þremur víddum. Þau er yfirleitt sett upp í kartesískum hnitum (xyz-hnitum), í sívalningshnitum ($r\theta z$-hnitum) eða í kúluhnitum ($\rho\phi\theta$-hnitum). Að auki skoðum við svo stikun yfirborða og heildi yfir yfirborð.

4.1 Kartesísk hnit

Heildi í þremur (og hærri) víddum er skilgreint nákvæmlega eins og heildi í tveimur víddum. Ef $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ er fall og $\mathcal{D} = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$ er kassi í $\mathbb{R}^3$, þá er heildið af f yfir $\mathcal{D}$ skilgreint sem

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dV = \iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dV = \int_{z_0}^{z_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz.$$

Hér erum við að heilda yfir rúmmál $dV = dx\, dy\, dz$. Eins og áður og af sömu ástæðu skiptir röðin á hreiðruðu heildunum ekki máli; t.d. er

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{z_0}^{z_1} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx = \int_{z_0}^{z_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz.$$

Ef svæðið $\mathcal{D}$ er flóknara en kassi þá getum við reynt að skrifa mörkin á innri heildunum sem föll af þeim breytum sem síðar er heildað m.t.t.

■ **Dæmi 4.1** Heildum fallið $f(x,y,z) = x^3y^2z$ yfir hálfkúluna

$$\mathcal{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{ og } x \ge 0\}.$$

Lausn: Við afmörkum svæðið í x, y og z stefnu og fáum heildið

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} f(x,y,z)dV &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x^3y^2z\,dx\right)dy\right)dz\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\left(\left[\frac{x^4}{4}y^2z\right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)dy\right)dz\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\left(\frac{(1-y^2-z^2)^2}{4}y^2z\right)dy\right)dz\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\left(y^2-2y^4-2y^2z^2+2y^4z^2+y^6+y^2z\right)z\,dy\right)dz\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}y^3\left(1-z^2\right)^2-\frac{2}{5}y^5\left(1-z^2\right)+\frac{1}{7}y^7\right]_{y=-\sqrt{1-z^2}}^{y=\sqrt{1-z^2}} z\,dz\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 2z\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\left(1-z^2\right)^2-\frac{2}{5}\left(1-z^2\right)^2+\frac{1}{7}\left(1-z^2\right)^2\right)dz\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{8z}{3\cdot 5\cdot 7}\left(1-z^2\right)^{\frac{7}{2}}dz\\
&= 0
\end{aligned}
$$

því fallið undir síðasta heildinu er oddstætt fall af z og bilið sem heildað er yfir er samhverft um $z = 0$.

Þessa niðurstöðu fær maður mun auðveldar ef maður heildar fyrst m.t.t. z, t.d.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} f(x,y,z)dV &= \int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^3y^2z\,dz\right)dy\right)dx\\
&= \int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\left[y^2x^3\cdot\frac{1}{2}z^2\right]_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)dy\right)dx\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Enn einfaldara er að notfæra sér beint að fallið $f(x,y,z) = x^3y^2z$ er oddstætt um $z = 0$, þ.e. $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$, og hálfkúlan sem við erum að heilda yfir er samhverf um $z = 0$. Því hlýtur heildið að vera 0. ■

■ **Dæmi 4.2** Reiknum

$$\iiint_{\mathcal{R}}(1+2x-3y)dV,$$

þar sem $\mathcal{R}$ er kassinn $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$ og $-c \le z \le c$.

Lausn: Við getum sett upp heildið

$$\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}(1+2x-3y)dx\,dy\,dz$$

og reiknað beint af augum, en við getum líka nýtt okkur að

$$\iiint_{\mathcal{R}} 2x\;dV = 0$$

því $f(x,y,z) = 2x$ er oddstætt um $x = 0$ og kassinn sem heildað er yfir er samhverfur um $x = 0$. Við getum líka nýtt okkur að

$$\iiint_{\mathcal{R}} 3y\;dV = 0$$

því $g(x,y,z) = 3y$ er oddstætt um $y = 0$ og kassinn er samhverfur um $y = 0$. Þá stendur eftir

$$\iiint_{\mathcal{R}} 1\ dV = 2a \cdot 2b \cdot 2c = 8abc,$$

sem er einmitt rúmmál kassans $\mathcal{R}$ sem heildað er yfir. ■

■ **Dæmi 4.3** Heildum fallið $g(x,y,z) = x^2y + z$ yfir pýramídann $\mathcal{R}$, sem er gefinn með

$$0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|.$$

Lausn: Við sjáum fyrst að

$$\iiint_{\mathcal{R}} x^2y\ dV = 0$$

því x^2y er oddstætt í y um $y = 0$ og pýramídinn er samhverfur um $y = 0$. Við skoðum nú

$$\iiint_{\mathcal{R}} z\ dV.$$

Þó að z sé sannarlega oddstætt um $z = 0$, þá hjálpar það okkur lítið hér þar sem pýramídinn er ekki samhverfur um $z = 0$ (hann er allur fyrir ofan xy-planið). Við verðum því að afmarka svæðið í heildinu. Við tökum fyrst eftir því að fallið z er eins í öllum fjórðungum fyrir ofan xy-planið, svo við getum látið nægja að heilda yfir þann hluta sem er í fyrsta áttungi ($x, y, z \geq 0$) og margfaldað með 4. Í fyrsta áttungi einfaldast skilyrðið

$$0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$$

í

$$0 \leq z \leq 1 - x - y, \quad 0 \leq y \leq 1 - x \ \text{ og } \ 0 \leq x \leq 1.$$

Við fáum því heildið

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{R}} z\ dV &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy\, dx \\
&= 4 \int_0^1 \left[\frac{-(1-x-y)^3}{6} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= 4 \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx \\
&= 4 \left[\frac{-(1-x)^4}{4 \cdot 6} \right]_{x=0}^{x=1} dx \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

■

Í næstu köflum skoðum við svo tvö algeng breytuskipti í heildum í 3-víddum, nefnilega sívalningshnit og kúluhnit.

Æfingar 4.1

Æfing 4.1.1 Við viljum finna rúmmál takmarkaða rúmskikans $\mathcal{R}$ sem afmarkast af $x = y^2$ og plönunum $z = 0$ og $x + z = 1$. Við notum til þess þrefalt heildi, þar sem við heildum 1 yfir $\mathcal{R}$. Setjið rétt mörk á heildin hér fyrir neðan (athugið að röð heildanna er ekki sú sama).

$$\int_{\mathcal{R}} dV = \iiint dz\,dx\,dy = \iiint dy\,dz\,dx = \frac{8}{15}.$$

■

Æfing 4.1.2 Finnið massa hlutarins $\mathcal{T}$ ef þéttifall (e. density function) hans er gefið sem $\delta(x, y, z) = z$. $\mathcal{T}$ er sá hluti í 1. áttungi (e. 1. octant; $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$) sem er undir planinu $z = 6 - 3x - 2y$. Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} \delta(x, y, z)\,dV.$$

■

4.2 Sívalningshnit

Sívalningshnit (e. cylindrical coordinates) eru bein útvíkkun pólhnita á 3-víddir. Maður lýsir staðsetningu punkts P í $\mathbb{R}^3$ sem hefur hnitin (x, y, z) í kartesísku hnitakerfi, með hnitunum r, θ og z, þar sem:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Til þess að reikna $dV = dx\,dy\,dz$ í sívalningshnitum notar maður nákvæmlega sömu aðferð og í 2-víddum:

1. Skilgreinum fallið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} x(r, \theta, z) \\ y(r, \theta, z) \\ z(r, \theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

2. Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{F}$,

$$D\mathbf{F}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial z} r\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} r\sin\theta & \frac{\partial}{\partial z} r\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} z & \frac{\partial}{\partial \theta} z & \frac{\partial}{\partial z} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Reiknum ákveðu Jacobi-fylkisins

$$\det(D\mathbf{F}(r,\theta,z)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-r\sin\theta)\cdot \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

4. Nú er
$$dx\,dy\,dz = |\det(D\mathbf{F}(r,\theta,z))|\,dr\,d\theta\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Þegar við skiptum úr kartesískum hnitum (x,y,z) í sívalningshnit (r,θ,z) er

$$dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

■ **Dæmi 4.4** Fall er gefið með formúlunni $f(x,y,z) = xy + z^2$. Heildið f yfir svæðið

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2\leq 4 \;\text{ og }\; 0\leq x \;\text{ og }\; 0\leq z\leq 1\}.$$

Lausn: Fallið f og svæðið $\mathcal{D}$ eru gefin í kartesískum hnitum (x,y,z). Skiptum yfir í sívalningshnit (r,θ,z). Í þeim er

$$f(x,y,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = r^2\cos\theta\sin\theta + z^2$$

og svæðinu $\mathcal{D}$ má lýsa með

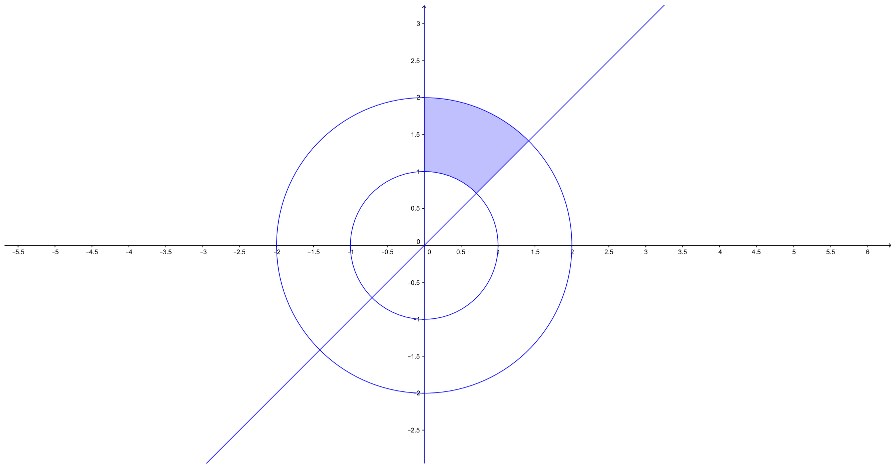
$$0\leq r\leq 2, \quad -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \quad \text{og} \quad 0\leq z\leq 1.$$

Heildið er þá

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dV &= \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 (r^2\cos\theta\sin\theta + z^2)r\,dr\right)d\theta\right)dz \\
&= \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}z^2r^2\right]_{r=0}^{r=2}d\theta\right)dz \\
&= \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos\theta\sin\theta + 2z^2\right)d\theta\right)dz \\
&= \int_0^1\left[2\sin^2\theta + 2\theta z^2\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dz \\
&= \int_0^1 2\pi z^2 dz \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{z=0}^{z=1} \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 4.5** Reiknið
$$\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dV,$$
þar sem $\mathcal{D}$ er svæðið milli sívalningshvelanna $x^2+y^2=1$ og $x^2+y^2=4$ og sem afmarkast að auki af $0 \le z \le 1$ og $0 \le x \le y$.



Mynd 4.1: Rúmskikinn $\mathcal{D}$ afmarkast af þessu svæði í xy-planinu og $0 \le z \le 1$.

Lausn:
Við sjáum að auðvelt er að lýsa þessu svæði í xy-planinu með pólhnitum og rúmskikinn er svo afmarkaður í z stefnuna á einfaldan hátt. Við skiptum því yfir í sívalningshnit, þar sem

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dV &= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \cdot r\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_0^1 dz \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \cdot \int_1^2 r^3 dr \\ &= 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=2} \\ &= \frac{15}{16}\pi.\end{aligned}$$

■

Æfingar 4.2

Æfing 4.2.1 Heildið fallið $f(x,y,z)=x$ yfir rúmskikann sem er bæði inni í kúlunni
$$x^2+y^2+z^2=4a^2$$

og inni í sívalningnum

$$x^2 + y^2 = 2ay.$$

■

Æfing 4.2.2 Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} (x^2 + y^2)\, dV$$

þar sem $\mathcal{T}$ er sá hluti innan sívalningsins $x^2 + y^2 \leq 4$ sem er yfir xy-planinu ($z = 0$) og undir planinu $z = x$.

■

4.3 Kúluhnit

Við skoðum nú hvernig má staðsetja má punkt í rúminu með kúluhnitum (e. spherical coordinates). Til þess að lýsa staðsetningu punkts P í $\mathbb{R}^3$ með kartesísku hnitin (x, y, z) notar maður fjarlægð punktisins frá núlli ρ og að auki tvö horn, θ sem alveg eins og í pólhnitum og ϕ, sem er horn stöðuvektors punktsins við jákvæða z ásinn. Formúlurnar eru:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \sin\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

Til þess að átta sig betur á kúluhnitum borgar sig að líta á Mynd 4.2.
Ath. við getum lýst staðsetningu hvaða punkts í $\mathbb{R}^3$ sem er með því að taka

$$0 \leq \rho < +\infty \text{ og } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ og } 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Til þess að reikna $dV = dx\, dy\, dz$ í kúluhnitum notar maður sömu aðferð og áður:

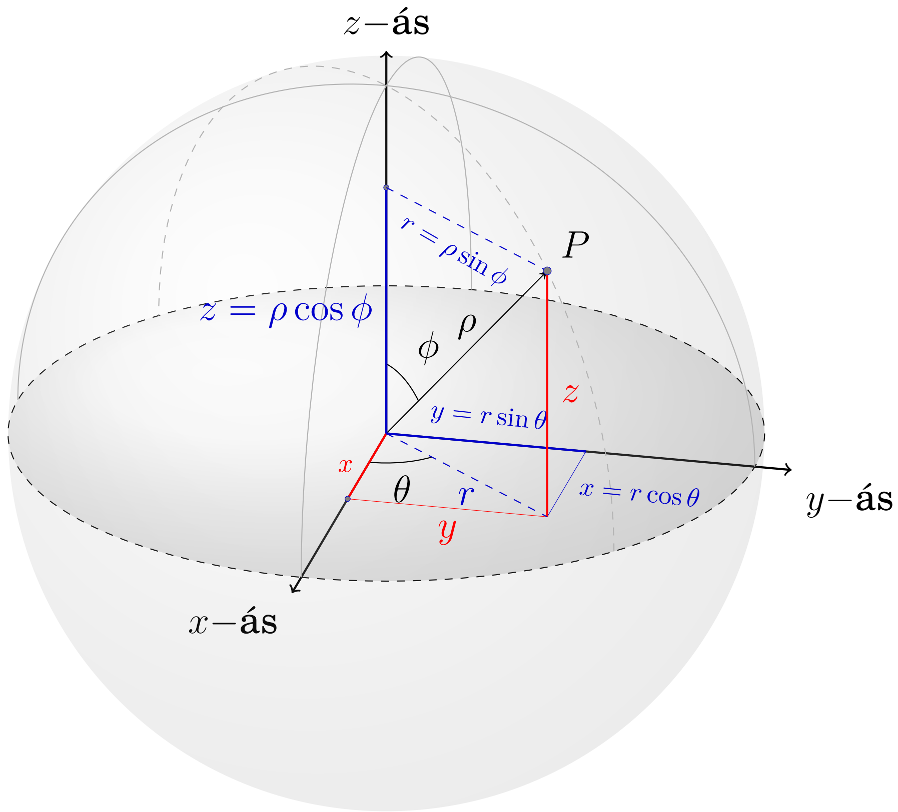
1. Skilgreinum fallið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} x(\rho, \theta, \phi) \\ y(\rho, \theta, \phi) \\ z(\rho, \theta, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\theta \sin\phi \\ \rho \sin\theta \sin\phi \\ \rho \cos\phi \end{pmatrix}$$

2. Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{F}(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}\rho \cos\theta \sin\phi & \frac{\partial}{\partial \theta}\rho \cos\theta \sin\phi & \frac{\partial}{\partial \phi}\rho \cos\theta \sin\phi \\ \frac{\partial}{\partial \rho}\rho \sin\theta \sin\phi & \frac{\partial}{\partial \theta}\rho \sin\theta \sin\phi & \frac{\partial}{\partial \phi}\rho \sin\theta \sin\phi \\ \frac{\partial}{\partial \rho}\rho \cos\phi & \frac{\partial}{\partial \theta}\rho \cos\phi & \frac{\partial}{\partial \phi}\rho \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\phi & -\rho \sin\theta \sin\phi & \rho \cos\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi & \rho \cos\theta \sin\phi & \rho \sin\theta \cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho \sin\phi \end{pmatrix}.$$



Mynd 4.2: Myndræn framsetning á kúluhnitum.

3. Reiknum ákveðu Jacobi-fylkisins

$$
\begin{aligned}
&\det(D\mathbf{F}(\rho,\theta,\phi)) \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta\sin\phi \begin{vmatrix} \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} \\
&\qquad - (-\rho\sin\theta\sin\phi)\cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} \\
&\qquad + \rho\cos\theta\cos\phi\cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi \\ \cos\phi & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\rho^2\cos^2\theta\sin^3\phi - \rho^2\sin^2\theta\sin^3\phi - \rho^2\sin^2\theta\cos^2\phi\sin\phi \\
&\qquad\qquad - \rho^2\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\phi \\
&= -\rho^2\left(\sin^3\phi\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + \cos^2\phi\sin\phi\cdot(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\right) \\
&= -\rho^2(\sin^3\phi + \cos^2\phi\sin\phi) \\
&= -\rho^2\sin\phi\cdot(\sin^2\phi+\cos^2\phi) \\
&= -\rho^2\sin\phi.
\end{aligned}
$$

4. Nú er

$$dx\,dy\,dz = |\det(D\mathbf{F}(\rho,\theta,\phi))|\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

Þegar við skiptum úr kartesískum hnitum (x,y,z) í kúluhnit (ρ,θ,ϕ) er

$$dV = dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

■ **Dæmi 4.6** Reiknum rúmmál kúlu $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ með því að heilda fallið 1 yfir kúluna.
Lausn:

$$\begin{aligned}\iint_{\text{kúla}} dV =& \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta\\ =& \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi} \sin\phi\ d\phi \cdot \int_0^a \rho^2 d\rho\\ =& 2\pi \cdot \Big[-\cos(\phi)\Big]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=a}\\ =& \frac{4\pi a^3}{3}.\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 4.7** Fall er gefið með formúlunni $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ í kartesískum hnitum. Heildið f yfir svæðið

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2+z^2 \le 4 \ \text{ og }\ 0 \le y \ \text{ og }\ 0 \le z\}.$$

Lausn: Skiptum yfir í kúluhnit ρ,θ,ϕ. Þar er

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\\ &= \sqrt{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi}\\ &= \sqrt{\rho^2\sin^2\phi\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + \rho^2\cos^2\phi}\\ &= \sqrt{\rho^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)} = \rho\end{aligned}$$

eins og við var að búast og svæðinu $\mathcal{D}$ má lýsa með

$$0 \le \rho \le 2 \ \text{ og }\ 0 \le \theta \le \pi \ \text{ og }\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}.$$

Heildið er þá

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^2 \rho\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\right)d\theta\right)d\phi\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\ d\phi \cdot \int_0^{\pi} d\theta \cdot \int_0^2 \rho^3 d\rho\\ &= \Big[-\cos(\phi)\Big]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=2}\\ &= 4\pi.\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 4.8** Reiknið massa hálfa boltans H með geisla a, lýst með

$$0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

sem hefur breytilegan eðlismassa í rúminu háðan ρ, gefinn með þéttleikafallinu

$$f(\rho, \theta, \phi) = k(2a - \rho)$$

þar sem k er fasti.
Lausn: Við reiknum

$$\begin{aligned}
\iiint_H k(2a-\rho)dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a k(2a-\rho)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \, d\phi \cdot k \int_0^a (2a\rho^2 - \rho^3)d\rho \\
&= 2\pi \cdot \Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \cdot k \left[\frac{2}{3}a\rho^3 - \frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=a} \\
&= \frac{5}{6}ka^4\pi.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 4.9** Finnum rúmmál svæðisins $\mathcal{D}$, sem er inni í kúlunni

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$$

og inni í keilunni

$$0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Lausn 1: Dæmið snýst um að finna lýsingu á svæðinu $\mathcal{D}$ í kúluhnitum. Augljóslega hefur kúlan lýsinguna $\rho \le a$. Þar sem

$$\begin{pmatrix} x(\rho,\theta,\phi) \\ y(\rho,\theta,\phi) \\ z(\rho,\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta\sin\phi \\ \rho\sin\theta\sin\phi \\ \rho\cos\phi \end{pmatrix}$$

og þá

$$x^2 + y^2 = (\rho\cos\theta\sin\phi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\phi)^2 = \rho^2\sin^2\phi,$$

sjáum við að

$$0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$$

er jafngilt

$$0 \le \rho\cos\phi \le \rho\sin\phi.$$

Af þessu leiðir að

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$$

og eftirleikurinn er auðveldur. Við heildum

$$\iiint_{\mathcal{D}} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/4} \sin(\phi)\, d\phi \cdot \int_0^a \rho^2 \, d\rho = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{a^3}{3}.$$

Lausn 2: Við gætum allt eins leyst þetta dæmi með tvöföldu heildi; með því að reikna fyrst rúmmálið undir kúlunni á réttu svæði og draga svo frá rúmmálið sem er undir keilunni á sama svæði. Við finnum þá fyrst hvar kúlan og keilan skerast til að finna hvaða svæði á að heilda yfir. Nú er á yfirborði keilunnar $z^2 = z^2 + y^2$ og ef við setjum það inn í formúluna fyrir yfirborði kúlunnar $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ fæst

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = a^2 \text{ eða } x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Keilan og kúlan skerast því í hring með geisla $a/\sqrt{2}$ og einnig er $z = a/\sqrt{2}$. Í pólhnitum er kúluhvelinu lýst með

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow r^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{a^2 - r^2}, \text{ þ.s. } z \geq 0,$$

og í pólhnitum er keilan

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z = r$$

Við finnum nú rúmmálið með því að reikna fyrst rúmmálið af

$$0 \leq r \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{og} \quad 0 \leq z \leq f(r,\theta) = \sqrt{a^2 - r^2},$$

þ.e.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta &= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=\frac{a}{\sqrt{2}}} \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{3}\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(a^2)^{\frac{3}{2}} \right] \\
&= \frac{\pi a^3}{3}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),
\end{aligned}$$

og draga svo frá rúmmálið

$$0 \leq r \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{og} \quad 0 \leq z \leq g(r,\theta) = r,$$

þ.e.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r \cdot r\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{3} r^3\right]_{r=0}^{r=\frac{a}{\sqrt{2}}} = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}.$$

Útkoman er eins og áður

$$[\text{rúmmál}] = \frac{\pi a^3}{3}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{a^3}{3}.$$

■

Æfingar 4.3

Æfing 4.3.1 Reiknið
$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2}\, dV$$
þar sem
$$\mathcal{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \leq 4 \;\text{ og }\; z \geq 0 \;\text{ og }\; x \leq 0\}$$
■

Æfing 4.3.2 Heildið fallið
$$f(x,y,z) = x+y+z$$
yfir svæðið $\mathcal{R}$, sem er inni í keilunni
$$z \geq 2\sqrt{x^2+y^2}$$
og einnig inni í kúlunni
$$x^2+y^2+z^2 \leq a^2.$$
■

4.4 Kynning á stikuðum flötum í $\mathbb{R}^3$

Við skoðum nú hvernig stika má fleti í $\mathbb{R}^3$. Við skoðum einungis fleti sem hægt er að lýsa sem myndmengi diffranlegs falls $\mathbf{r}(u,v)$, skilgreindu á svæði $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ í planinu og sem tekur gildi í $\mathbb{R}^3$. Að auki er ætlast til þess að $\mathbf{r}$ sé eintækt á $\mathcal{D}$, þ.e. ef $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}(u^*,v^*)$ þá er $u = u^*$ og $v = v^*$, og þ.a. vektorarnir
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$$
eru ekki samsíða fyrir sérhvert $(u,v) \in \mathcal{D}$. Við segjum að $\mathbf{r}$ stiki flötinn
$$\mathcal{S} := \{\mathbf{r}(u,v) \;:\; (u,v) \in \mathcal{D}\}.$$

Regla 4.4.1 Ef $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ er diffranlegt fall, þá er $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix},$$
stikun á grafi fallsins $z = f(x,y)$ í $\mathbb{R}^3$.

Athugið að grafið í Reglu 4.4.1 hér að ofan er alltaf flötur í okkar skilningi því
$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ f(u^*,v^*) \end{pmatrix} = \mathbf{r}(u^*,v^*)$$

þýðir að $u = u^*$ og $v = v^*$ og að auki eru

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

ekki samsíða.

■ **Dæmi 4.10** Stikið planið $z = 1 - x - y$.
Lausn: Með því að setja

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix}, \quad \text{þ.s. } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

fæst stikun á planinu. ■

Stundum viljum við bara stika einhvern ákveðinn hluta af fletinum, þá getum við takmarkað formengi fallsins.

■ **Dæmi 4.11** Stikið þann hluta plansins $z = 1 - x - y$ sem er í 1. áttungi, s.s. þar sem $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$.
Lausn: Setjum

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix}, \quad \text{þ.s. } (x,y) \in \mathcal{D}.$$

Hér er formengi fallins

$$\mathcal{D} = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 1 - x \text{ og } 0 \leq x \leq 1 \Big\},$$

sem sést auðveldlega frá

$$0 \leq z \leq 1 - x - y \quad \text{þ.e.} \quad 0 \leq y \leq 1 - x.$$

■

■ **Dæmi 4.12** Með því að halda einu hniti í einhverju hnitakerfi fyrir $\mathbb{R}^3$ föstu fæst flötur í $\mathbb{R}^3$. Skoðum t.d. kúluhnit ρ, θ og ϕ:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta, \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta, \\ z &= \rho \cos\phi. \end{aligned}$$

Höldum $\rho = R$ föstu. Þá er $\mathbf{r} : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R \sin\phi \cos\theta \\ R \sin\phi \sin\theta \\ R \cos\phi \end{pmatrix},$$

stikun á hálfkúluhvelinu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ og $z \geq 0$. ■

Kúluhvelið $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ má stika með $\mathbf{r} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R \sin\phi \cos\theta \\ R \sin\phi \sin\theta \\ R \cos\phi \end{pmatrix},$$

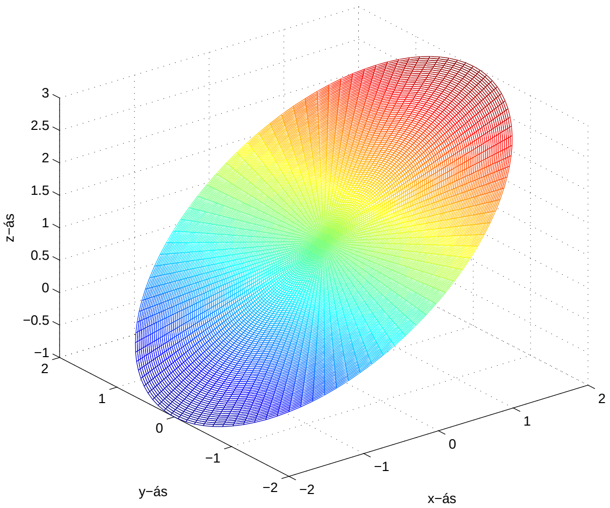
þar sem fastinn $R > 0$ er geisli eða radíus kúlunnar.

■ **Dæmi 4.13** Stikið þann hluta plansins $z = 1+x$ sem er inni í sívalningnum $x^2+y^2 \leq 4$.
Lausn: Látum $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, með

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (1 + x)\,\mathbf{k}$$

og þar sem formengi fallins $\mathbf{r}$ er svæðið $\mathcal{D}$ sem afmarkast af $x^2 + y^2 \leq 4$.

■



Mynd 4.3: Í Dæmi 4.13 stikum við hluta af plani.

■ **Dæmi 4.14** Stikið þann hluta skálarinnar $z = x^2 + y^2$ sem er undir planinu $z = 1 - x$.
Lausn: Látum $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, með

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

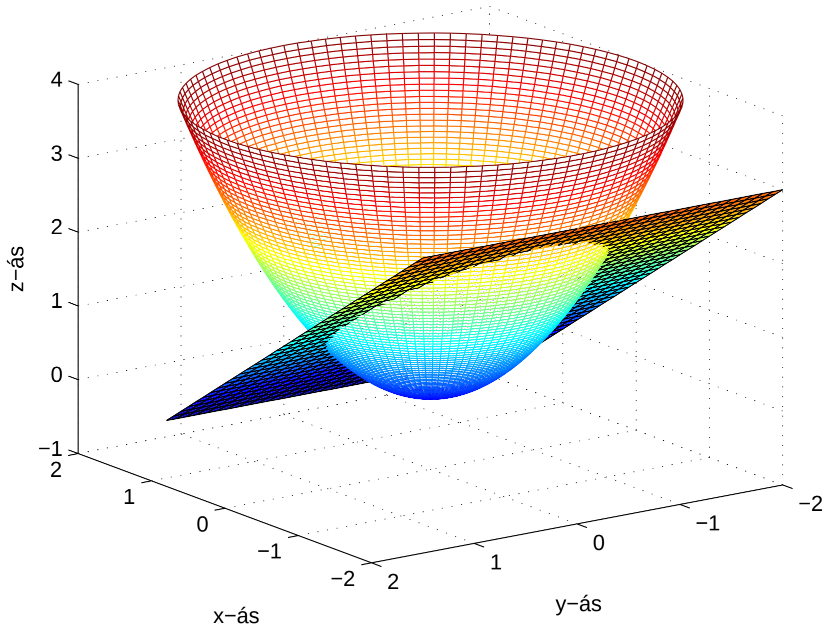
og þar sem formengi fallins $\mathbf{r}$ er svæðið $\mathcal{D}$ sem afmarkast af

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{5}{4}.$$

Svæðið $\mathcal{D}$ er reiknað út á eftirfarandi hátt: Við leysum saman fyrir x og y

$$x^2 + y^2 = z \leq 1 - x \quad \text{þ.e.} \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{5}{4}.$$

Lýsingin $x^2 + y^2 \le 1 - x$ á $\mathcal{D}$ er rétt, en hin formúlan er betri því hún segir okkur að $\mathcal{D}$ sé hringskífa með miðpunkt í $(-1/2, 0)$ og geisla $\sqrt{5}/2$ og lýsir því svæðinu á mun sjónrænni hátt. ■



Mynd 4.4: Í Dæmi 4.14 stikum við þann hluta af skálinni sem er undir planinu.

4.5 Heildi yfir stikað yfirborð

Hvernig skildi maður heilda fall g yfir stikaða fleti? Svarið er gefið með formúlunni

$$\int_S g(x,y,z)dS := \int_{(u,v)\in[a,b]\times[c,d]} g(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{n}(u,v)\| du\, dv.$$

Hér stendur S í dS fyrir flöt (e. surface) og við þurfum einmitt að skoða þessa stærð nánar. Við rifjum upp að fyrir hnitaskipti á $\mathbb{R}^2$, gefin með falli $\mathbf{F}(u,v) = (x(u,v)\ y(u,v))^T$, varð $dA = dx\, dy$ að $dA = |\det(D\mathbf{F}(u,v))|\, du\, dv$. Ástæðan er sú að

$$|\det(D\mathbf{F}(u,v))| = | \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} |$$

er flatamál samsíðungsins sem vektorarnir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

mynda.

Látum nú $\mathbf{r}$ vera stikun á fletinum $\mathcal{S}$ og skilgreinum vektorinn $\mathbf{n}(u,v)$ fyrir sérhvert (u,v) sem

$$\mathbf{n}(u,v) := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v).$$

Þá er vektorinn $\mathbf{n}(u,v)$ hornréttur bæði á $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ og hefur lengd sem er jöfn flatarmáli samsíðungsins sem $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ mynda.

Regla 4.5.1 Þegar fall $g(x,y,z)$ er heildað yfir flötinn $\mathcal{S}$, stikaðann af $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, er

$$\int_{\mathcal{S}} g(x,y,z)dS := \int_{(u,v)\in\mathcal{D}} g(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{n}(u,v)\|du\,dv.$$

Við skulum nú reikna út lengdina af $\mathbf{n}$ almennt fyrir þær stikanir sem við þekkjum. Flötur $\mathcal{S}$ sem er stikaður með $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix},$$

hefur normalvigur

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og lengd þessa vigurs er

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}.$$

Athugið að í þessum formúlum eru

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

föll af u og v.

■ **Dæmi 4.15** Heildum fallið $g(x,y,z) = z$ yfir þann hluta keiluhvelsins $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sem er á milli $z = 0$ og $z = 1$.
Lausn: Við byrjum á að stika yfirborðið $\mathcal{S}$ með $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k},$$

þar sem $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$, því $0 \leq z \leq 1$ gildir einmitt á $\mathcal{D}$. Við reiknum nú lengdina af normalvigrinum

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{n}(x,y)\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + 1} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1} \\
&= \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

og

$$g(\mathbf{r}(x,y)) = g(x,y,\sqrt{x^2+y^2}) = \sqrt{x^2+y^2}$$

svo við getum reiknað

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} g(x,y,z)\,dS &= \int_{(x,y)\in\mathcal{D}} g(\mathbf{r}(x,y))\|\mathbf{n}(x,y)\|dx\,dy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{2}\,dx\,dy \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3},
\end{aligned}
$$

þar sem við skiptum í pólhnit í síðasta heildinu. ■

Skoðum nú kúluhvel með geisla R, sem við getum stikað með $\mathbf{r} : [0,\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} x(\phi,\theta) \\ y(\phi,\theta) \\ z(\phi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin\phi\cos\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Hér er

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}(\phi,\theta) &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}(\phi,\theta)\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}(\phi,\theta) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\phi} & \dfrac{\partial y}{\partial\phi} & \dfrac{\partial z}{\partial\phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\partial z}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\partial z}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta} - \frac{\partial y}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Nú er

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\partial z}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta} &= (R\cos\phi\sin\theta)\cdot 0 - (-R\sin\phi)\cdot(R\sin\phi\cos\theta) \\
&= R^2(\sin\phi)^2\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}-\frac{\partial z}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} &= (R\cos\phi\cos\theta)\cdot 0-(-R\sin\phi)\cdot(-R\sin\phi\sin\theta)\\ &= -R^2(\sin\phi)^2\sin\theta\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}-\frac{\partial y}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} &= (R\cos\phi\cos\theta)\cdot(R\sin\phi\cos\theta)-(R\cos\phi\sin\theta)\cdot(-R\sin\phi\sin\theta)\\ &= R^2\sin\phi\cos\phi(\cos\theta)^2+R^2\sin\phi\cos\phi(\sin\theta)^2\\ &= R^2\sin\phi\cos\phi.\end{aligned}$$

Sem sagt er

$$\mathbf{n}(\phi,\theta)=\begin{pmatrix}R^2\sin^2\phi\cos\theta\\ R^2\sin^2\phi\sin\theta\\ R^2\sin\phi\cos\phi\end{pmatrix}$$

og því, munum að $0\le\phi\le\pi$ svo $\sin\phi\ge 0$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{n}(\phi,\theta)\| &= \sqrt{R^4(\sin\phi)^4(\cos\theta)^2+R^4(\sin\phi)^4(\sin\theta)^2+R^4(\sin\phi)^2(\cos\phi)^2}\\ &= R^2\sqrt{(\sin\phi)^4+(\sin\phi)^2(\cos\phi)^2}\\ &= R^2\sin\phi\sqrt{(\sin\phi)^2+(\cos\phi)^2}\\ &= R^2\sin\phi.\end{aligned}$$

■ **Dæmi 4.16** Heildið fallið $f(x,y,z)=x^2+y^2$ yfir hálfkúluhvelið

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad \text{og} \quad z\ge 0,$$

þar sem $R>0$ er fasti.
Lausn: Nú er $\mathbf{r}:[0,\pi/2]\times[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(\phi,\theta)=\begin{pmatrix}R\sin\phi\cos\theta\\ R\sin\phi\sin\theta\\ R\cos\phi\end{pmatrix},$$

stikun á hálfkúluskelinni $x^2+y^2+z^2=R^2$ og $z\ge 0$. Þá er

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS &= \int_{(\phi,\theta)\in[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} f(\mathbf{r}(\phi,\theta))\|\mathbf{n}(\phi,\theta)\|d\phi\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}(R^2\sin^2\phi\cos^2\theta+R^2\sin^2\phi\sin^2\theta)R^2\sin\phi\,d\theta\right)d\phi\\ &= R^4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\sin^3\phi\,d\theta\right)d\phi\\ &= 2\pi R^4\int_0^{\pi/2}\sin^3\phi\,d\phi\\ &= 2\pi R^4\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\phi\right)\sin\phi\,d\phi\\ &= 2\pi R^4\int_1^0(1-u^2)\cdot(-1)du\\ &= 2\pi R^4\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{u=0}^{u=1}\\ &= \frac{4}{3}\pi R^4,\end{aligned}$$

þar sem við notuðum í lokin breytuskiptin $u = \cos\phi$ með $du = -\sin\phi$, $u(0) = 1$ og $u(\pi/2) = 0$. ■

Samantekið: Þegar við heildum yfir yfirborð $\mathcal{S}$ er

$$dS = \|\mathbf{n}(u,v)\| du\, dv.$$

- Yfirborð stikað með $\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + f(u,v)\,\mathbf{k}$ hefur normal með lengd

$$\|\mathbf{n}(u,v)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}.$$

- Kúluskel stikuð í kúluhnitum með

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\sin\phi\cos\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix}$$

hefur normal með lengd

$$\|\mathbf{n}(\phi,\theta)\| = R^2\sin\phi.$$

Æfingar 4.5

Æfing 4.5.1 Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta plansins $x+y+z=1$ sem er í fyrsta áttung ($x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$). Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} xyz\; dS.$$

■

Æfing 4.5.2 Látum $\mathcal{S}$ vera yfirborð þess svæðis $\mathcal{T}$ sem er inni í keilunni

$$z \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

og sem er líka inni í kúlunni

$$x^2+y^2+z^2 \leq 4.$$

Heildið fallið

$$f(x,y,z) = x+1$$

yfir yfirborðið $\mathcal{S}$. ■

4.6 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 4.1.1 Við viljum finna rúmmál takmarkaða rúmskikans $\mathcal{R}$ sem afmarkast af $x = y^2$ og plönunum $z = 0$ og $x + z = 1$. Við notum til þess þrefalt heildi, þar sem við heildum 1 yfir $\mathcal{R}$. Setjið rétt mörk á heildin hér fyrir neðan (athugið að röð heildanna er ekki sú sama).

$$\int_{\mathcal{R}} dV = \iiint dz\, dx\, dy = \iiint dy\, dz\, dx = \frac{8}{15}.$$

■ **Lausn**

$$\int_{\mathcal{R}} dA = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{1-x} dz\, dx\, dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\, dz\, dx = \frac{8}{15}$$

Æfing 4.1.2 Finnið massa hlutarins $\mathcal{T}$ ef þéttifall (e. density function) hans er gefið sem $\delta(x,y,z) = z$. $\mathcal{T}$ er sá hluti í 1. áttungi (e. 1. octant; $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$) sem er undir planinu $z = 6 - 3x - 2y$. Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} \delta(x,y,z)\, dV.$$

■ **Lausn**

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{T}} z\, dV &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{6-3x-2y} z\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=6-3x-2y} dy\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6-3x-2y)^2 dy\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\frac{1}{3}(6-3x-2y)^3 \frac{1}{-2}\right]_{y=0}^{y=3-\frac{3}{2}x} dx \\
&= \frac{1}{12}\int_0^2 (6-3x)^3 dx \\
&= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{4}(6-3x)^4 \frac{1}{-3}\right]_{x=0}^{x=2} \\
&= \frac{1}{12^2} \cdot 6^4 \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Æfing 4.2.2 Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} (x^2 + y^2)\, dV,$$

þar sem $\mathcal{T}$ er sá hluti innan sívalningsins $x^2 + y^2 \leq 4$ sem er yfir xy-planinu ($z = 0$) og undir planinu $z = x$.

■ **Lausn** Hér liggur beint við að skipta í sívalningshnit. Þá er

$$r^2 = x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{og} \quad 0 \leq z \leq x = r\cos\theta$$

og við reiknum

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{T}} (x^2 + y^2) dV &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{r\cos\theta} r^2 \cdot r \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^4 \cos\theta \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \cdot \int_0^2 r^4 \, dr \\
&= \Big[\sin\theta\Big]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{1}{5} r^5\right]_{r=0}^{r=2} \\
&= \frac{64}{5}.
\end{aligned}$$

Æfing 4.3.2 Heildið fallið

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

yfir svæðið $\mathcal{R}$, sem er inni í keilunni

$$z \geq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

og einnig inni í kúlunni

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

■ **Lausn** Sjáum fyrst að kúlan er samhverf um $x = 0$ og um $y = 0$ (en ekki um $z = 0$ þar sem við erum bara með þann hluta þar sem $z \geq 0$) og fallið x er oddstætt um $x = 0$ og fallið y er oddstætt um $y = 0$, svo framlag þessara liða í heildinu er ekkert. Við skiptum í kúluhnit ρ, ϕ, θ og þá eru mörkin

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

og

$$\rho\cos\phi = z \geq 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(\rho\cos\theta\sin\phi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\phi)^2} = 2\rho\sin\phi,$$

sem við umritum sem

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi \leq \frac{1}{2} \quad \text{og fáum} \quad 0 \leq \phi \leq \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nú er eftirleikurinn auðveldur:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} (x+y+z)\,dV = \int_{\mathcal{R}} z\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)} \rho\cos\phi\cdot\rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^a \rho^3\cdot\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)} \cos\phi\sin\phi\,d\phi \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot\left[\frac{1}{2}(\sin\phi)^2\right]_{\phi=0}^{\phi=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi a^4}{4}\left(\sin(\arctan\left(\frac{1}{2}\right))\right)^2 \\
&= \frac{\pi a^4}{4}\cdot\frac{1}{5} \\
&= \frac{\pi a^4}{20}.
\end{aligned}$$

Það að

$$\left(\sin(\arctan\left(\frac{1}{2}\right))\right)^2 = \frac{1}{5}$$

má reikna með reiknivél, en einnig er hægt að reikna þetta nákvæmlega með því að athuga að fyrir $\alpha \geq 0$ er $0 \leq \arctan\alpha = \beta < \pi/2$ og þá $\cos\beta \geq 0$. Við höfum því

$$\arctan\alpha = \beta \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}.$$

Við getum svo einangrað $\sin\beta$ í þessari jöfnu og fáum

$$\sin\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad \text{eða} \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right).$$

Því er

$$\sin(\arctan\alpha)) = \sin(\arcsin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Með því að setja $\alpha = 1/2$ inn í þessa formúlu fæst svo

$$\left(\sin(\arctan\left(\frac{1}{2}\right))\right)^2 = \left(\frac{1/2}{\sqrt{1+1/2^2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}.$$

Æfing 4.5.1 Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta plansins $x+y+z=1$ sem er í fyrsta áttung ($x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$). Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} xyz\,dS.$$

■ **Lausn** Stikum yfirborðið með

$$\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix},$$

þar sem
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 1-x \text{ og } 0 \leq x \leq 1\}.$$
Nú er normall á planið gefinn með
$$\mathbf{n}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}(1-x-y)\,\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial y}(1-x-y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$
svo $||\mathbf{n}(x,y)|| = \sqrt{3}$. Við höfum því að $dS = \sqrt{3}\,dx\,dy$. Reiknum nú
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} xyz\,dS &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y)\sqrt{3}\,dy\,dx \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 \left[\frac{1}{2}x(1-x)y^2 - \frac{1}{3}xy^3\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 \left(x - 3x^2 + 3x^3 - x^4\right)\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{1}{2}x - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{120}.
\end{aligned}$$

Æfing 4.5.2 Látum $\mathcal{S}$ vera yfirborð þess svæðis $\mathcal{T}$ sem er inni í keilunni
$$z \geq \sqrt{x^2+y^2}$$
og sem er líka inni í kúlunni
$$x^2+y^2+z^2 \leq 4.$$
Heildið fallið
$$f(x,y,z) = x+1$$
yfir yfirborðið $\mathcal{S}$.

■ **Lausn** Sjáum fyrst að yfirborðið er samhverft um $x=0$ og fallið $g(x,y,z)=x$ er oddstætt um $x=0$, þ.e. $g(-x,y,z) = -g(x,y,z)$, svo
$$\int_{\mathcal{S}} (x+1)\,dS = \int_{\mathcal{S}} 1\,dS.$$
Yfirborðið hefur tvo hluta, keiluhvelið sem við táknum $\mathcal{S}_1$ og kúlutoppsyfirborðið sem við táknum $\mathcal{S}_2$, og við heildum yfir hvorn hlutann fyrir sig. Stikum fyrst keiluhvelið $\mathcal{S}_1$ með
$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k},$$
þar sem $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ uppfylla $x^2+y^2 \leq 2$. Normallinn fæst úr formúlunni
$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}
\end{aligned}$$

og því er

$$\|\mathbf{n}(x,y)\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

Við heildum

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_1} 1\, dS &= \int_{x^2+y^2\leq 2} \sqrt{2}\, dx\, dy \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r\, dr \\
&= 2\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

Stikum svo kúlutoppshvelið $\mathcal{S}_2$ með

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = 2\sin(\phi)\cos(\theta)\,\mathbf{i} + 2\sin(\phi)\sin(\theta)\,\mathbf{j} + 2\cos(\phi)\,\mathbf{k},$$

þar sem við nýttum okkur að við þekkjum kúluhnit. Mörkin á ϕ og θ fást sem $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og skilyrðið $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ er í kúluhnitum

$$\rho\cos\phi = z \geq \sqrt{x^2+y^2} = \rho\sin\phi, \quad \text{þ.e. } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4},$$

svipað og við sáum í lausninni á Dæmi 4.3.2.

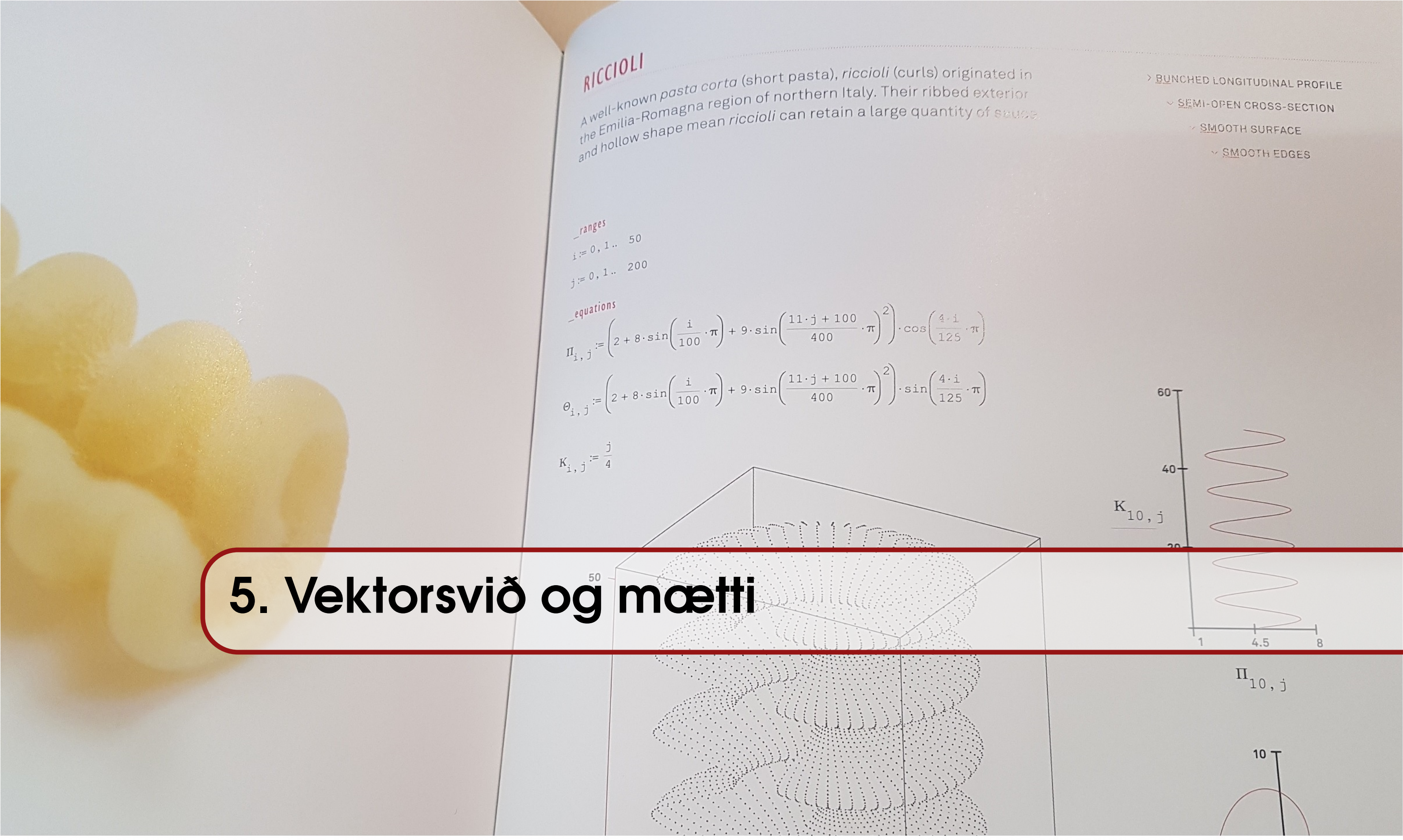
Við notum svo beint formúluna fyrir lengd normalsins $\|\mathbf{n}(\phi,\theta)\| = R^2\sin\phi$, sem við höfum leitt út og fáum $\|\mathbf{n}(\phi,\theta)\| = 4\sin\phi$.

Við heildum

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin(\phi)\, d\phi\, d\theta = 4\cdot 2\pi \cdot \Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} = 8\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Samantekið höfum við því

$$\int_{\mathcal{S}}(x+1)\, dS = \int_{\mathcal{S}} 1\, dS = \int_{\mathcal{S}_1} 1\, dS + \int_{\mathcal{S}_2} 1\, dS = 2\sqrt{2}\,\pi + 4(2-\sqrt{2})\,\pi = 2(4-\sqrt{2})\pi.$$



5. Vektorsvið og mætti

Í þessum hluta kynnumst við vektorsviðum og eiginleikum þeirra. Við fjöllum sérstaklega um varðveitin vektorsvið og mætti þeirra, sem eru afar mikilvæg hugtök í eðlisfræði. Auk þess lærum við að heilda vektorsvið eftir ferli. Athugið að vektorsvið eru einnig kölluð vigursvið, alveg eins og maður talar jöfnum höndum um vektora og vigra.

5.1 Tölusvið og vektorsvið

Föll af gerðinni $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ kallast *tölusvið* (e. scalar field).

■ **Dæmi 5.1** Dæmi um tölusvið er fall $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, sem gefur hitastig sem fall af staðsetningu. ■

Föll af gerðinni $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (stundum líka $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$), eða almennar $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ þar sem $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, eru kölluð *vektorsvið* (e. vector field).

Þegar við tölum um vektorsvið gerum við yfirleitt ráð fyrir að allir liðir fallsins $\mathbf{F}$ hafi samfelldar hlutafleiður af öllum stigum, þó að tilvist og samfelldni annarsstigs hlutafleiðna nægi samt fyrir flest sem á eftir kemur.

■ **Dæmi 5.2** Stigull falls $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ er vektorsvið $\nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Ef $f(x, y, z)$ mælir t.d. hitastig, þá gefur vektorsviðið $\nabla f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ í punktinum (x, y, z) upplýsingar um í hvaða stefnu hitabreytingin er örust út frá punktinum (x, y, z). ■

Yfirleitt lætur maður gildi vektorsviðs, þ.e. $\mathbf{F}(x, y, z)$ í einhverjum punkti (x, y, z), vera dálkvektor. Stigull ∇f tölusviðs f er yfirleitt látið vera línuvektor. Samt talar maður um að stigullinn ∇f sé vektorsvið og meinar þá eiginlega fallið $(x, y, z) \mapsto (\nabla f(x, y, z))^T$. Þegar engin hætta er á misskilningi eða þegar það skiptir ekki miklu máli, þá talar maður samt bara um vektorsviðið ∇f. Munurinn á línuvektor og dálkvektor skiptir helst máli í fylkjamargföldun og í tilfelli vektorsviða þá t.d. í Keðjureglunni.

■ **Dæmi 5.3** Dæmi um vektorsvið $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er rafsvið sem myndast af hleðslu,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_1(\mathbf{r})\,\mathbf{i} + E_2(\mathbf{r})\,\mathbf{j} + E_3(\mathbf{r})\,\mathbf{k}.$$

Vigursviðið $\mathbf{E}$ í punkti $\mathbf{r} = (x, y, z)$ gefur þá stefnu og styrk rafsviðsins í punktinum. ■

5.1.1 Sviðslínur

Við getum séð t.d. rafsvið fyrir okkur sem sviðslínur sem ganga út frá hleðslunum sem valda rafsviðinu. Við finnum sviðslínur með því að setja upp diffurjöfnu sem má leysa með svokölluðum aðskilnaði breytistærða. Fyrir vektorsvið

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

setjum við upp diffurjöfnuna

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}$$

■ **Dæmi 5.4** Finnum sviðslínur fyrir vigursviðið $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$.
Lausn: Við setjum upp diffurjöfnuna

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x\,dx = -y\,dy$$

og heildum báðar hliðar:

$$\int x\,dx = -\int y\,dy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -y^2 + C \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Sem sagt eru sviðslínurnar hringir með miðju í núll. ■

Vigursviðið í Dæmi 5.4 er hægt að teikna í Matlab með því að nota skipanirnar

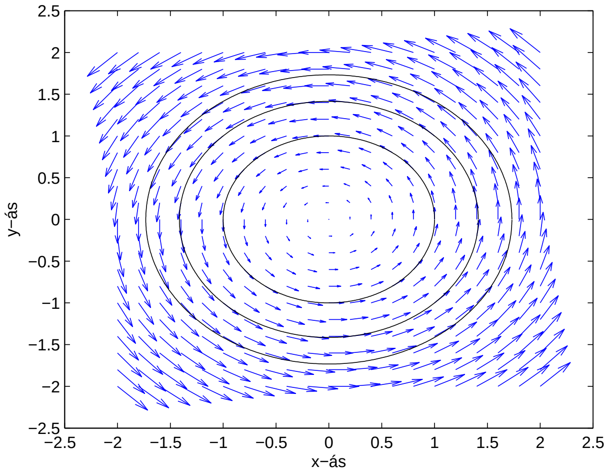
```
x=-2:0.2:2;
[x,y] = meshgrid(x,x);
quiver(x,y,-y,x,1.5)
```

■ **Dæmi 5.5** Finnum sviðslínur fyrir vigursviðið $\mathbf{F}(x, y, x) = xz\,\mathbf{i} + 2x^2z\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$.
Lausn: Byrjum á að setja upp diffurjöfnuna.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{2x^2z} = \frac{dz}{x^2}.$$

Leysum fyrstu tvo hluta saman og fáum

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{2x^2z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2\,dx}{x} = \frac{z\,dy}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \int 2x\,dx = \int dy \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$



Mynd 5.1: Hér sjáum við vigursviðið í Dæmi 5.4 og sviðslínur þess fyrir $C = 1, 2, 3$.

Leysum svo seinni tvo hlutana saman og fáum

$$\frac{dy}{2x^2 z} = \frac{dz}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2\,dy}{2x^2} = z\,dz \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int dy = \int z\,dz \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sviðslínurnar eru skurðferlar þessara tveggja mengja af plönum $y = x^2+k$ og $y = z^2+c$, $c, k \in \mathbb{R}$.

■

Æfingar 5.1

Æfing 5.1.1 Teiknið mynd af vigursviðinu $\mathbf{F}(x, y) = \nabla(xy + 2x)$ og finnið sviðslínur þess. Hægt er að nota skipunina `quiver` í Matlab til að teikna vigursviðið. ■

5.2 Varðveitin vektorsvið hafa mætti

Látum nú $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, þar sem $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, vera eitthvert tölusvið. Þá er fallið $\mathbf{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\nabla\phi(\mathbf{x})]^T,$$

vektorsvið. Fallið ϕ er sagt vera *mætti* (e. potetnial) vektorsviðsins $\mathbf{G}$.

Nú er eðlileg spurning: Hafa öll vektorsvið mætti? Með öðrum orðum: Ef $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, þar sem $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, er eitthvert vektorsvið, er þá til tölusvið $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ þ.a. $[\nabla\phi(\mathbf{x})]^T = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ fyrir öll $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$?

Skoðum $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Þá er

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = 0$$

og

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = 1.$$

Þess vegna getur $\mathbf{F}$ ekki haft mætti! Af hverju? Ef $\mathbf{F}$ hefði mætti $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, þ.e.

$$[\nabla\phi(x,y,z)]^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x,y,z),$$

að þá mundi gilda

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z),$$

en við vorum að sjá að

$$0 = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = 1.$$

Svarið er því almennt nei, vektorsvið hefur ekki endilega mætti.

Skilgreining 5.2.1 Vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, þar sem $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, sem hefur mætti er sagt vera *varðveitið* (e. conservative).

ATH Athugið að nauðsynlegt, en ekki nægjanlegt, skilyrði fyrir því að vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$, hafi mætti er að

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad \text{og} \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad \text{og} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Með þessu er oft hægt að útiloka á auðveldan hátt að gefið vektorsvið sé varðveitið.

■ **Dæmi 5.6** Þyngdarsvið jarðar er vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sem úthlutar sérhverjum punkti með stöðuvektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ vektor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ þ.a. á massa m sem er staðsettur í $\mathbf{r}$ virkar krafturinn $m\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Almennt myndar punktmassi M með staðsetningu í $\mathbf{r}_0 = (x_0\ y_0\ z_0)^T \in \mathbb{R}^3$ þyngdarsvið

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -GM\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}$$

í rúminu, sem er varðveitið í $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_0\}$. Við sýnum að þetta vektorsvið sé varðveitið með því að sýna að $\mathbf{F}$ hafi mætti. Nánar tiltekið, sýnum við að

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{GM}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}$$

sé mætti fyrir $\mathbf{F}$.

Með $\mathbf{r} = (x\ y\ z)^T$ gildir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{GM}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{GM}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}2(x-x_0) \\
&= \frac{-GM(x-x_0)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}.
\end{aligned}$$

Með samskonar reikningum sér maður að

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(\mathbf{r}) = \frac{-GM(y-y_0)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3} \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial z}\phi(\mathbf{r}) = \frac{-GM(z-z_0)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}.$$

En þá er

$$\begin{aligned}
[\nabla\phi(\mathbf{r})]^T &= \begin{pmatrix} \frac{-GM(x-x_0)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3} & \frac{-GM(y-y_0)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3} & \frac{-GM(z-z_0)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3} \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{-GM}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^3}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

og við höfum sýnt að ϕ er mætti fyrir $\mathbf{F}$ og þar með er $\mathbf{F}$ varðveitið vektorsvið. ■

■ **Dæmi 5.7** Er vektorsviðið $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ varðveitið? Ef svo er þá finnið mætti fyrir $\mathbf{F}$.
Lausn: Athugum fyrst að

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

svo $\mathbf{F}$ er mögulega geymið. Athugum hvort við getum fundið mætti. Leysum fyrst

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Rightarrow \phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$$

og svo

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -y \Rightarrow \phi(x, y) = -\frac{y^2}{2} + f(x).$$

Hérna eru $g(y)$ og $f(x)$ einhver ótiltekin föll af y og x. Ef þessar tvær jöfnur fyrir ϕ eru samræmanlegar höfum við fundið mætti. Athugum að

$$\phi(x, y) = -\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

uppfyllir þær báðar með $g(y) = -y^2/2$ í þeirri fyrri og $f(x) = x^2/2$ í þeirri síðari. Þar með er ϕ mætti fyrir $\mathbf{F}$ og vektorsviðið $\mathbf{F}$ er varðveitið. ■

Æfingar 5.2

Æfing 5.2.1 Ákvarðið hvort vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{x^2+y^2}$$

sé varðveitið (geymið, e. conservative) og finnið mætti (e. potential) þess ef svo er. ■

Æfing 5.2.2 Ákvarðið hvort vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy^3\sin(z)\,\mathbf{i} + 3x^2y^2\sin(z)\,\mathbf{j} + x^2y^3\cos(z)\,\mathbf{k},$$

sé varðveitið (geymið, e. conservative) og finnið mætti (e. potential) þess ef svo er. ■

5.3 Ferilheildi vigursviða

Látum $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera vektorsvið og látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^3$. Látum $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera einhverja stikun á ferlinum $\mathcal{C}$. Ferilheildi $\mathbf{F}$ eftir ferilinum $\mathcal{C}$ er nú skilgreint sem heildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt.$$

Sýna má að þetta heildi er óháð stikuninni $\mathbf{r}$, nema hvað að ef $\mathbf{a}$ er upphafspunktur $\mathcal{C}$ og $\mathbf{b}$ er endapunktur $\mathcal{C}$, að þá skiptir máli hvort maður stikar frá $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$ eða frá $\mathbf{b}$ til $\mathbf{a}$. Maður þarf sem sagt að taka það fram sérstaklega.

Annar ritháttur sem oft er notaður fyrir ferilheildi vektorsviðs

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1(\mathbf{r})\,\mathbf{i} + F_2(\mathbf{r})\,\mathbf{j} + F_3(\mathbf{r})\,\mathbf{k}$$

eftir ferli $\mathcal{C}$ er

$$\int_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz.$$

Maður getur hugsað sér að $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ og þá þegar innfeldi $\mathbf{F}$ og $d\mathbf{r}$ er tekið fæst einmitt

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz.$$

Enn annar ritháttur sem oft er notaður er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\,ds.$$

Hér hugsar maður um $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{T}}\,ds$, þar sem $\hat{\mathbf{T}}$ er einingarvektor í stefnu $\mathbf{r}'$, sem sagt einingarsnertill (e. unit tangent) ferilsins, og ds er örsmæðarbogalengdin eins og þegar fall er heildað eftir ferli.

Ef $\mathcal{C}$ er lokaður ferill, þ.e. til er stikun á ferlinum með upphafspunkt $\mathbf{a}$ og endapunkt $\mathbf{b}$ þ.a. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, þá ritar maður oft

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \oint_{\mathcal{C}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \quad \text{eða} \quad \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds$$

fyrir ferilheildið yfir vektorsviðið. Hringurinn á að tákna að ferillinn sé lokaður.

■ **Dæmi 5.8** Látum $\mathbf{F}(x, y) = y^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$ vera vektorsvið og $\mathcal{C}$ vera línustykki með upphafspunkt í $(0\ 0)^T$ og endapunkt í $(1\ 1)^T$. Reiknið ferilheldi $\mathbf{F}$ eftir $\mathcal{C}$.
Lausn 1: Við stikum $\mathcal{C}$ með $\mathbf{r} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (t\ t)^T$. Þá er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

Lausn 2: Við stikum $\mathcal{C}$ með $\mathbf{r} : [0, \sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = 2^{-\frac{1}{2}}(t\ t)^T$. Þá er

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\sqrt{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 2t^2/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{3}{2} t^2 dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big[t^3 \Big]_{t=0}^{t=\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} 2\sqrt{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Niðurstaðan er sem sagt sú sama fyrir báðar stikanir eins og á að vera. ■

Fyrir varðveitin vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, þar sem $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, er ferilheildið yfir einhvern feril einungis háð upphafs- og endapunkti ferilsins, svo framarlega að $\mathcal{D}$ sé *samanhangandi svæði* í $\mathbb{R}^3$. Samanhangandi þýðir að hægt er að tengja saman sérhverja tvo punkta $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ í $\mathcal{D}$ með ferli sem liggur í svæðinu $\mathcal{D}$. Á ensku kallast samanhangadi svæði *connected* eða *path connected*.

Einfaldlega samanhangandi svæði (e. simply connected) er líka mikilvægt hugtak. Samanhangandi svæði kallast einfaldlega samanhangandi, ef sérhvern einfaldan lokaðan feril inni í svæðinu má draga saman í einn punkt á samfelldan hátt án þess að ferillinn fari út úr svæðinu. Dæmi um einfaldlega samanhangandi svæði er t.d. opin hringskífa í planinu. Dæmi um svæði sem ekki er einfaldlega samanhangandi er sama hringskífa, þar sem einn punktur $\mathbf{x}$, t.d. miðpunkturinn, hefur verið fjarlægður. Ástæðan er sú að einfaldan lokaðan feril sem umlykur þennan punkt $\mathbf{x}$, er ekki hægt að draga saman í einn punkt án þess að ferillinn skeri punktinn $\mathbf{x}$ einhverntíman.

Hvað með kúlu í rúminu, þar sem einn punktur hefur verið fjarlægður? Hvað ef heil lína sem fer í gegnum kúluna er fjarlægð? Í fyrra tilfellinu er svæðið einfaldlega samanhangandi en ekki í því síðara.

Eftirfarandi staðreynd er mjög mikilvæg.

Regla 5.3.1 Látum $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera vektorsvið, þar sem $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ er samanhangandi svæði. Þá eru eftirfarandi fullyrðingar jafngildar:

(a) $\mathbf{F}$ er varðveitið vektorsvið.

(b)
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$
fyrir alla lokaða ferla $\mathcal{C}$ sem liggja í $\mathcal{D}$.

(c) Ef $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ eru í $\mathcal{D}$ og $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ eru tveir ferlar sem liggja í $\mathcal{D}$ og hafa $\mathbf{a}$ sem upphafspunkt og $\mathbf{b}$ sem endapunkt, þá er
$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(d) Ef $\mathcal{D}$ er einfaldlega samanhangandi svæði, þá er
$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
jafngilt skilyrðunum (a), (b) og (c).

Til þess að átta okkur á liðum (a), (b) og (c) í reglunni hér að ofan getum við skoðað varðveitið vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, með mættið $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathcal{D}$ með upphafspunkt $\mathbf{a}$ og endapunkt $\mathbf{b}$. Þá er auðvelt að heilda vektorsviðið $\mathbf{F}$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$, stikaðan frá $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$, og niðurstaðan er
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}).$$
Svona er þetta vegna þess að fyrir hvaða stikun $\mathbf{r}$ sem er gildir skv. Keðjureglunni
$$(\phi \circ \mathbf{r})'(t) = \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) = [\nabla\phi(\mathbf{r}(t))]\, \mathbf{r}'(t) = [\nabla\phi(\mathbf{r}(t))]^T \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$
svo ef $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er einhver stikun á ferlinum $\mathcal{C}$ með $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ sem upphafspunkt og $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$ sem endapunkt, þá er
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (\phi \circ \mathbf{r})'(t)\, dt \\ &= (\phi \circ \mathbf{r})(b) - (\phi \circ \mathbf{r})(a) \\ &= \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) \\ &= \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}).\end{aligned}$$
Út frá þessu ætti að vera ljóst að fyrir varðveitið vektorsvið $\mathbf{F}$ hljóta (b) og (c) að gilda. Athugið einnig að ferill $\mathcal{C}$ sem er settur saman úr ferlum $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ eins og í (b), nema hvað $\mathcal{C}_2$ er stikaður í öfuga átt, ef lokaður ferill. Svolítið erfiðara er að átta sig á því að ef (b) og (c) gilda fyrir vektorsvið $\mathbf{F}$, að þá hljóti það að vera

varðveitið. Það er yfirleitt gert með því að festa einhvern punkt $\mathbf{a}$ og láta hann vera upphafspunkt ferils $\mathcal{C}$ og skilgreina svo

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \mathbf{x} \text{ er endapunktur } \mathcal{C}.$$

Það er ekki mjög erfitt að sýna að slíkt ϕ er vel skilgreint ef (b) og (c) gilda og að ϕ er mætti fyrir $\mathbf{F}$. T.d. til þess að sjá að

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x})$$

skoðar maður fyrir lítil h ferilsbút stikaðan með $\mathbf{r} : [0, h] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t\,\mathbf{i}$. Ef við látum nú $\mathcal{C}_h$ vera ferilinn sem fæst með að bæta aftan við ferilinn $\mathcal{C}$, sem er með $\mathbf{a}$ sem upphafspunkt og $\mathbf{x}$ sem endapunkt, ferilbútnum með $\mathbf{x}$ sem upphafspunkt og $\mathbf{x} + h\,\mathbf{i}$ sem endapunkt, fæst

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\phi(\mathbf{x}) &= \lim_{h\to 0+} \frac{\phi(\mathbf{x} + h\,\mathbf{i}) - \phi(\mathbf{x})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left(\int_{\mathcal{C}_h} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\right) \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left(\int_0^h \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt\right) \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left(\int_0^h \mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}\, dt\right) \\
&= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left(\int_0^h F_1(\mathbf{x} + t\,\mathbf{i})dt\right) \\
&= F_1(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Við notuðum Höfuðsetningu Stærðfræðigreiningarinnar í síðustu línunni. Á sama hátt sýnir maður að

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(\mathbf{x}) = F_2(\mathbf{x}) \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial z}\phi(\mathbf{x}) = F_3(\mathbf{x})$$

og þar með er sýnt að $[\nabla\phi(\mathbf{x})]^T = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Auðvelt er að átta sig á því að liður (d) er nauðsynlegt skilyrði og gerum við það hér að neðan. Það að liður (d) sé nægjanlegt skilyrði ef $\mathcal{D}$ er einfaldlega samanhangi svæði er töluvert erfiðara og verður ekki farið nánar út í þá sálma hér.

Hvað er $\nabla \times \mathbf{F}$ og hvaðan kemur það?

Þegar við erum að fjalla um föll af 3-breytistærðum þá er *diffurvirkinn* ∇ skilgreindur sem

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Táknstæðan $\nabla \times \mathbf{F}$, kölluð rót $\mathbf{F}$, getur maður reiknað sem krossfeldið

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Stundum er ritað $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ eða $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ fyrir $\nabla \times \mathbf{F}$. Rót $\mathbf{F}$ samsvarar hvirflum í vektorsviðinu $\mathbf{F}$, við kynnumst því nánar síðar.

■ **Dæmi 5.9** Látum $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, vera varðveitið vektorsvið með mætti $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Þ.e.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Sýnið að $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
Lausn: Nú er

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

og

$$F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{og} \quad F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Við notfærum okkur nú að röðin á hlutafleiðunum skiptir ekki máli og reiknum lið fyrir lið

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = 0$$

og

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Sem sagt er

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

■

Síðasta dæmi sýnir að nauðsynlegt skilyrði til þess að $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, sé varðveitið vektorsvið, þ.e. að $\mathbf{F}$ hafi mætti, sé að

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{0}$$

fyrir öll $(x\ y\ z)^T \in \mathcal{D}$. Regla 5.3.1 segir okkur að þetta skilyrði sé líka nægjanlegt ef $\mathcal{D}$ er einfaldlega samanhangandi svæði.

Annar mikilvægur diffurvirki á vektorsvið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er uppspretta (e. divergence) þess, táknuð

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} F_3(x, y, z).$$

Athugið að lítið mál er að skilgreina uppsprettu $\nabla \cdot \mathbf{F}$ vektorsviðs $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fyrir hvaða n sem er, en einungis er mögulegt að skilgreina rótið $\nabla \times \mathbf{F}$ ef $n = 3$.

Við segjum að vektorsvið $\mathbf{F}$ sé uppsprettulaust (e. solonodial) á svæði $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ ef $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ fyrir öll $(x, y, z) \in \mathcal{D}$. Við segjum að vigursviðið sé hvirflalaust (e. irrotational) á svæði $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ ef $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$ fyrir öll $(x, y, z) \in \mathcal{D}$.

■ **Dæmi 5.10** Dæmi úr eðlisfræðinni þar sem talað er um uppsprettu og rót eru jöfnur Maxwells, sem eru þungamiðja klassískrar rafsegulfræði:

i)
$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0},$$

ii)
$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0$$

iii)
$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, \mathbf{x})$$

iv)
$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t, \mathbf{x})$$

Í þessum jöfnum táknar $\mathbf{E}$ rafsvið, $\mathbf{B}$ segulsvið, ρ hleðsluþéttleika og $\mathbf{J}$ straum. ϵ_0 og μ_0 eru náttúrufastar. Lausleg túlkun er

i) Hleðsla er uppspretta rafsviðs
ii) Segulsvið hefur ekki uppsprettu
iii) Breyting á segulsviði hvirflar upp rafsviði
iv) Straumur og breyting á rafsviði hvirfla upp segulsviði

■

■ **Dæmi 5.11** Gefið er vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy - \sin z)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\mathbf{k}.$$

i) Er $\mathbf{F}$ varðveitið á svæðinu $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 0\}$? Ef svo er, reiknið þá mætti fyrir $\mathbf{F}$.
ii) Reiknið ferilheildi $\mathbf{F}$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$, sem gefinn er með stikuninni

$$\mathbf{r} : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Lausn: Leysum fyrst lið i). Athugum að

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}(xy - \sin z) = x$$

og

$$\frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - \frac{e^y}{z}\right) = 2x$$

svo $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ og því er $\mathbf{F}$ ekki varðveitið (hefur ekki mætti).

Snúum okkur nú að lið ii) og reiknum ferilheildið af $\mathbf{F}$ yfir $\mathcal{C}$ og fáum

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \sin t - \sin(\pi) \\ \cos^2 t - \frac{1}{\pi}\exp(\sin t) \\ \frac{1}{\pi^2}\exp(\sin t) - \cos t \cos(\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos t \sin^2 t + \cos^3 t - \frac{1}{\pi}\exp(\sin t)\cos t\right) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos t \sin^2 t + (1 - \sin^2 t)\cos t - \frac{1}{\pi}\exp(\sin t)\cos t\right) dt \\
&= \left[\sin t - \frac{2}{3}\sin^3 t - \frac{1}{\pi}\exp(\sin t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1-e}{\pi}.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 5.12** Gefið er vektorsviðið

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (xy - \sin z)\,\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\mathbf{k}.$$

i) Er $\mathbf{G}$ varðveitið á svæðinu $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 0\}$? Ef svo er, reiknið þá mætti fyrir $\mathbf{G}$.
ii) Reiknið ferilheildi $\mathbf{G}$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$ sem gefinn er með stikuninni

$$\mathbf{r} : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Lausn: Leysum fyrst lið i). Nú er

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{G} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{e^y}{z^2} - \frac{e^y}{z^2}\right)\mathbf{i} - (-\cos z + \cos z)\,\mathbf{j} + (x - x)\,\mathbf{k} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

og $\mathcal{D}$ er einfaldlega samanhangandi svæði svo $\mathbf{G}$ hefur mætti ϕ skv. Reglu 5.3.1 (d). Til þess að finna mættið skoðum við að

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = G_1 = xy - \sin z,$$

svo

$$\phi = \int (xy - \sin z)dx = \frac{1}{2}x^2y - x\sin z + C_1(y,z),$$

þar sem $C_1(y,z)$ er eitthvert ótiltekið fall af y og z. Einnig er

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G_2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z},$$

svo

$$\phi = \int \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right) dy = \frac{1}{2}x^2y - \frac{e^y}{z} + C_2(x,z),$$

þar sem $C_2(x,z)$ er eitthvert ótiltekið fall af x og z. Að lokum er

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = G_3 = \frac{e^y}{z^2} - x\cos z,$$

svo

$$\phi = \int \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right) dz = -\frac{e^y}{z} - x\sin z + C_3(x,y),$$

þar sem $C_3(x,y)$ er eitthvert ótiltekið fall af x og y. Nú sjáum við að

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y - x\sin z - \frac{e^y}{z} + C,$$

þar sem C er einhver fasti, er mætti fyrir $\mathbf{G}$. Með þessu ϕ er

$$C_1(y,z) = -\frac{e^y}{z} + C, \quad C_2(x,z) = -x\sin z + C \quad \text{og} \quad C_3(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + C$$

og allar jöfnurnar að ofan ganga upp. Þ.e. við getum fundið föll $C_1(y,z)$, $C_2(x,z)$ og $C_3(x,y)$ án þess að það leiði til mótsagna í formúlunum.

Snúum okkur nú að lið ii) og reiknum ferilheildið. Það er miklu auðveldara að reikna það núna heldur en í síðasta dæmi, af því að nú höfum við mætti. Ferilheildið af $\mathbf{G}$ yfir $\mathcal{C}$ er:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(\pi/2)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = \phi(0,1,\pi) - \phi(1,0,\pi) = \frac{-e}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{1-e}{\pi}.$$

■

■ **Dæmi 5.13** Ef við skoðum tvö síðustu dæmi þá sjáum við að

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{G}(x,y,z) + \frac{1}{2}x^2\,\mathbf{j} = \nabla\phi(x,y,z) + \frac{1}{2}x^2\,\mathbf{j}.$$

Við reiknum fyrir ferilinn $\mathcal{C}$ stikaðann eins og í dæmunum að

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}x^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \frac{1}{3},$$

sem ætti ekki að koma á óvart! (Af hverju ekki?) ■

Það er áhugavert að bera saman lausnirnar í dæmum 5.11 og 5.12. Skilyrðið $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ á einfaldlega samanhangandi svæði þýðir einmitt að reikningarnir á mættinu ϕ eins og í lausninni á Dæmi 5.12 ganga upp. Til þess að sjá þetta betur skulum við reyna að nota samskonar aðferð í Dæmi 5.11. Nú er

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy - \sin z)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\mathbf{k}$$

svo við þyrftum að hafa fyrir mætti ϕ að

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 = xy - \sin z,$$

svo

$$\phi = \int (xy - \sin z)dx = \frac{1}{2}x^2y - x\sin z + C_1(y,z),$$

þar sem $C_1(y,z)$ er eitthvert ótiltekið fall af y og z. Einnig er

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 = x^2 - \frac{e^y}{z},$$

svo nauðsynlega er

$$\phi = \int \left(x^2 - \frac{e^y}{z}\right) dy = x^2y - \frac{e^y}{z} + C_2(x,z),$$

þar sem $C_2(x,z)$ er eitthvert ótiltekið fall af x og z. Að lokum yrði að gilda

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 = \frac{e^y}{z^2} - x\cos z,$$

svo

$$\phi = \int \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right) dz = -\frac{e^y}{z} - x\sin z + C_3(x,y)$$

þar sem $C_3(x,y)$ er eitthvert ótiltekið fall af x og y.

Þessi skilyrði eru ekki samræmanleg! Með því að skoða tvær fyrstu jöfnurnar fyrir ϕ sjáum við að

$$\frac{1}{2}x^2y - x\sin z + C_1(y,z) = \phi = x^2y - \frac{e^y}{z} + C_2(x,z),$$

þ.e.

$$-\frac{1}{2}x^2y = -\left(C_1(y,z) + \frac{e^y}{z}\right) + \left(C_2(x,z) + x\sin z\right).$$

Takið eftir að við höfum enga möguleika á að mynda liðinn $-0.5x^2y$ með því að velja sniðug föll $C_1(y,z)$ og $C_2(x,z)$. Það er ómögulegt að finna föll $C_1(y,z)$ og $C_2(x,z)$ þ.a. þessi jafna sé uppfyllt fyrir öll $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ og því getur $\mathbf{F}$ ekki haft mætti.

Æfingar 5.3

Æfing 5.3.1 Tveir langir leiðarar liggja samsíða z-ás og hafa x og y hnitin $(x,y) = (-1,0)$ og $(x,y) = (1,0)$. Jafna segulsviðsins í xy-planinu (mælt í hengtugum einingum) er gefin með

$$\mathbf{b}(x,y) = \frac{(x-1)\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{i}}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{\eta((x+1)\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{i})}{(x+1)^2 + y^2}$$

þar sem fastinn $\eta > 0$ lýsir ósamhverfu segulsviðsins. Athugið að vírarnir eru óendalega langir þannig að $\mathbf{b}$ er ekki háð breytunni z, og þar sem vírarnir liggja samsíða z-ás þá hefur sviðið engan z-þátt. Sem sagt er jafna segulsviðsins eins í öllum plönum sem eru samsíða xy-planinu.

a) Sýnið að vektorsviðið $\mathbf{b}(x, y)$ er uppsprettulaust (e. solenoidal). Þ.e. sýnið að $\nabla \cdot \mathbf{b}(x, y) = 0$.

b) Teiknið upp vektorsviðið fyrir $\eta = 1.5$.

■

Æfing 5.3.2 Reiknið ferilheildið af vigursviðinu

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$$

eftir ferlinum

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

frá $(0,\ 0,\ 0)$ til $(2,\ 4,\ 8)$. ■

Æfing 5.3.3 Gefið er vektorsviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k},$$

og ferill $\mathcal{C}$, sem er stikaður með $\mathbf{r} : [0, 5\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

■

Æfing 5.3.4 Gefið er vektorsviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y - z)\,\mathbf{i} + (2y - x)\,\mathbf{j} + (2z - x)\,\mathbf{k}.$$

Látum $\mathcal{C}$ vera skurðferil

$$z = x^2 + 4y^2 \quad \text{við} \quad z = 3x - 2y,$$

áttaðan rangsælis miðað við að horft sé niður á xy-planið. Reiknið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

■

Æfing 5.3.5 Gefin eru vigursviðin $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz^2\,\mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz))\,\mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\,\mathbf{k}$$

og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{G}(x, y, z) = 2xyz^2\,\mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz) - 2zy)\,\mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\,\mathbf{k}.$$

a) Stikið ferilinn $\mathcal{C}$ sem fæst þegar $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sker planið $z = 2$, áttaðan rangsælis miðað við að við horfum ofan á xy-planið frá pósitíva z-ásnum.
b) Er vigursviðið $\mathbf{F}$ geymið (varðveitið, e. conservative)?
c) Finnið mætti vigursviðsins $\mathbf{F}$ ef það er til.
d) Reiknið ferilheildin

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{og} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

■

Æfing 5.3.6 Gefið er að vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er varðveitið með mættið

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2},$$

þar sem $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)^T \in \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{r}_0 = (a,\ b,\ c)^T$ er fastavigur. Finnið vektorsviðið $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. ■

Æfing 5.3.7 Sýnið að vektorsvið af gerðinni $\mathbf{G}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$ er uppsprettulaust (e. solenoidal), þ.e. að $\nabla \cdot \mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{0}$. ■

5.4 Flæði vektorsviðs í gegnum stikaðan flöt

Svipað og maður getur reiknað ferilheildi vektorsviðs $\mathbf{F}$ eftir ferli $\mathcal{C}$, ritað

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{eða stundum} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds,$$

getur maður reiknað flæði vektorsviðs $\mathbf{F}$ (e. flux of $\mathbf{F}$) í gegnum stikaðan flöt $\mathcal{S}$, ritað

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{eða} \quad \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Þar sem

$$dS = \|\mathbf{n}(u, v)\|du\, dv$$

eins og við sáum í Kafla 4.5 (sjá einnig samantekt á bls. 129) og

$$\hat{\mathbf{N}}(u, v) := \frac{\mathbf{n}(u, v)}{\|\mathbf{n}(u, v)\|},$$

er einingar normalvigur á yfirborðið $\mathcal{S}$. Ef við stikum yfirborðið með $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k},$$

er normalvigur á yfirborðið gefinn með formúlunni

$$\mathbf{n}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

eins og við höfum áður séð. Við höfum þá að

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\,dS = \pm\frac{\mathbf{n}(x,y)}{\|\mathbf{n}(x,y)\|}\|\mathbf{n}(x,y)\|\,dx\,dy = \pm\mathbf{n}(x,y)\,dx\,dy,$$

þar sem formerkið ræðst af því í hvora áttina í gegnum yfirborðið við viljum finna flæðið. Fyrir flæði upp í gegnum yfirborðið, þ.e. í stefnu jákvæða z-ássins, er formerkið plús, en fyrir flæði niður í gegnum yfirborðið er formerkið mínus. Við getum þá reiknað flæðisheildið með

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\mathbf{n}(x,y)\,dx\,dy.$$

ef flæðið er upp í gegn, en annars fáum við sama heildi með neikvæðu formerki.

■ **Dæmi 5.14** Finnið flæði (e. flux) vigursviðsins $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j},$$

upp í gegnum yfirborðið $\mathcal{S}$, sem er sá hluti

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

sem er yfir ofan xy-planið. M.ö.o. Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Lausn: Stikum yfirborðið með

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x^2-y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{þ.s. } x^2+y^2 \le 1.$$

Nú er

$$\mathbf{n}(x,y) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og við heildum

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\mathbf{n}(x,y)dS \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dS \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} (2x^2+2y^2)dS \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^2\cdot r\;dr\;d\theta \\
&= 2\pi\cdot\left[\frac{r^4}{2}\right]_{r=0}^{r=1} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Hér skiptum við í pólhnit þegar við rituðum út dS. ■

Æfingar 5.4

Æfing 5.4.1 Reiknið flæði (e. flux) vigursviðsins $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + 4x^2y^2\,\mathbf{k}$$

upp í gegnum yfirborðið $\mathcal{S}$, sem er sá hluti $z = 1 - x^2 - y^2$ sem er yfir ofan xy-planið. M.ö.o. Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

■

Æfing 5.4.2 Reiknið flæði (e. flux) vigursviðsins $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

niður í gegnum yfirborðið $\mathcal{S}$, sem er stikað með

$$\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 1 \ \text{ og } \ 0 \leq v \leq 2\pi.$$

■

5.5 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 5.2.1 Ákvarðið hvort vigursviðið $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(x,y)=\frac{x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{x^2+y^2}$$

sé varðveitið (geymið, e. conservative) og finnið mætti (e. potential) þess ef svo er.

■ **Lausn** Við reiknum

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

og sjáum að vigursviðið er mögulega varðveitið. Við finnum mættið $\phi(x,y)$ með því að leysa jöfnurnar

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=F_1 \quad\Rightarrow\quad \phi(x,y)=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_1(y)$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=F_2 \quad\Rightarrow\quad \phi(x,y)=\int\frac{y}{x^2+y^2}dy=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_2(x)$$

saman. Mætti er gefið með

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$

sem við getum líka sannreynt með því að reikna að $[\nabla\phi(x,y)]^T=\mathbf{F}(x,y)$.

Athugið að $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ er ekki einfaldlega samhangandi svæði.

Æfing 5.2.2 Ákvarðið hvort vigursviðið $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z)=2xy^3\sin(z)\,\mathbf{i}+3x^2y^2\sin(z)\,\mathbf{j}+x^2y^3\cos(z)\,\mathbf{k},$$

sé varðveitið (geymið, e. conservative) og finnið mætti (e. potential) þess ef svo er.

■ **Lausn** Við athugum fyrst hvort

$$\nabla\times\mathbf{F}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}=\mathbf{0}.$$

Nú er

$$F_1=2xy^3\sin(z),\quad F_2=3x^2y^2\sin(z)\quad\text{og}\quad F_3=x^2y^3\cos(z)$$

og við fáum

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}=3x^2y^2\cos(z)-3x^2y^2\cos(z)=0,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}=2xy^3\cos(z)-2xy^3\cos(z)=0,$$

og

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=6xy^2\sin(z)-6xy^2\sin(z)=0.$$

Þar sem $\mathbb{R}^3$ er einfaldlega samanhangandi og $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ hefur $\mathbf{F}$ mætti og eftirfarandi reikningar fyrir mættinu munu ganga upp.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int 2xy^3 \sin(z)dx = x^2y^3\sin(z) + C_1(y,z),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int 3x^2y^2 \sin(z)dy = x^2y^3\sin(z) + C_2(x,z)$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int x^2y^3 \cos(z)dz = x^2y^3\sin(z) + C_3(y,z)$$

og við sjáum að

$$\phi(x,y,z) = x^2y^3\sin(z)$$

er mætti fyrir $\mathbf{F}$.

Æfing 5.3.1 Tveir langir leiðarar liggja samsíða z-ás og hafa x og y hnitin $(x,y) = (-1,0)$ og $(x,y) = (1,0)$. Jafna segulsviðsins í xy-planinu (mælt í hengtugum einingum) er gefin með

$$\mathbf{b}(x,y) = \frac{(x-1)\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{i}}{(x-1)^2+y^2} + \frac{\eta((x+1)\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{i})}{(x+1)^2+y^2}$$

þar sem fastinn $\eta > 0$ lýsir ósamhverfu segulsviðsins. Athugið að vírarnir eru óendalega langir þannig að $\mathbf{b}$ er ekki háð breytunni z, og þar sem vírarnir liggja samsíða z-ás þá hefur sviðið engan z-þátt. Sem sagt er jafna segulsviðsins eins í öllum plönum sem eru samsíða xy-planinu.

a) Sýnið að vektorsviðið $\mathbf{b}(x,y)$ er uppsprettulaust (e. solenoidal). Þ.e. sýnið að $\nabla \cdot \mathbf{b}(x,y) = 0$.

b) Teiknið upp vektorsviðið fyrir $\eta = 1.5$.

■ **Lausn** Umskrifum vektorsviðið á formið $\mathbf{b}(x,y) = b_1\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(x,y) =& \frac{(x-1)\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{i}}{(x-1)^2+y^2} + \frac{\eta((x+1)\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{i})}{(x+1)^2+y^2} \\ =& \underbrace{\left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{\eta y}{(x+1)^2+y^2}\right)}_{b_1}\mathbf{i} + \underbrace{\left(\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{\eta(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\right)}_{b_2}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

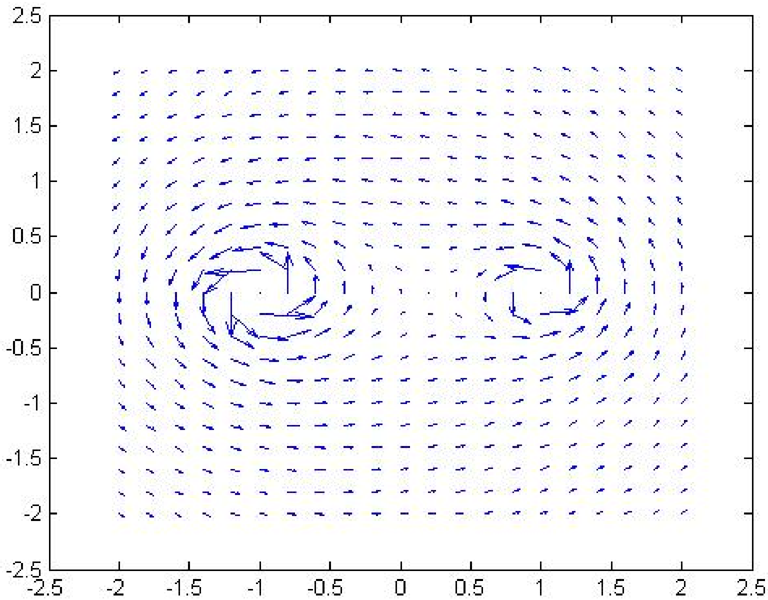
Við reiknum nú uppsprettuna,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{b}(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (b_1 \quad b_2) \\ &= \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} \\ &= \frac{2(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^2} + \frac{2\eta y(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^2} - \frac{2y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2} - \frac{2\eta y(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

og þar sem hún er núll er sviðið uppsprettulaust.

Til þess að teikna vektorsviðið má nota eftirfarandi Matlab forrit:

```
eta=1.5;
x=-2:0.2:2;
[x,y] = meshgrid(x,x);
f2=(x-1)./((x-1).^2+y.^2)+eta*(x+1)./((x+1).^2+y.^2);
f1=-y./((x-1).^2+y.^2)-eta*y./((x+1).^2+y.^2);
quiver(x,y,f1,f2,1.5)
```



Mynd 5.2: Vigursviðið í Dæmi 5.3.1, þegar $\eta = 1.5$.

Æfing 5.3.2 Reiknið ferilheildið af vigursviðinu

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$$

eftir ferlinum

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

frá $(0,\ 0,\ 0)$ til $(2,\ 4,\ 8)$.

■ **Lausn** Við sjáum að vigursviðið er ekki varðveitið því

$$1 = \frac{\partial F_1}{\partial z} \neq \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2.$$

Gefin er stikunin
$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$
á ferlinum og þar með er $t \in [0,2]$. Við reiknum
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^2 (t^3 - 2t^3 + 6t^3) dt \\ &= \int_0^2 5t^3 dt \\ &= \left[\frac{5}{4}t^4\right]_{t=0}^{t=2} \\ &= 20.\end{aligned}$$

Æfing 5.3.4 Gefið er vektorsviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x - y - z)\,\mathbf{i} + (2y - x)\,\mathbf{j} + (2z - x)\,\mathbf{k}.$$
Látum $\mathcal{C}$ vera skurðferil
$$z = x^2 + 4y^2 \quad \text{við} \quad z = 3x - 2y,$$
áttaðan rangsælis miðað við að horft sé niður á xy-planið. Reiknið
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

■ **Lausn** Athugum fyrst hvort $\mathbf{F}$ er varðveitið vektorsvið með því að athuga hvort
$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$
Nú er
$$F_1 = 2x - y - z, \quad F_2 = 2y - x \quad \text{og} \quad F_3 = 2z - x$$
og við fáum
$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 - 0 = 0,$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} = -1 - (-1) = 0$$
og
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 - (-1) = 0.$$
Þar sem $\mathbb{R}^3$ er einfaldlega samanhangandi og $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ hefur $\mathbf{F}$ mætti og eftirfarandi reikningar fyrir mættinu munu ganga upp.
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int (2x - y - z)dx = x^2 - xy - xz + C_1(y,z),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int (2y - x)dy = y^2 - xy + C_2(x, z)$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int (2z - x)dz = z^2 - xz + C_3(y, z)$$

og við sjáum að

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz$$

er mætti fyrir $\mathbf{F}$.
Áttum okkur næst á skurðferlinum $\mathcal{C}$. Jöfnurnar eru

$$z = x^2 + 4y^2 \quad \text{og} \quad z = 3x - 2y,$$

sem gefur

$$x^2 + 4y^2 = 3x - 2y \quad \text{eða} \quad x^2 - 3x + 4y^2 + 2 = 0,$$

sem ætti að koma kunnuglega fyrir sjónir. Með því að fylla upp í ferninginn fæst að síðasta jafnan er jafngild

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{\left(y - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2,$$

sem við þekkjum sem jöfnu sporbaugs. Ofanvarp skurðferilsins á xy-planið er þar með sporbaugur og þar sem z-hnitið er samfellt fall af x og y er skurðferillinn lokaður. Því er sjálfkrafa

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Spurningar:
1. Þurftum við að reikna mættið?
2. Skiptir máli hvernig ferillinn er áttaður?

Svör:
1. Nei, tilvist þess er nóg því ferillinn reyndist lokaður og því var óþarfi að reikna það.
2. Nei, ekki fyrst útkoman er núll, því mínus núll er líka núll.

Æfing 5.3.5 Gefin eru vigursviðin $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz^2\, \mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz))\, \mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\, \mathbf{k}$$

og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{G}(x, y, z) = 2xyz^2\, \mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz) - 2zy)\, \mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\, \mathbf{k}.$$

a) Stikið ferilinn $\mathcal{C}$ sem fæst þegar $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sker planið $z = 2$, áttaðan rangsælis miðað við að við horfum ofan á xy-planið frá jákvæða z-ásnum.
b) Er vigursviðið $\mathbf{F}$ geymið (varðveitið, e. conservative)?
c) Finnið mætti vigursviðsins $\mathbf{F}$ ef það er til.

d) Reiknið ferilheildin

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{og} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

■ **Lausn** Leysum þetta lið fyrir lið.

a) Við sjáum að við erum með ferilinn $z = 2$ og $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, þ.e. ferillinn er hringur með radíus 2 og miðju í $(0, 0, 2)$ sem liggur í planinu $z = 2$. Við stikum ferilinn með $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\sin(t)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}.$$

b) $\mathbf{F}$ er skilgreint á einfaldlega samhangandi svæðinu $\mathbb{R}^3$. Við athugum hvort $\mathbf{F}$ sé varðveitið vektorsvið með því að athuga hvort

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Nú er

$$F_1 = 2xyz^2, \quad F_2 = x^2z^2 + z\cos(yz) \quad \text{og} \quad F_3 = 2x^2yz + y\cos(yz)$$

og við fáum

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \Big(2x^2z + \cos(yz) - yz\sin(yz)\Big) - \Big(2x^2z + \cos(yz) - yz\sin(yz)\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} = 4xyz - 4xyz = 0$$

og

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xz^2 - 2xz^2 = 0.$$

Því er $\mathbf{F}$ varðveitið.

c) Við sáum í b)-lið að $\mathbf{F}$ er geymið og hefur því mætti. Eftirfarandi reikningar fyrir mættinu munu því ganga upp.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int 2xyz^2 dx = x^2yz^2 + C_1(y, z),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int (x^2z^2 + z\cos(yz))dy = x^2yz^2 + \sin(yz) + C_2(x, z)$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \quad \Rightarrow \quad \phi = \int (2x^2yz + y\cos(yz))dz = x^2yz^2 + \sin(yz) + C_3(y, z)$$

og við sjáum að

$$\phi(x, y, z) = x^2yz^2 + \sin(yz)$$

er mætti fyrir $\mathbf{F}$.

d) Ferillinn $\mathcal{C}$ er lokaður og vigursviðið $\mathbf{F}$ er varðveitið svo

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Nú getum við notfært okkur að $\mathbf{G} = \mathbf{F} - 2zy\,\mathbf{j}$ svo

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} - 2zy\,\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{\mathcal{C}} 2zy\,\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_{\mathcal{C}} 2zy\,\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}.$$

Látum $\mathbf{H} = 2zy\,\mathbf{j}$ og reiknum

$$
\begin{aligned}
-\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt &= -\int_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 8\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 16\sin(t)\cos(t)dt \\
&= -\Big[8\sin^2(t)\Big]_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Sem sagt er heildið yfir ferilinn núll, bæði fyrir $\mathbf{F}$ og $\mathbf{G}$.

Æfing 5.3.6 Gefið er að vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er varðveitið með mættið

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2},$$

þar sem $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)^T \in \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{r}_0 = (a,\ b,\ c)^T$ er fastavigur. Finnið vektorsviðið $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

■ **Lausn** Formúlan fyrir mættinu er

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2} = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Við getum þá reiknað hlutafleiðurnar

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-2(x-a)}{((x-1)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^2} = \frac{-2(x-a)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-2(y-b)}{((x-1)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^2} = \frac{-2(y-b)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4}$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{-2(z-c)}{((x-1)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^2} = \frac{-2(z-c)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4}$$

og við sjáum þá að stigullinn af ϕ er

$$[\nabla \phi]^T = \left(\frac{-2(x-a)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4} \;\; \frac{-2(y-b)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4} \;\; \frac{-2(z-c)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4} \right)^T = \frac{-2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4},$$

sem er vigursviðið sem beðið var um.

Æfing 5.3.7 Sýnið að vektorsvið af gerðinni $\mathbf{G}(x,y,z) = \nabla \times \mathbf{F}(x,y,z)$ er uppsprettulaust (e. solenoidal), þ.e. að $\nabla \cdot \mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{0}$.

■ **Lausn** Nú er

$$\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

og þá

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{G} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\
&= \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}\right) \\
&= 0 - 0 + 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

því að röðin á hlutafleiðunum skiptir ekki máli.

Æfing 5.4.1 Reiknið flæði (e. flux) vigursviðsins $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + 4x^2y^2\,\mathbf{k}$$

upp í gegnum yfirborðið $\mathcal{S}$, sem er sá hluti $z = 1 - x^2 - y^2$ sem er yfir ofan xy-planið. M.ö.o. Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

■ **Lausn** Byrjum á að stika yfirborðið með $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

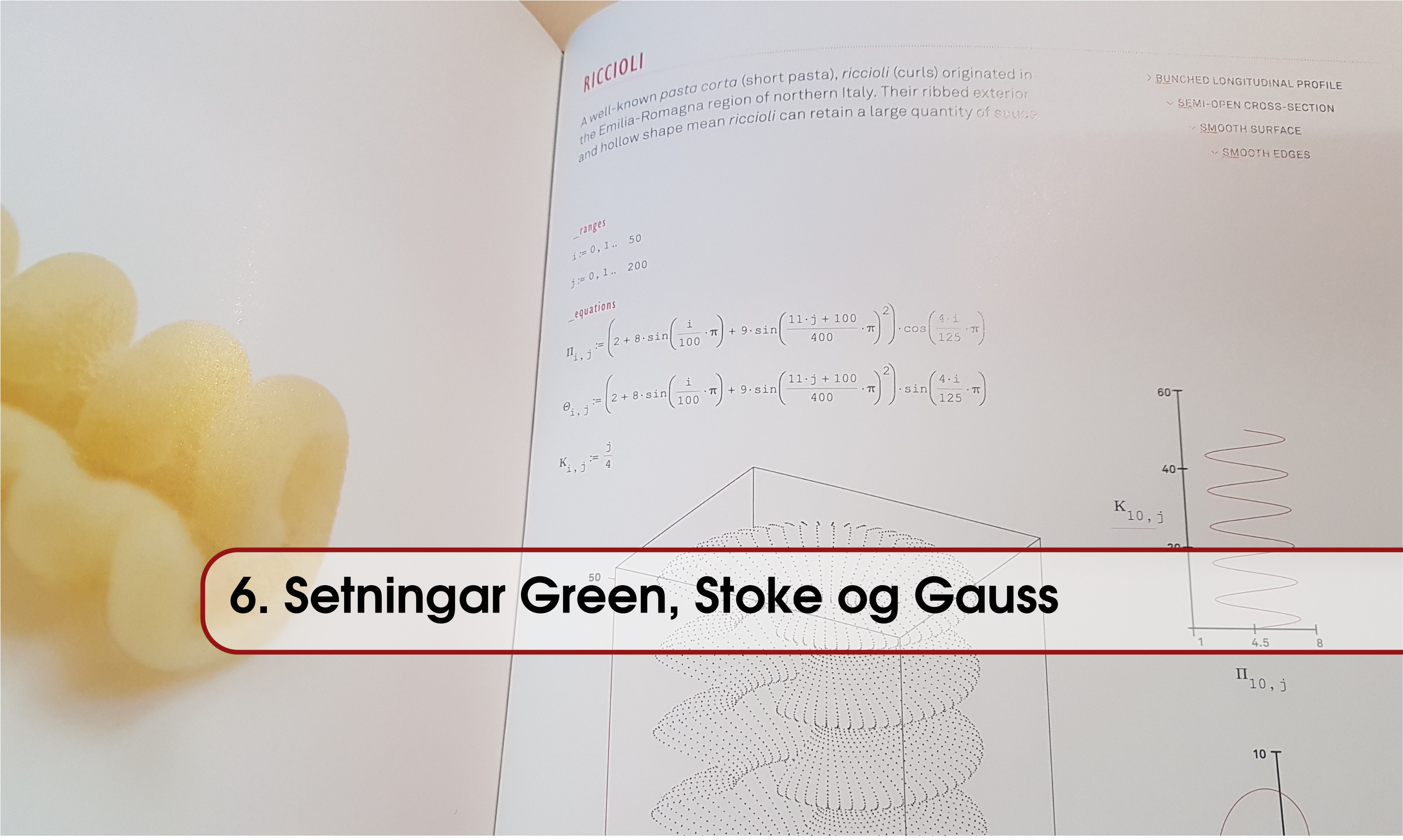
þar sem $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Nú er

$$\mathbf{n}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og við heildum

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \mathbf{n}(x,y) dS \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ 4x^2y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dS \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2) dS \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2(x^2+y^2)^2 dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^4 \cdot r \, dr \, d\theta \\
&= 2\pi \cdot \left[\frac{2r^6}{6} \right]_{r=0}^{r=1} \\
&= \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}
$$



6. Setningar Green, Stoke og Gauss

Nú komum við að aðalatriðunum varðandi feril- og flæðisheildi og lærum um setningar Green, Stoke og Gauss. Segja má að nánast allt sem við höfum fjallað um hingað til snúist um að geta sett fram og skilið þessar mikilvægu og öflugu setningar.

6.1 Setning Green og setning Gauss í 2-víddum

Setning Green (eða setning Stoke í 2-víddum) er útvíkkun Höfuðsetningu stærðfræðigreiningarinnar á 2-víddir.

Regla 6.1.1 — Setning Green. Látum $\mathcal{D}$ vera svæði í planinu, sem er bæði hægt að lýsa sem

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b \ \text{ og } \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

og sem

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \leq y \leq d \ \text{ og } \ h(y) \leq x \leq k(y)\},$$

þar sem a, b, c, d eru einhverjir fastar og f, g, h, k eru einhver raungild föll, sem eru nægjanlega oft diffranleg.

Látum $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vera vektorsvið. Þá gildir

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

þar sem $\mathcal{C}$ er röndin á $\mathcal{D}$ sem er stikuð rangsælis (e. counterclockwise).

ATH Setning Green er einnig rétt fyrir svæði sem hægt er að búa til með því að líma saman svæði eins og lýst er í forsendum setningarinnar. Reyndar er hún rétt fyrir mun almennari svæði en það, en sönnunin á því er töluvert erfiðari.

Við munum sanna setningu Green síðar í þessum kafla.

■ **Dæmi 6.1** Látum

$$\mathbf{F}(x,y) = (x - y^3)\,\mathbf{i} + (y^3 + x^3)\,\mathbf{j}$$

vera vektorsvið og $\mathcal{C}$ vera rönd fjórðungs-hringskífunnar

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \ \text{ og } \ y \geq 0 \ \text{ og } \ x^2 + y^2 \leq a^2\},$$

þar sem $a > 0$ er einhver fasti, stikaða rangsælis. Notið setningu Green til þess að breyta ferilheildinu

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

í flatarheildi og reiknið það.
Lausn: Nú er skv. setningu Green, miðað við rangsælis stikun á $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^3 + x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y^3) \right) dA \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left(3x^2 + 3y^2 \right) dA \\
&= 3 \int_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\, dA \\
&= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^2 \cdot r\, dr \right) d\vartheta \\
&= \frac{3\pi}{8} a^4.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 6.2** Látum

$$\mathbf{F}(x,y) = ye^{-x}\,\mathbf{i} + (\frac{1}{2}x^2 - e^{-x})\,\mathbf{j}$$

vera vektorsvið og $\mathcal{C}$ vera rönd hringskífunnar

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-2)^2 + y^2 \leq 1\},$$

stikaða rangsælis. Reiknið

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Lausn: Stikum röndina $\mathcal{C}$ með $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + 2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Ferilheildið verður þá

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(t)e^{-\cos(t)-2} \\ \frac{1}{2}(\cos(t)+2)^2 - e^{-\cos(t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2(t)e^{-\cos(t)-2} + \cos(t) \left[\frac{1}{2}(\cos(t)+2)^2 - e^{-\cos(t)} \right] \right) dt,
\end{aligned}$$

sem er ekki auðvelt að leysa.
Ef við beitum nú í staðinn setningu Green á heildið, þá fæst

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}) - \frac{\partial}{\partial y}(ye^{-x}) \right) dA \\ &= \iint_{\mathcal{D}} (x + e^{-x} - e^{-x})\, dA \\ &= \iint_{\mathcal{D}} x\, dA.\end{aligned}$$

Nú er auðveldara að heilda yfir hring E með miðju í $(0,0)$ og geisla 1. Við hliðrum fallinu, heildum og fáum

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} x\, dA &= \iint_{E} (x+2)\, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos(\theta) + 2) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\theta)\, d\theta\, dr + \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^1 r^2\, dr \cdot \Big[\sin(\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + 2\pi \cdot \Big[r^2\Big]_{r=0}^{r=1} \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Í stað þess að hliðra og skipta í pólhnit hefðum við líka getað notað að heildið af x yfir hringinn $\mathcal{D}$ er meðalfallgildi (massamiðja) x $(= 2)$ sinnum flatarmál $\mathcal{D}$ $(= \pi)$.

Athugið að það sem við köllum að hliðra fallinu til að heilda yfir þægilegra svæði er ekkert annað en hnitakerfaskipti sem við höfum fjallað um áður. Nýju hnitin eru

$$\mathbf{G}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+2 \\ v \end{pmatrix},$$

sem varpa einmitt E í $\mathcal{D}$. Þar sem þetta er hliðrun er nokkuð ljóst að

$$|\det(D\mathbf{G}(u,v))| = 1$$

og það er líka mjög auðvelt að reikna það út. Því eru þessi hnitakerfaskipti án umstangs, þ.e.

$$dA = dx\, dy = du\, dv,$$

og maður getur bara talað um að hliðra fallinu.

■

Við setjum nú fram setningu Gauss í planinu.

Regla 6.1.2 — Setning Gauss í 2-víddum. Látum $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vera vektorsvið skilgreint á svæði $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, sem hefur jákvættáttaða rönd $\mathcal{C}$. Fyrir sérhvern punkt $(x\ y)^T \in \mathcal{C}$ á röndinni látum við $\hat{\mathbf{N}}(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vera einingarvektor sem er hornréttur á röndina í $(x\ y)^T$. Þá er

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds.$$

Setning Gauss í 2-víddum segir okkur að uppspretta vektorsviðs á svæði $\mathcal{D}$ er jöfn flæði vektorsviðsins út úr svæðinu. Við skulum gefa aðeins nánari skýringu á því hvað átt er við með vektornum $\hat{\mathbf{N}}$.

ATH Það að vektorinn $\hat{\mathbf{N}}(x, y)$ sé hornréttur á röndina í öllum punktum $(x\ y)^T \in \mathcal{C}$ þýðir að ef $\mathbf{r}(t)$ er stikun á röndinni, þá er

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t)) = 0 \quad \text{fyrir öll } t.$$

Nú er náttúrlega $-\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t))$ líka hornréttur á röndina, en fleiri vektorar en $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t))$ og $-\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t))$ geta ekki verið og hornréttir á $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ því við erum í planinu. Nú vísar annaðhvort $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t))$ út úr svæðinu og $-\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t))$ inn í það eða öfugt. Það á að velja vektorinn $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t))$ þannig að hann vísi út úr svæðinu!

■ **Dæmi 6.3** Reiknið flæði vektorsviðsins

$$\mathbf{F}(x, y) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j}$$

út um rönd $\mathcal{C}$ hringskífu $\mathcal{D}$ með miðju í $(0, 0)$ og geisla $R > 0$. Gerið þetta á tvennan hátt. Fyrst með því að stika röndina og reikna ferilheildið

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds$$

og svo með því að nota setningu Gauss í planinu.

Lausn: Við reiknum þetta fyrst beint af augum með því að stika röndina (rangsælis) með $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = R\cos(t)\,\mathbf{i} + R\sin(t)\,\mathbf{j}.$$

Þá er

$$\mathbf{r}'(t) = -R\sin(t)\,\mathbf{i} + R\cos(t)\,\mathbf{j}$$

og einingarvektor í stefnu stikunarinnar fæst með

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}(t)) = T_1(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{i} + T_2(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{j} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\sin(t)\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j}$$

og einingar-normalvektor sem vísar úr úr svæðinu með

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t)) = T_2(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{i} - T_1(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{j} = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j}.$$

Þessi niðurstaða ætti ekki að koma á óvart.

Ferilheildið reiknast nú sem

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds &= \oint_{\mathcal{C}} (R^3\cos^3(t)\,\mathbf{i} + R^3\sin^3(t)\,\mathbf{j}) \cdot (\cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j})\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} R^3(\cos^4(t) + \sin^4(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \\
&= \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} (3 + \cos(4t))\, dt \\
&= \frac{R^4}{4} \cdot \left[3t + \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= \frac{3\pi R^4}{2},
\end{aligned}$$

þar sem við notuðum smá hornafallaleikfimi til þess að einfalda

$$\begin{aligned}
\cos^4(t) + \sin^4(t) &= (1 - \sin^2(t))\cos^2(t) + (1 - \cos^2(t))\sin^2(t) \\
&= \cos^2(t) + \sin^2(t) - 2\sin^2(t)\cos^2(t) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2t) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(4t)}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(3 + \cos(4t)\right).
\end{aligned}$$

Nú reiknum við það sama með setningu Gauss í planinu:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA &= \int_{x^2+y^2 \le R^2} (3x^2 + 3y^2)\, dA \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= 3 \cdot 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} \\
&= \frac{3\pi R^4}{2},
\end{aligned}$$

þar sem við skiptum yfir í pólhnit. ■

Við sönnum nú setningu Gauss í tveimur víddum með því að notfæra okkur setningu Green, sem við sönnum svo beint á eftir.

Sönnun. Skilgreinum vektorsviðið

$$\mathbf{G}(x, y) = -F_2(x, y)\,\mathbf{i} + F_1(x, y)\,\mathbf{j}.$$

Þá gildir skv. setningu Green

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA &= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)\right) dA \\
&= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y)\right) dA \\
&= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Látum núna $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vera einhverja rangsælis-stikun á $\mathcal{C}$. Þá er í sérhverjum punkti $\mathbf{r}(t) = (x\ y)^T \in \mathcal{C}$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}(t)) = T_1(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{i} + T_2(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{j} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

einingarvektor í stefnu stikunarinnar í punktinum $\mathbf{r}(t)$ og

$$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t)) = T_2(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{i} - T_1(\mathbf{r}(t))\,\mathbf{j}$$

er einingar-normalvektor á röndina $\mathcal{C}$ í punktinum $\mathbf{r}(t)$. Það er ekki erfitt að sjá að $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{r}(t))$ skilgreint á þennan hátt vísar út úr svæðinu, af því að $\mathbf{r}$ er stikun rangsælis. En þá er

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \boldsymbol{\cdot} d\mathbf{r} &= \int_a^b \begin{pmatrix} G_1(\mathbf{r}(t)) \\ G_2(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \boldsymbol{\cdot} \mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} G_1(\mathbf{r}(t)) \\ G_2(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \boldsymbol{\cdot} \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\|dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} G_1(\mathbf{r}(t)) \\ G_2(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \boldsymbol{\cdot} \begin{pmatrix} T_1(\mathbf{r}(t)) \\ T_2(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \|\mathbf{r}'(t)\|dt \\
&= \int_a^b \left(G_1(\mathbf{r}(t)) \cdot T_1(\mathbf{r}(t)) + G_2(\mathbf{r}(t)) \cdot T_2(\mathbf{r}(t))\right) \|\mathbf{r}'(t)\|dt \\
&= \int_a^b \left(-F_2(\mathbf{r}(t)) \cdot T_1(\mathbf{r}(t)) + F_1(\mathbf{r}(t)) \cdot T_2(\mathbf{r}(t))\right) \|\mathbf{r}'(t)\|dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{r}(t)) \\ F_2(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \boldsymbol{\cdot} \begin{pmatrix} T_2(\mathbf{r}(t)) \\ -T_1(\mathbf{r}(t)) \end{pmatrix} \|\mathbf{r}'(t)\|dt \\
&=: \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \boldsymbol{\cdot} \hat{\mathbf{N}} ds.
\end{aligned}$$

Þar með er setning Gauss í planinu sönnuð. ■

Við sönnum nú setningu Green eins og hún er sett fram í Reglu 6.1.1, en minnum á að hún gildir fyrir mun almennari svæði.

Sönnun. Sönnun á setningu Green:
Byrjum á því að stika röndina $\mathcal{C}$ með $\mathbf{r}_1 : [0, 2(b-a)+2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{cases} (a+t)\,\mathbf{i} + f(a+t)\,\mathbf{j}, \\ \qquad\qquad \text{fyrir } t \in [0, b-a], \\ \\ b\,\mathbf{i} + [(t-(b-a))(g(b)-f(b)) + f(b)]\,\mathbf{j}, \\ \qquad\qquad \text{fyrir } t \in [b-a, b-a+1], \\ \\ (2b-a+1-t)\,\mathbf{i} + g(2b-a+1-t)\,\mathbf{j}, \\ \qquad\qquad \text{fyrir } t \in [b-a+1, 2(b-a)+1], \\ \\ a\,\mathbf{i} + [(t-(2(b-a)+1)(f(a)-g(a)) + g(a)]\,\mathbf{j}, \\ \qquad\qquad \text{fyrir } t \in [2(b-a)+1, 2(b-a)+2]. \end{cases}$$

Næst reiknum við ferilheildi vektorsviðsins

$$\mathbf{G}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i}$$

yfir ferilinn $\mathcal{C}$ og fáum, þar sem við skiptum heildinu í fjóra hluta vegna þess hvernig $\mathbf{r}_1$ er skilgreint:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{b-a} F_1(a+t, f(a+t)) \cdot 1dt \\
&\quad + \int_{b-a}^{b-a+1} F_1(b, (t-(b-a))(g(b)-f(b)) + f(b)) \cdot 0\, dt \\
&\quad + \int_{b-a+1}^{2(b-a)+1} F_1(2b-a+1-t, g(2b-a+1-t)) \cdot (-1)dt \\
&\quad + \int_{2(b-a)+1}^{2(b-a)+2} F_1(a, (t-(2(b-a)+1)(f(a)-g(a)) + g(a)) \cdot 0dt \\
&= \int_a^b F_1(\tau, f(\tau))d\tau + \int_b^a F_1(\tau, g(\tau))d\tau \\
&= \int_a^b \left[F_1(\tau, f(\tau)) - F_1(\tau, g(\tau))\right] d\tau,
\end{aligned}$$

þar sem við notuðum breytuskiptin $\tau = t + a$ og $\tau = 2b - a + 1 - t$.

Við heildum nú fallið

$$(x, y) \mapsto -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)$$

yfir svæðið $\mathcal{D}$ og fáum með því að nota Höfuðsetningu stærðfræðigreiningarinnar að

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)dA &= -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)dy\right) dx \\
&= -\int_a^b \left(F_1(x, g(x)) - F_1(x, f(x))\right) dx \\
&= \int_a^b \left[F_1(\tau, f(\tau)) - F_1(\tau, g(\tau))\right] d\tau.
\end{aligned}$$

Þar með er sýnt að

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} F_1\, \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)dA$$

og við erum hálfnuð sem sönnunina.

Fyrir seinni hluta sönnunarinnar stikum við röndina $\mathcal{C}$ með $\mathbf{r}_2 : [0, 2(d-c)+$

$2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{cases} h(d-t)\,\mathbf{i} + (d-t)\,\mathbf{j}, \\ \qquad\qquad \text{fyrir } t \in [0, d-c], \\ \\ [(t-(d-c))(k(c)-h(c)) + h(c)]\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j}, \\ \qquad\qquad \text{fyrir } t \in [d-c, d-c+1], \\ \\ k(t-(d-c+1)+c)\,\mathbf{i} + (t-(d-c+1)+c)\,\mathbf{j}, \\ \qquad\qquad \text{fyrir } t \in [d-c+1, 2(d-c)+1], \\ \\ [(t-(2(d-c)+1))(h(d)-k(d)) + k(d)]\,\mathbf{i} + d\,\mathbf{j}, \\ \qquad\qquad \text{fyrir } t \in [2(d-c)+1, 2(d-c)+2]. \end{cases}$$

Nú reiknum við ferilheildi vektorsviðsins

$$\mathbf{H}(x,y) = F_2(x,y)\,\mathbf{j}$$

yfir ferilinn $\mathcal{C}$ og fáum, þar sem við skiptum heildinu aftur í fjóra hluta vegna þess hvernig stikunin $\mathbf{r}_2$ er skilgreind:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{d-c} F_2(h(d-t), d-t) \cdot (-1)dt \\ &\quad + \int_{d-c}^{d-c+1} F_2((t-(d-c))(k(c)-h(c)) + h(c), c) \cdot 0\,dt \\ &\quad + \int_{d-c+1}^{2(d-c)+1} F_2(k(t-(d-c+1)+c), t-(d-c+1)+c) \cdot 1dt \\ &\quad + \int_{2(d-c)+1}^{2(d-c)+2} F_2((t-(2(d-c)+1))(h(d)-k(d)) + k(d), d) \cdot 0dt \\ &= \int_d^c F_2(h(\tau), \tau)d\tau + \int_c^d F_2(k(\tau), \tau))d\tau \\ &= \int_c^d \left[F_2(k(\tau), \tau)) - F_2(h(\tau), \tau)\right] d\tau, \end{aligned}$$

þar sem við notuðum breytuskiptin $\tau = d - t$ og $\tau = t - (d - c + 1) + c$.

Að lokum heildum við fallið

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$$

yfir svæðið $\mathcal{D}$ og fáum, aftur með því að nota Höfuðsetningu stærðfræðigreiningarinnar, að

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)dA &= \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{k(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left(F_2(k(y),y) - F_2(h(y),y) \right) dy \\ &= \int_c^d \left[F_2(k(\tau),\tau) - F_2(h(\tau),\tau) \right] d\tau.\end{aligned}$$

Þar með höfum við sýnt að

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} F_2 \,\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)dA.$$

Nú er

$$\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbf{i} + F_2(x,y)\,\mathbf{j} = \mathbf{G}(x,y) + \mathbf{H}(x,y),$$

og því fáum við samantekið að

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)dA - \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)dA \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA,\end{aligned}$$

sem er nákvæmlega það sem við vildum sýna fram á. ■

Æfingar 6.1

Æfing 6.1.1 Gefið er vigursviðið $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{G}(x,y) = (e^{x^2} - xy)\,\mathbf{i} + (\sin(y)x + y^4)\,\mathbf{j}.$$

Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

þar sem $\mathcal{C}$ er ferillinn umhverfis svæðið $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 9 \text{ og } x \leq 0\},$$

áttaður rangsælis.

■

Æfing 6.1.2 Gefið er vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2y + \sin(x^4))\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j}.$$

Reiknið ferilheildið
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
þar sem $\mathcal{C}$ er tígullaga ferill með hornpunkta í $(1,0)$, $(0,2)$, $(-1,0)$ og $(0,-2)$, áttaður rangsælis. ■

6.2 Setningar Gauss og Stoke

Við kynnumst nú setningum Gauss og Stoke sem eru afar mikilvægar í eðlisfræði.

Regla 6.2.1 — Setning Gauss. Látum $\mathcal{S}$ vera stikaðan flöt sem lokar inni rúmmál $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^3$. Látum $\mathbf{F} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera vektorsvið. Látum $\mathcal{S}$ vera stikað þannig að normallinn $\mathbf{n}(u,v)$ bendir alltaf út úr svæðinu $\mathcal{V}$. Þá er
$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Setning Gauss segir okkur að uppspretta vektorsviðsins $\mathbf{F}$ inni í svæðinu $\mathcal{V}$ er jöfn flæði vektorssviðsins $\mathbf{F}$ út úr svæðinu $\mathcal{V}$.

Áður en við setjum fram setningu Stoke þurfum við fyrst að átta okkur á svokallaðri *hægri handar reglu*, reyndar einni af nokkrum. Látum $\mathcal{S}$ vera stikaðan flöt í rúminu sem hefur rönd. Röndin er þá ferill og við köllum hann $\mathcal{C}$. Við segjum að áttunin á $\mathcal{C}$ ákvarðist af áttun $\mathcal{S}$ skv. hægri handar reglu, ef eftirfarandi er gefið fyrir stikunina $\mathbf{r}$ á röndinni:

> Við ímyndum okkur að við grípum með hægri hendinni um röndina $\mathcal{C}$ með vísifingri til litlafingurs þannig að þessir fingur bendi í sömu átt og normall $\mathbf{n}(u,v)$ stikunarinnar. Við látum þumalinn vera hornréttann á lúkuna. Ef þumalinn bendir þá í sömu átt og $\mathbf{r}'(t)$, sem sagt í áttina sem $\mathcal{C}$ er stikaður í, þá segjum við að áttunin á $\mathcal{C}$ ákvarðist af áttun $\mathcal{S}$ skv. hægri handar reglu.

Dæmi: Ef hringskífa í xy-planinu er stikuð með $\mathbf{r} : [0,1] \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix},$$
þá er formúlan fyrir normalnum
$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(u,v) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\
&= u(\cos^2(v) + \sin^2(v))\,\mathbf{k} \\
&= u\,\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Þar sem $u = 1$ við röndina bendir sem sagt normallinn í stefnu jákvæða z-ássins. Við ímyndum okkur þá að við grípum um röndina þ.a. vísifingur til litlafingurs fari upp í gegnum hringskífuna og við sjáum að útréttur þumalinn bendir í rangsælis áttun. Rétt áttun á röndinni miðað við hægri handar reglu fæst þá t.d. með stikuninni $\widetilde{\mathbf{r}} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\widetilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ef við notum í staðinn eftirfarandi stikun á sömu hringskífu: $\mathbf{r}_2 : [0, 2\pi) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}_2(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos(u) \\ v\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix},$$

þá fáum við með samskonar reikningum og að ofan að formúlan fyrir normalnum er

$$\mathbf{n}_2(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -v\sin(u) \\ v\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} = -v\,\mathbf{k}.$$

Þ.e. að normallinn bendir í stefnu neikvæðs z-áss. Með því að grípa með hægri hendinni í gegnum hringskífuna þ.a. vísifingur til litlafingurs fari niður í gegnum skífuna bendir útréttur þumalfingur réttsælis. Rétt áttun á röndinni miðað við hægri handar reglu fæst þá t.d. með stikuninni $\widetilde{\mathbf{r}}_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\widetilde{\mathbf{r}}_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Regla 6.2.2 — Setning Stoke. Látum $\mathcal{S}$ vera stikaðan flöt með rönd $\mathcal{C}$ (ferill). Látum $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera vektorsvið. Látum áttunina á $\mathcal{C}$ ákvarðast af áttun $\mathcal{S}$ skv. hægri handar reglu. Þá er

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Setning Stoke segir okkur að flæði rót vektorsviðsins $\mathbf{F}$ í gegnum flötin $\mathcal{S}$ er jafnt ferilheildi vektorsviðsins $\mathbf{F}$ eftir rönd flatarins $\mathcal{S}$.

Við skoðum nú nokkur dæmi þar sem setningum Stoke og Gauss er beitt. Athugið að setning Gauss fjallar um flæðisheildi gegnum lokað yfirborð sem afmarkar rúmmál $\mathcal{V}$, en setning Stoke fjallar um flæðisheildi af róti vigursviðs í gegnum yfirborð sem hefur rönd $\mathcal{C}$.

■ **Dæmi 6.4** Reiknum flæði vektorsviðsins

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + 3yz^2\,\mathbf{j} + (3y^2z + x^2)\,\mathbf{k}$$

út í gegnum yfirborð kúlunnar $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, s.s. gegnum kúluskelina $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Lausn: Við notum setningu Gauss,

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV,$$

og fáum að

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \int_{\mathcal{V}} \left(3x^2 + 3z^2 + 3y^2\right)\, dV.$$

Þetta heildi er þægilegt að leysa í kúluhnitum, við fáum

$$\begin{aligned} 3\int_{\mathcal{V}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dV &= 3\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2\, \rho^2 \sin\phi\, d\phi\, d\vartheta\, d\rho \\ &= 3 \cdot \Big[-\cos(\phi)\Big]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \cdot \Big[\vartheta\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_{\rho=0}^{\rho=a} \\ &= \frac{12\pi}{5} a^5. \end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 6.5** Gefið er vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz^2\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + xyz\, \mathbf{k}$$

og að $\mathcal{S}$ er yfirborð keilunnar

$$z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \geq 0,$$

áttað uppávið. Athugið að þetta er keila með topppunkt í $(0, 0, 3)$. Reiknið flæðið

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Lausn: Við notum okkur setningu Stoke

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Athugum fyrst að rönd yfirborðsins $\mathcal{S}$ er hringur í xy-planinu með radíus 3 og miðju í $(0, 0, 0)$. Við stikum röndina með

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \;\; \mathbf{r}(t) = 3\cos(t)\, \mathbf{i} + 3\sin(t)\, \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

og notum svo stikunina til þess að setja upp heildið

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0\, \mathbf{i} + 3\sin(t)\, \mathbf{j} + 0\, \mathbf{k}) \cdot (-3\sin(t)\, \mathbf{i} + 3\cos(t)\, \mathbf{j} + 0\, \mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 9\sin(t)\cos(t) dt \\ &= \left[\frac{9}{2}\sin^2(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Dæmi 6.6 Yfirborðið $\mathcal{S}$ er gefið með

$$z = 5 - x^2 - y^2 \quad \text{og} \quad z \geq 1$$

og er áttað uppávið. Gefið er vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y(z-1)^2\,\mathbf{i} + xz^{2018}\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}.$$

Reiknið flæðið

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

með aðstoð setningar Stoke.
Lausn: Stikum fyrst rönd yfirborðsins, sem er hringurinn $x^2 + y^2 = 4$ og $z = 1$, og fáum

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\sin(t)\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k}.$$

Flæðisheildið má þá reikna með hjálp setningu Stoke sem heildið

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (0\mathbf{i} + 2\cos(t)\mathbf{j} + 4\cos(t)\sin(t)\mathbf{k}) \cdot (-2\sin(t)\mathbf{i} + 2\cos(t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k})dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4\cos^2(t)dt \\
&= 4\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt \\
&= 4 \cdot \left[\frac{\sin(2t) + 2t}{4}\right]_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

■

ATH Afleiðing af setningu Stoke er að heildi flæðis rót $\mathbf{F}$, þ.e. $\nabla \times \mathbf{F}$, í gegnum tvö mismunandi yfirborð $\mathcal{S}_1$ og $\mathcal{S}_2$, sem hafa sömu rönd $\mathcal{C}$, hlýtur að vera það sama.

Dæmi 6.7 Gefið er vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}.$$

Heildum rót vektorsviðsins upp í gegnum hringskífuna

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{og} \quad z = 0$$

annars vegar og upp í gegnum yfirborðið

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad \text{og} \quad z \geq 0$$

hins vegar.
Lausn 1 a): Heildum fyrst yfir hringskífuna og notum jöfnu Stoke. Við stikum jaðar hringskífunnar rangsælis með

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \cos(t)\,\mathbf{i} + \sin(t)\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}.$$

Þá er

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (0\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j} + \sin(t)\,\mathbf{k}) \cdot (-\sin(t)\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Fyrir lausnina á síðasta heildinu sjá lausn á síðasta dæmi.
Lausn 1 b): Heildum nú yfir hringskífuna án þess að nota setningu Stoke. Við sjáum að yfirborðið sem við ætlum að heilda yfir er hringur í xy-plainu og hefur því normalinn $\mathbf{n}(x, y) = \mathbf{k}$. Við reiknum að $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ svo við höfum

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dS = \int_{x^2+y^2 \le 1} 1\, dx\, dy = \pi.$$

Lausn 2): Heildum nú yfir seinna yfirborðið og nú án þess að nýta okkur setningu Stoke. Stikum yfirborðið með

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \underbrace{(1 - x^2 - y^2)}_{=:z(x,y)}\,\mathbf{k}$$

þ.s. x og y í stikuninni eru allir punktar sem uppfylla $x^2 + y^2 \le 1$. Normallinn er

$$\mathbf{n}(x, y) = -\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\,\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ svo

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_{x^2+y^2 \le 1} (2x + 2y + 1)\, dx\, dy.$$

Þetta heildi getum við leyst með pólhnitum eða nýtt okkur samhverfu svæðisins um plönin $x = 0$ og $y = 0$ og að $2y$ og $2x$ eru oddstæð föll um þessi plön, svo

$$\int_{x^2+y^2 \le 1} (2x + 2y + 1)\, dx\, dy = \int_{x^2+y^2 \le 1} 1\, dx\, dy = \pi.$$

■

■ **Dæmi 6.8** Látum

$$\mathbf{F} = y(z - 1)^2\,\mathbf{i} + x^2 \cos(z)\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$$

vera vigursvið og látum $\mathcal{S}$ vera yfirborðið $z = 4 - x^2 - y^2,\ z \ge 0$, áttað upp á við. Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Lausn: Við notum setningu Stoke. Ferillinn $\mathcal{C}$ er rönd yfirborðsins, sem er hringur $x^2 + y^2 = 4$ í planinu $z = 0$, stikaður með

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\sin(t)\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k},$$

svo við fáum

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 4\cos^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-4\sin^2(t) + 8\cos^3(t) \Big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-4 \cdot \frac{1-\cos(2t)}{2} + 8\cos(t) - 8\cos(t)\sin^2(t) \Big)\, dt \\
&= \Big[-2t + \sin(2t) + 8\sin(t) - \frac{8}{3}\sin^3(t) \Big]_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

Annar möguleiki er að reikna heildið af $\nabla \times \mathbf{F}$ yfir hvaða yfirborð sem er, sem hefur sömu rönd og $\mathcal{S}$. Veljum t.d. að heilda yfir hringskífuna $x^2 + y^2 \leq 4$ í xy-planinu. Þá er normall á yfirborðið $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$ og þar sem

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x,y) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$$

fæst, með $\mathcal{S}_2$ sem hringskífuna,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathcal{S}_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_{\mathcal{S}_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\
&= \iint_{\mathcal{S}_2} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \Big)\, dS \\
&= \iint_{\mathcal{S}_2} \Big(2x\cos(z) - (z-1)^2 \Big)\, dS \\
&= \iint_{\mathcal{S}_2} (2x - 1)\, dS \quad \text{(því við erum í } xy\text{-planinu, þar sem } z = 0\text{)} \\
&= \iint_{\mathcal{S}_2} -1\, dS \quad \text{(afhverju?)} \\
&= -\,[\text{flatarmál } \mathcal{S}_2] \\
&= -2^2\pi \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 6.9** Látum $\mathcal{R}$ vera rúmskikann sem afmarkast af

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{og} \quad -3 \leq z \leq 3$$

og látum $\mathcal{S}$ vera yfirborð hans, áttað út úr svæðinu. Látum $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + \sin(z^2))\,\mathbf{i} + (y^2 + \cos(x^3))\,\mathbf{j} + (z^3 + \tan(y^4))\,\mathbf{k}.$$

Reiknið flæði vektorsviðsins út úr rúmskikanum, þ.e. reiknið flæðisheildið

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Lausn: Við notum setningu Gauss og fáum

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_{\mathcal{R}} (1 + 2y + 3z)\, dV.$$

Við heildum nú lið fyrir lið. Fyrsti liður gefur rúmmál sívalningsins sem er $2^2 \cdot \pi \cdot 6 = 24\pi$ og annar liðurinn er núll,

$$2 \iiint_{\mathcal{R}} y\, dV = 0,$$

því y er oddstætt fall um planið $y = 0$ og svæðið $\mathcal{R}$ er samhverft um sama plan. Fyrir þriðja liðinn notum við sívalningshnit og fáum

$$\iiint_{\mathcal{R}} 3z\, dV = \int_0^{2\pi} \int_{-3}^{3} \int_0^2 3z^2 \cdot r\, dr\, dz\, d\theta = 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2} \cdot \left[z^3\right]_{z=-3}^{z=3} = 216\pi.$$

Heildarútkoman er því

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 24\pi + 216\pi = 240\pi.$$

■

Æfingar 6.2

Æfing 6.2.1 Reiknið flæði

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{k}$$

út úr ferflötungnum sem afmarkast af plönunum

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{og} \quad 2x + y + z = 3.$$

Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

án þess að nota setningu Gauss og berið niðurstöðuna saman við það sem fæst þegar setning Gauss er notuð. Heildið sem sett er upp með aðferð Gauss má leysa með reiknivél. ■

Æfing 6.2.2 Reiknið flæði vektorsviðsins

$$\mathbf{F} = x^3\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

út úr kúlu með radíus $R > 0$, þ.e. í gegnum yfirborðið

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

áttað út úr kúlunni. ■

Æfing 6.2.3 Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta $z = x^2 + y^2$ sem er undir planinu $z = 4$, áttað upp í gengum yfirborðið. Köllum jaðarinn á yfirborðinu $\mathcal{C}$. Látum

$$\mathbf{F} = 3z\,\mathbf{i} + 5x\,\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k}$$

vera vigursvið. Reiknið flæðisheildið

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

með hjálp setningar Stoke. ■

6.3 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 6.1.1 Gefið er vigursviðið $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{G}(x, y) = (e^{x^2} - xy)\,\mathbf{i} + (\sin(y)x + y^4)\,\mathbf{j}.$$

Reiknið ferilheildið

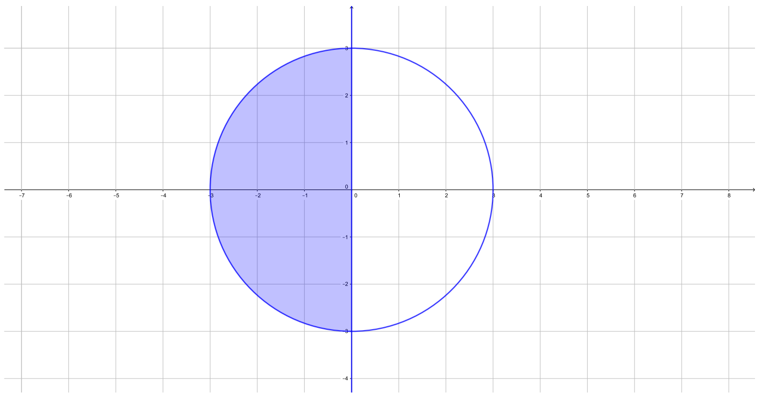
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

þar sem $\mathcal{C}$ er ferillinn umhverfis svæðið $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 9 \text{ og } x \leq 0\},$$

áttaður rangsælis.

■ **Lausn** Látum $\mathcal{C}$ vera ferillinn sem afmarkar svæðið, sjá Mynd 6.1.



Mynd 6.1: Ferillinn $\mathcal{C}$ umlykur bláa svæðið D í Æfingu 6.1.1.

Við notum setningu Green og fáum

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{D} \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \, dA \\
&= \int_{\mathcal{D}} (\sin(y) + x) \, dA \\
&= \int_{\mathcal{D}} x \, dA \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^3 r\cos(\theta)\, r \, dr \, d\theta \\
&= \Big[\sin(\theta) \Big]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{3\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=3} \\
&= -18.
\end{aligned}$$

Hér notuðum við að $\int_{\mathcal{D}} \sin(y)\, dA = 0$ því fallið $\sin(y)$ er oddstætt um $y = 0$ og svæðið $\mathcal{D}$ er samhverft um $y = 0$.

Æfing 6.1.2 Gefið er vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y + \sin(x^4))\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j}.$$

Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

þar sem $\mathcal{C}$ er tígullaga ferill með hornpunkta í $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, 0)$ og $(0, -2)$, áttaður rangsælis.

■ **Lausn** Látum $\mathcal{D}$ vera tígulinn sem ferillinn $\mathcal{C}$ afmarkar. Látum $\mathcal{E}$ vera þann hluta svæðisins $\mathcal{D}$ þar sem $x \geq 0$. Við reiknum

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \\
&= \int_{\mathcal{D}} (-2y - x^2)\; dA \\
&= \int_{\mathcal{D}} -x^2 dA \\
&= -2 \int_{\mathcal{E}} x^2 dA \\
&= -2 \int_0^1 \int_{2x-2}^{2-2x} x^2\; dy\; dx \\
&= -2 \int_0^1 x^2 \cdot \Big[y \Big]_{y=2x-2}^{y=2-2x} dx \\
&= -2 \int_0^1 x^2 (4 - 4x\,) dx \\
&= -8 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Fyrsta jafnaðarmerkið fæst frá setningu Green, það þriðja því fallið $y \mapsto y$ er oddstætt um $y = 0$ og svæðið $\mathcal{D}$ er samhverft um $y = 0$ og það fjórða því fallið $x \mapsto x^2$ er jafnstætt um $x = 0$ og $\mathcal{D}$ er samhverft um $x = 0$.

Æfing 6.2.1 Reiknið flæði

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{k}$$

út úr ferflötungnum sem afmarkast af plönunum

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{og} \quad 2x + y + z = 3.$$

Reiknið

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

án þess að nota setningu Gauss og berið niðurstöðuna saman við það sem fæst þegar setning Gauss er notuð. Heildið sem sett er upp með aðferð Gauss má leysa með reiknivél.

■ **Lausn** Ef við höfum ekki Gauss okkur til aðstoðar þurfum við að reikna flæðið í gegnum fjögur yfirborð. Byrjum á hliðinni sem liggur í $z = 0$. Þar er $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$ og þá

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -z = 0,$$

svo flæðið í gegnum þessa hlið er ekkert. Skoðum næst hliðina sem liggur í $x = 0$. Þar er $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{i}$ og þá

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -x = 0.$$

Flæðið í gegnum þessa hlið er sem sagt ekkert. Skoðum þá næst hliðina sem liggur í $y = 0$. Þar er $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{j}$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

svo hér er heldur ekkert flæði. Skoðum þá að lokum hliðina $2x + y + z = 3$. Þar getum við stikað yfirborðið með

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 - y - 2x \end{pmatrix}.$$

Við reiknum fyrst

$$\mathbf{n}(x, y) = -\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\,\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og svo

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot \mathbf{n}(x, y)\; dA \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{-2x+3} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3 - y - 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dy\; dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{-2x+3} (3 - y)\; dy\; dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[3y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-2x+3} dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-2x^2 + \frac{9}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{9x}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{3}{2}} \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Því er flæðið samtals í gegnum allar þessar fjórar hliðar $0 + 0 + 0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$.

Ef við notum setningu Gauss getum við reiknað þetta allt í einu rúmmálsheildi. Við athugum fyrst að svæðið $\mathcal{R}$, sem afmarkast af plönunum

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{og} \quad 2x + y + z = 3,$$

má rita sem

$$0 \le x \le \frac{3}{2}, \ \text{ svo } \ 0 \le y \le 3 - 2x \ \text{ og að lokum } \ 0 \le 3 - 2x - y.$$

Þar sem $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 2$ er heildið þá

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z)\, dV \\
&= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_0^{3-2x} \int_0^{3-y-2x} 2\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{3-2x} \Big[2z \Big]_{z=0}^{z=3-y-2x} dy\, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{3-2x} (6 - 2y - 4x)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \Big[6y - y^2 - 4xy \Big]_{y=0}^{y=3-2x} dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \Big(6(3-2x) - (3-2x)^2 - 4x(3-2x) \Big)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} \Big(4x^2 - 12x + 9 \Big)\, dx \\
&= \left[\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x \right]_{x=0}^{x=\frac{3}{2}} \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Æfing 6.2.2 Reiknið flæði vektorsviðsins

$$\mathbf{F} = x^3\, \mathbf{i} + y\, \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

út úr kúlu með radíus $R > 0$, þ.e. í gegnum yfirborðið

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

áttað út úr kúlunni.

■ **Lausn** Notum setningu Gauss og fáum

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} (3x^2+1)\, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} 3x^2\, dV + [\text{rúmmál kúlunnar}] \\ &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3\rho^2\cos^2(\theta)\sin(\phi)\cdot\rho^2\sin(\phi) d\theta\, d\phi\, d\rho + \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= 3\int_0^R \rho^4 d\rho \cdot \int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta \cdot \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi + \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= \frac{4}{5}\pi R^5 + \frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= 4\pi R^3\left(\frac{R^2}{5}+\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

Æfing 6.2.3 Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta $z = x^2 + y^2$ sem er undir planinu $z = 4$, áttað upp í gengum yfirborðið. Köllum jaðarinn á yfirborðinu $\mathcal{C}$. Látum

$$\mathbf{F} = 3z\,\mathbf{i} + 5x\,\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k}$$

vera vigursvið. Reiknið flæðisheildið

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$$

með hjálp setningar Stoke.

■ **Lausn** Stikum ferilinn $\mathcal{C}$ með

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\,\mathbf{i} + 2\sin(t)\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Þá er

$$\mathbf{r}'(t) = -2\sin(t)\,\mathbf{i} + 2\cos(t)\,\mathbf{j}$$

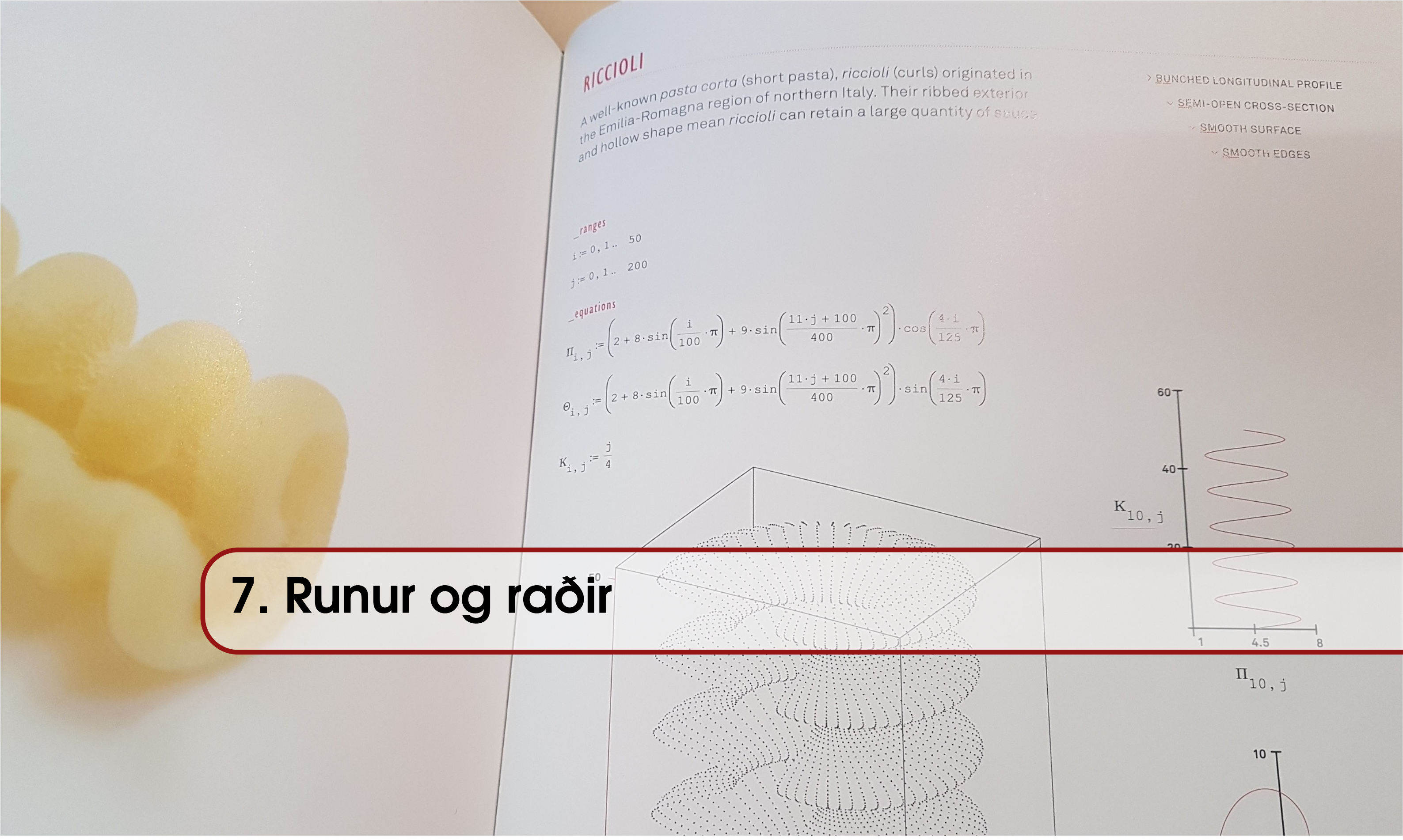
og á ferlinum er

$$x = 2\cos(t), \quad y = 2\sin(t) \quad \text{og} \quad z = 4.$$

Við reiknum svo með hjálp setningar Stoke að

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 3\cdot 4 \\ 5\cdot 2\cos(t) \\ -2\cdot 2\sin(t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0\end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-24\sin(t) + 20\cos^2(t)\right) dt \\ &= 20\pi,\end{aligned}$$

því heildið af $\sin(t)$ yfir bilið 0 til 2π er núll og heildið af $\cos^2(t)$ yfir sama bil er π, sjá t.d. Dæmi 6.6.



7. Runur og raðir

Í þessun hluta ætlum við að fjallað er um runur og raðir (e. sequences and series).

Er eitthvert vit í óendanlegri summu eins og

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \; ?$$

Við getum hugsað okkur að við höfum ferhyrning með flatamál 1. Fyrst tökum við hálfan ferhyrninginn, svo helminginn af því sem eftir er og þannig áfram koll af kolli. Nokkuð ljóst ætti að vera að ef við höldum þannig óendanlega lengi áfram, að þá er ekkert eftir af flatarmálinu sem við höfum ekki tekið. Með öðrum orðum: Eftir því sem við tökum fleiri liði með í summunni, því nær er summan því að vera talan 1 og fyrir hvaða tölu $\varepsilon > 0$ sem er getum við, með því að láta $N \in \mathbb{N}$ vera nógu stóra tölu, tryggt að

$$\left| 1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \right| < \varepsilon.$$

Maður segir að *markgildi* summunnar sé 1 þegar N stefnir á $+\infty$.

Flest mikilvæg föll er hægt að setja fram sem (óendanlega) summu einfaldra falla, t.d.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots .$$

Oft er hægt að diffra og heilda slík föll með því að diffra eða heilda slíkar óendanlegar summur lið fyrir lið. Í þessum hluta tökum við saman mikilvægustu eiginleika runa og raða. Við sönnum einnig flestar helstu niðurstöður.

7.1 Runur

Runa af rauntölum, táknuð með $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, er raðað safn af rauntölum þar sem sérhverri náttúrulegri tölu $n \in \mathbb{N}$ er úthlutað nákvæmlega einni rauntölu $a_n \in \mathbb{R}$. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eru runur, þá segjum við að $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ séu sama runan þþaa.

$$a_n = b_n \quad \text{fyrir sérhvert } n \in \mathbb{N}.$$

Athugasemdir.

1. Runa er í raun ekkert annað en vektor með jafn (óendanlega) marga liði og náttúrulegu tölurnar eru margar.
2. Fall $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ úthlutar sérhverju $n \in \mathbb{N}$ nákvæmlega eina rauntölu $f(n)$. Slíkt fall skilgreinir því á augljósan hátt runu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ með $a_n := f(n)$.
3. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er runa, þá getum við skilgreint fall $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ með því að setja $f(n) := a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Það er því lítil ástæða til þess að gera mun á runum og föllum $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
4. Í stað þess að nota $\mathbb{R}$ sem varpmengi getur maður notað $\mathbb{C}$.
5. Í sumum kennslubókum er runa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ táknuð með $\{a_n\}$, sem er afar óheppilegt því svona er mengi yfirleitt táknað. Í runu skiptir röðin á stökunum máli, í mengi aftur á móti ekki.

■ **Dæmi 7.1** Nokkur dæmi um runur.

1. $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, \ldots)$, þ.e. runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem $a_n = n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.
2. $((-2)^{-n})_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$, þ.e. runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem $a_n = (-2)^{-n}$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.
3. Skoðum runurnar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, þar sem $a_n := (-1)^{n-1}$ og $b_n := \cos((n-1)\pi)$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Þetta er sama runan því
$$b_n = \cos((n-1)\pi) = (-1)^{n-1} = a_n \quad \text{fyrir öll } n \in \mathbb{N}.$$
4. Við skilgreinum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ með $a_1 := 1$ og $a_n := \sqrt{6 + a_{n-1}}$ fyrir öll $n \geq 2$. Þetta skilgreinir runu því við getum reiknað út a_n fyrir hvaða $n \in \mathbb{N}$ sem er. T.d. er
$$a_3 = \sqrt{6 + a_2} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + a_1}} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + 1}} = \sqrt{6 + \sqrt{7}}.$$
5. Við skilgreinum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ með $a_1 := 1$, $a_2 := 1$ og $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ sem eru stærri en 2. T.d. er $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$ og $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$. Þessi runa gengur undir nafninu Fibonacci-tölurnar.

■

Skilgreining 7.1.1 Nokkur hugtök notuð til þess að lýsa runum.
Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera runu af rauntölum.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *takmörkuð að neðan* ef til er $L \in \mathbb{R}$ þ.a. $L \leq a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Talan L er sögð vera *neðra mat* fyrir rununa.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *takmörkuð að ofan* ef til er $M \in \mathbb{R}$ þ.a. $M \geq a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Talan M er sögð vera *efra mat* fyrir rununa.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *takmörkuð* ef til er $K \in \mathbb{R}$ þ.a. $K \geq |a_n|$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.
Ath. runan er takmörkuð þþaa. hún sé takmörkuð að ofan og að neðan.
b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *jákvæð* ef talan 0 er neðra mat rununnar ($a_n \geq 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$).

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *neikvæð* ef talan 0 er efra mat rununnar ($a_n \leq 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$).

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *vaxandi* ef $a_{n+1} \geq a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ og er sögð vera *minnkandi* (eða fallandi) ef $a_{n+1} \leq a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Hún er sögð vera *einhalla* ef hún er vaxandi eða minnkandi.

Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er runa af tvinntölum, þá heitir hún *takmörkuð* ef til er $K \in \mathbb{R}$ þ.a. $|a_n| \leq K$.

■ **Dæmi 7.2** Runan $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ er takmörkuð og minnkandi runa. T.d. er $1/2$ efra mat og 0 neðra mat. Hún er einnig einhalla. ■

■ **Dæmi 7.3** Tvinntölurunan $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ er takmörkuð því

$$|e^{in}| = \sqrt{\cos^2(n) + \sin^2(n)} = 1 \text{ fyrir öll } n \in \mathbb{N}.$$

■

Yfirleitt hefur maður bara áhuga á því hvernig runa hegðar sér fyrir stór $n \in \mathbb{N}$, þ.e. fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ stærri en einhver ákveðin tala. T.d. er runan $(-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ jákvæð, nema fyrir fimm fyrstu liðina. Maður segir að runan sé *jákvæð að lokum* (e. ultimately positive). Almennt notar maður *að lokum* til þess að tjá að frá og með einhverjum lið hafi runan einhverja tiltekna eiginleika.

Yfirleitt hefur maður lítinn áhuga á öðru en markgildi runu:

Skilgreining 7.1.2 Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera runu af rauntölum. Við segjum að runan sé *samleitin* ef til er tala $L \in \mathbb{R}$ þ.a. $|a_n - L|$ verður eins lítið og vera vill fyrir nógu stór $n \in \mathbb{N}$. L heitir þá *markgildi* rununnar og við ritum $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$. Runa sem ekki er samleitin heitir *ósamleitin*. Nákvæm skilgreining er:

Runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heitir samleitin með markgildið $L \in \mathbb{R}$, ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $N \in \mathbb{N}$ þ.a.

$$\text{ef } n \geq N, \text{ þá er } |a_n - L| < \varepsilon.$$

ATH Í skilgreiningunni á markgildi má allt eins gera ráð fyrir því að $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé runa af tvinntölum og að $L \in \mathbb{C}$.

■ **Dæmi 7.4** Skoðum rununa $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$. Þessi runa er samleitin og hefur markgildið 0. Af hverju? Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið. Með því að láta $N \in \mathbb{N}$ vera tölu $> 1/\varepsilon$, þá er $\varepsilon > 1/N$ og tryggt er að

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \text{ fyrir öll } n \geq N.$$

■

Oft er þægilegt að nota að við kunnum að finna markgildi falla, svo við skoðum tilsvarandi fall fyrir rununa sem við erum að skoða. Ef $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er fall og $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er runa og $a_n = f(n)$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, þá gildir: Ef $f(x)$ hefur markgildið $L \in \mathbb{R}$ þegar $x \to +\infty$, þá er runan samleitin og

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

■ **Dæmi 7.5** Þar sem fallið $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, hefur markgildið 0 þegar x stefnir á óendanlegt og $f(n) = a_n = 1/n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, þá er runan $a_n = 1/n$ samleitin og hefur markgildið 0. ■

■ **Dæmi 7.6** Athugið vel að fullyrðingar eins og í síðasta dæmi gilda ekki í hina áttina. Látum t.d. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x)$, og $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera runu þar sem $a_n = 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Þá er $a_n = f(n)$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ og augljóslega er $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Engu að síður hefur $f(x)$ ekki markgildi þegar x stefnir á óendanlegt. ■

ATH Runa sem stefnir á $+\infty$ eða $-\infty$ eða hefur ekkert markgildi er sögð vera ósamleitin.

Ef rauntöluruna $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er ekki samleitin, þá er hún sögð vera ósamleitin. Ef fyrir sérhvert $M \in \mathbb{R}$ er til $N_M \in \mathbb{N}$ þ.a. fullyrðingin „ef $n \geq N_M$, þá er $a_n \geq M$“ er sönn, þá segjum við að runan stefni á $+\infty$ þegar n stefnir á óendanlegt og ritum

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Samsvarandi ritum við

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

ef fyrir sérhvert $L \in \mathbb{R}$ er til $N_L \in \mathbb{N}$ þ.a. fullyrðingin „ ef $n \geq N_L$, þá er $a_n \leq L$“ er sönn.

■ **Dæmi 7.7** Runan $((n-1)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin með markgildið 1. Runan $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ er ósamleitin og $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Runurnar $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ eru ósamleitnar. ■

Af reglum um reiknireglur fyrir markgildi falla leiðir eftirfarandi beint.

Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera samleitnar runur af rauntölum og $c \in \mathbb{R}$. Þá er

$$\lim_{n\to+\infty} ca_n = c \lim_{n\to+\infty} a_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)$$

og

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} a_n} \quad \text{ef} \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0.$$

ATH Reiknireglurnar hér að ofan eru líka réttar fyrir tvinntalnarunur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $c \in \mathbb{C}$.

Að auki leiðir af Klemmureglunni: Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eru runur þ.a. $a_n \leq b_n \leq c_n$ fyrir öll n frá og með einhverjum lið (að lokum) og

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L,$$

þá er $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ samleitin og $\lim_{n\to+\infty} b_n = L$.

■ **Dæmi 7.8** Runan $(\sqrt{n^2+2n}-n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin með markgildið 1 því

$$\sqrt{n^2+2n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1}$$

svo

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+2/n}+1\right)}=\frac{2}{1+1}=1.$$

■

■ **Dæmi 7.9** Sýnið að runan $(\cos(n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé samleitin með markgildið 0.
Lausn: Athugum að

$$\frac{-1}{n}\leq\frac{\cos(n)}{n}\leq\frac{1}{n}$$

og

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Klemmureglan segir þá að

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n)}{n}=0.$$

■

Nokkrar mikilvægar staðreyndir um runur eru:

Regla 7.1.1 Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera rauntalnarunu. Þá gildir:
1. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin, þá er hún takmörkuð.
2. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er takmörkuð að ofan og vaxandi að lokum, þá er hún samleitin.
3. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er takmörkuð að neðan og minnkandi að lokum, þá er hún samleitin.
4. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er vaxandi að lokum, þá gildir nákvæmlega eitt af tvennu:
   a) Hún er samleitin. b) Hún er ósamleitin og $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.
5. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er minnkandi að lokum, þá gildir nákvæmlega eitt af tvennu:
   a) Hún er samleitin. b) Hún er ósamleitin og $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$.

Sönnun.
1. Gerum ráð fyrir að $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé samleitin með markgildið L. Þá er fyrir $\varepsilon=1$ til $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ þ.a. ef $n\geq N_\varepsilon$ þá er $|a_n-L|<\varepsilon=1$. En þá er $|a_n|<|L|+1$ fyrir öll $n\geq N_\varepsilon$ og þá

$$|a_n|\leq\max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,\ldots,|a_{N_\varepsilon}|,|L|+1\}$$

   fyrir öll $n\in\mathbb{N}$.
2. Leiðir af fullkomleika rauntalnakerfisins (rauntöluásinn hefur engin göt). Rauntölurnar eru skilgreindar þannig að þetta verður að gilda. Áhugasamir geta googlað *Dedekind cut*.
3. Leiðir af fullkomleika rauntalnakerfisins (rauntöluásinn hefur engin göt).
4. Gerum ráð fyrir að $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé vaxandi að lokum. Ef hún er takmörkuð að ofan, þá er hún samleitin skv. lið 2. Ef hún er ekki takmörkuð að ofan, þá hlýtur $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.
5. Svipað og 4.

■

■ **Dæmi 7.10** Sýnið að runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, þar sem

$$a_n = \frac{n^2-3}{n^3+4} \text{ fyrir öll } n \in \mathbb{N},$$

sé minnkandi að lokum.
Lausn: Skilgreinum fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^3+4}.$$

Þá er

$$f'(x) = -\frac{x(x^3-9x-8)}{(x^3+4)^2}$$

og ef $x > 4$ þá er $f'(x) < 0$. Því er f minnkandi fall á bilinu $[4, +\infty[$ og þar með $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minnkandi að lokum, því ef $n \geq 4$ þá er

$$a_n = f(n) > f(n+1) = a_{n+1}.$$

■

Regla 7.1.2 Tvö afar mikilvæg markgildi eru:

1. Ef $x \in \mathbb{R}$ og $|x| < 1$, þá gildir
$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0.$$
2. Fyrir hvaða $x \in \mathbb{R}$ sem er gildir
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

ATH Regla 7.1.2 er líka rétt fyrir $x \in \mathbb{C}$.

Sönnun. 1. Fullyrðingin er augljóslega rétt ef $x = 0$. Við gerum því ráð fyrir að $0 < |x| < 1$. Auðséð er að

$$-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$$

svo það nægir vegna Klemmureglu að sýna að $\lim_{n\to+\infty} |x|^n = 0$. Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið. Við veljum $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ þ.a.

$$N_\varepsilon > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|x|)}$$

því þá gildir skv. reglum fyrir lograföll og af því að $\ln(|x|) < 0$ því $0 < |x| < 1$, að

$$\ln(|x|^{N_\varepsilon}) < \ln(\varepsilon),$$

sem er jafngilt

$$|x|^{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

því $\ln$ er stranglega vaxandi fall. En þá gildir fyrir sérhvert $n \geq N_\varepsilon$ að

$$||x|^n - 0| = |x|^n \leq |x|^{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

svo $(|x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin með markgildið 0.

2. Veljum $N \in \mathbb{N}$ þ.a. $N > |x|$. Þá gildir fyrir sérhvert $n > N$ að

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n} < \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}$$

svo með $y := |x|/N < 1$ og

$$K := \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot y^{1-N}$$

gildir

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| < Ky^n.$$

Af því $|y| < 1$ þá fæst með Klemmureglunni og því sem ofan var sýnt að

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0.$$

■

ATH Sönnunin á lið 2. hér að ofan er dæmigerð fyrir sönnun fyrir runur og hugmyndin er einföld. Við festum x og getum þá alltaf fundið heila tölu N þ.a. $N > |x|$. Við getum lítið sagt um liðina

$$\frac{|x|}{k} \quad \text{með} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{og} \quad 1 \le k \le N-1,$$

en þeir eru bara endanlega margir svo margfeldi þeirra er bara einhver rauntala; hugsanlega mjög stór en samt endanleg. Fyrir liðina

$$\frac{|x|}{k} \quad \text{með} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{og} \quad N \le k,$$

vitum við að þeir eru ekki stærri en $|x|/N$ því $k \ge N$ og $|x|/N < 1$ því $N > |x|$. Frá lið 1. í reglunni vitum við svo að ef við margföldum tölu sem er minni en einn óendanlega oft við sjálfa sig er niðurstaðan núll. Að lokum notfærum við okkur að núll sinnum hvaða endanlega tala sem er gefur núll. Sönnunin er bara stærðfræðilegri framsetning á þessari hugmynd.

■ **Dæmi 7.11**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{5^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right] = 0+0+1 = 1.$$

■

Æfingar 7.1

Æfing 7.1.1 Skoðum hina frægu Fibonacci runu, sem er skilgreind með $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

a) Sýnið að runan er vaxandi.
b) Sýnið að runan er ósamleitin.

Ábending: Í lið b) er t.d. hægt að gera ráð fyrir að runan sé samleitin að $L \in \mathbb{R}$ og sýna svo að það leiðir til mótsagnar.
■

Æfing 7.1.2 Skoðum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sem er skilgreind með $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n - 2$ fyrir öll $n \geq 1$.

a) Reiknið a_3, a_4 og a_5 og dragið ályktun um halla rununnar.
b) Sannið með þrepun að runan sé minnkandi.

Ábending. Í b)-lið hentar betur að sanna að $a_{n+1} - a_n \leq 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. ■

Æfing 7.1.3 Skoðum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem $a_n = \dfrac{n-4}{n+1}$.

a) Finnið efra mat ef runan er takmörkuð að ofan og neðra mat ef runan er takmörkuð að neðan.
b) Er runan jákvæð eða neikvæð að lokum?
c) Er runan vaxandi eða minnkandi? Munið að rökstyðja.
d) Er runan samleitin eða ósamleitin?

■

7.2 Raðir

Við snúm okkur að röðum, þ.e. óendanlegum summum. Látum a_k, $k \in \mathbb{N}$, vera rauntölur. Við höfum áhuga á því hvort við getum skilgreint óendanlegu summuna

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Þ.e. við viljum geta sagt hvort röðin er samleitin eða ósamleitin; með öðrum orðum, hvort summan sé að stefna á eitthvert tiltekið gildi eða ekki þegar við bætum við liðum. Til þess að ákvarða þetta getum við skoðað hlutsummurunu raðarinnar.

7.2.1 Hlutsummurunur

Við byrjum á því að búa til runu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, þar sem

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Runan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er kölluð *hlutsummuruna* raðarinnar $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Við segjum að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sé *samleitin* ef hlutsummurunan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin og við skilgreinum þá

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Ef hlutsummurunan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er ósamleitin, þá segjum við að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sé *ósamleitin*. Ef $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ þá skilgreinum við

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := +\infty$$

og ef $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ þá skilgreinum við

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := -\infty.$$

■ **Dæmi 7.12** Skoðum röðina

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Við byrjum á því að mynda hlutsummurununa $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

T.d. er

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \;\text{ og }\; s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Síðar munum við reikna út formúluna

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n},$$

en af þessari formúlu leiðir að $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$ svo skv. skilgreiningu er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

■

ATH Auðvitað er ekki nauðsynlegt að byrja að telja frá 1 í summunni. T.d. er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

7.2.2 Kvótaraðir

Afar heppilegt er að (lang) mikilvægasta röðin er einnig ein af þeim einfaldari, hin svokallaða kvótaröð (e. geometric series):

Skilgreining 7.2.1 Röð af gerðinni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$$

er kölluð kvótaröð með kvótann r.

Við höfum áður sannað í Reglu 7.1.2 að ef $|r| < 1$, þá er $\lim_{k \to +\infty} r^k = 0$. Skoðum nú hlutsummurunu kvótaraðar,

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n,$$

fyrir öll $n = 0, 1, 2, \ldots, n$. Athugum að

$$\begin{aligned}
(1-r)s_n &= r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n - r(r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n) \\
&= r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n - (r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n+1}) \\
&= 1 - r^{n+1}
\end{aligned}$$

svo ef $r \neq 1$, þá er

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

og þar með, ef $|r| < 1$, er

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Athugið: Við höfum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = +\infty \quad \text{ef } r \geq 1$$

og $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$ er einfaldlega ósamleitin ef $r \leq -1$.

ATH Kvótaröðin er stundum skrifuð $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$, þar sem a er fasti.

ATH Raðir með tvinntölustuðlum er hægt að fjalla um á mjög svipaðan hátt með því að skoða hlutsummurunur. Sér í lagi gildir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$

ef $r \in \mathbb{C}$ þ.a. $|r| < 1$ og $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$ er ósamleitin ef $|r| \geq 1$.

7.2.3 Kíkisraðir

Dæmi um aðrar raðir þar sem auðvelt er að reikna summuna eru svokallaðar kíkisraðir (e. telescoping series). Í þeim styttast nær allir liðir út eftir stofnbrotaliðun. Skoðum t.d.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Með umritununni

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

sér maður að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

svo hlutsummurunan er mjög einföld því allir liðir nema sá fyrsti og síðasti styttast út,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

og þar með gildir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

7.2.4 Nokkrar gagnlegar staðreyndir um raðir

Regla 7.2.1 Ef röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

er samleitin, þá gildir $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Sönnun. Myndum fyrst hlutsummurununa

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Þá gildir, því röðin er samleitin, að til er $a \in \mathbb{R}$ þ.a.

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

En þá gildir, vegna $a_k = s_k - s_{k-1}$, að

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to+\infty} s_k - \lim_{k\to+\infty} s_{k-1} = a - a = 0$$

skv. reiknireglum fyrir runur. ■

Athuga ber að $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ er nauðsynlegt skilyrði, en ekki nægjanlegt. T.d. gildir $\lim_{k\to+\infty} 1/k = 0$ en eins og við munum sýna síðar er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Nokkuð augljóst ætti að vera að næsta regla gildir, því það munar bara tölunni $\sum_{k=1}^{N-1} a_k \in \mathbb{R}$ á röðunum.

Regla 7.2.2 Fyrir öll $N \in \mathbb{N}$ gildir: Röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

er samleitin, þþaa. röðin

$$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$$

er samleitin.

Regla 7.2.3 Ef runan $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er jákvæð (að lokum), þá gildir nákvæmlega eitt af tvennu:

$$a)\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ er samleitin} \quad \textit{eða} \quad b)\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty.$$

Sönnun. Hlutsummurunan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

er vaxandi (að lokum), því fyrir öll nógu stór k er $a_k \geq 0$. Við notum Reglu 7.1.1 lið 4) til að sjá: Ef runan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hefur efra mat $M \in \mathbb{R}$, þ.e. $s_n \leq M$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, þá er hún samleitin, og þar með er $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin. Ef $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hefur ekki efra mat, þá gildir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty.$$

■

Næsta regla leiðir beint af samsvarandi eiginleikum fyrir runur.

Regla 7.2.4 Ef $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ og $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ eru samleitnar raðir og $c \in \mathbb{R}$, þá gildir:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k+\sum_{k=1}^{+\infty}b_k.$$

Ef $a_k \leq b_k$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$, þá gildir

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty}b_k.$$

■ **Dæmi 7.13** Reiknum

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1+2^{k+1}}{3^k}.$$

Lausn: Byrjum á því að reikna

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-1/3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

Svo reiknum við

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k+1}}{3^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{k+2}}{3^{k+1}}=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=4.$$

En þar með er sýnt að

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1+2^{k+1}}{3^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k+1}}{3^k}=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}.$$

■

7.2.5 Skilyrt samleitni og alsamleitni

Alsamleitnar raðir eru sérstaklega áhugaverðar samleitnar raðir.

Skilgreining 7.2.2 Röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er sögð vera *alsamleitin* ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ er samleitin.

Eftirfarandi staðreynd er mikilvæg.

Regla 7.2.5 Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er alsamleitin, þá er hún samleitin.

Sönnun. Við setjum $b_k = a_k + |a_k|$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Þá er

$$0 \leq b_k = a_k + |a_k| \leq 2|a_k| \quad \text{fyrir öll } k \in \mathbb{N}$$

svo runan $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er jákvæð og af því að $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er alsamleitin gildir

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k| = A < +\infty.$$

En þá er skv. síðasta lið í Reglu 7.2.4

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \le 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = 2A < +\infty$$

og þá skv. Reglu 7.2.3 röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ samleitin. En nú er $a_k = b_k - |a_k|$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$ svo skv. miðliðnum í Reglu 7.2.4 er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - |a_k|) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k - \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|,$$

þ.e. röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er samleitin. ■

ATH Nákvæmlega það sama gildir fyrir tvinntalnaraðir $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Ef rauntalnarunan $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ er samleitin, sem er jafngilt því að $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$, er tvinntalnaröðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin.

Skilgreining 7.2.3 Röð sem er samleitin, en ekki alsamleitin er sögð vera *skilyrt samleitin*.

Ekki augljós staðreynd er, að það eru til skilyrt samleitnar raðir. T.d. er hægt að sýna að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

ATH Til þess að sýna að röð $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sé alsamleitin er nóg, skv. Reglu 7.2.3 að sýna að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty.$$

Þetta er yfirleitt gert með því að sýna að til sé einhvert $M \in \mathbb{R}$ þ.a. fyrir hvaða $N \in \mathbb{N}$ sem er gildi

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k| \le M.$$

Augljóslega eru hugtökin samleitni og alsamleitni jafngild hugtök fyrir röð með jákvæðum tölum.

Miklvægi alsamleitni ræðst að mestu af eftirfarandi setningu.

Regla 7.2.6 a) Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er alsamleitin, þá er sama í hvaða röð við leggjum liðina saman, við fáum alltaf sömu útkomu.

b) Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er skilyrt samleitin, þá getum við fyrir hvaða $L \in \mathbb{R}$ sem er raðað liðunum a_k upp á nýtt þ.a. óendanlega summan sé L. Að auki er mögulegt að raða liðunum a_k þ.a. óendanlega summan sé $+\infty$ eða $-\infty$. Við getum líka raðað liðunum þ.a. röðin hafi ekki markgildi.

Ekki verður farið nákvæmlega í sönnunina hér, en megin ástæðan er sú að ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er skilyrt samleitin, þá er óendanlega summa negatívu liðanna $-\infty$ og óendanlega summa jákvæðu liðanna $+\infty$. b)-liðurinn er því ein útgáfa þess að ekki er hægt að skilgreina $+\infty - \infty$ svo eitthvert vit sé í.
Athugið að skilyrt samleitni raðar er skrítin samleitni og útkoman úr summunni er einungis háð röð liðanna. Ef við hefðum t.d. ekki skilgreint

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{sem} \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k = \lim_{N\to+\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N)$$

heldur sem

$$\lim_{N\to+\infty} (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2N+1} + a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{4N}),$$

þá væri útkoman almennt önnur hjá skilyrt samleitnum röðum. Það má því færa sterk rök fyrir því að skilyrt samleitni sé ekki góð samleitni.

Alsamleitni er mikilvægara hugtak en skilyrt samleitni því þar er summan óháð því í hvaða röð við leggjum liðina saman!

Æfingar 7.2

Æfing 7.2.1 Reiknið summu raðarinnar

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 4}{5^n}.$$

■

Æfing 7.2.2 Reiknið summuna

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^{n+2}}{3^{n-3}}.$$

■

Æfing 7.2.3 Reiknið summuna ef röðin er samleitin, eða rökstyðjið að hún sé ekki samleitin.

$$\text{a)} \sum_{n=3}^{+\infty} 1, \quad \text{b)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{n+3}}{3^{n-2}}, \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{5^n}, \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n},$$

■

Æfing 7.2.4 Finnið hlutsummurunu kíkisraðarinnar

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

og notið hana til að reikna summu raðarinnar.

■

Æfing 7.2.5 Finnið hlutsummurunu kíkisraðarinnar

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

og notið hana til að reikna summu raðarinnar.

■

Æfing 7.2.6 Reiknið hlutsummurunu raðarinnar

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Er röðin samleitin?

■

Æfing 7.2.7 Eru eftirfarandi fullyrðingar réttar eða rangar? Rökstyðjið svarið vandlega.

a) Ef runan $(a_n)_{n\in N}$ er samleitin, þá er röðin $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ samleitin.

b) Ef röðin $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ er samleitin, þá er runan $(b_n)_{n\in N}$ samleitin.

■

7.3 Samleitnipróf

Almennt er erfitt að reikna summur raða og oft nægir líka að vita hvort einhver tiltekin röð sé alsamleitin eða ekki. Megin ástæðan fyrir þessu er að við viljum skilgreina föll af gerðinni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

og þurfum þá að vera viss um að þau séu vel skilgreind, þ.e. að $f(x)$ hafi einhverja merkingu fyrir tiltekin $x \in \mathbb{R}$. Ef við getum verið viss um það, þá má nálgast rétta gildið eins mikið og þörf er á með því að leggja saman nógu marga liði raðarinnar. Til þess að skera úr um það hvort röð sé alsamleitin eru til ýmsar aðferðir. Hér á eftir fylgja nokkrar þær mikilvægustu.

Regla 7.3.1 — Heildispróf. Látum $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu, $N \in \mathbb{N}$ og $f : [N, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vera samfellt fallandi (minnkandi) fall þ.a. $f(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in [N, +\infty[$ og $f(n) = a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Þá gildir:

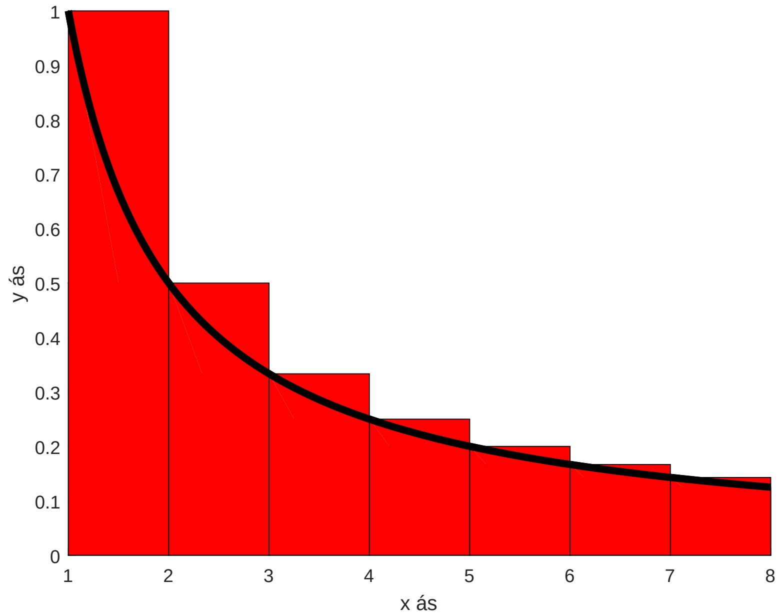
a) Ef
$$\int_N^{+\infty} f(t)dt = +\infty, \quad \text{þá er} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty.$$

b) Ef
$$\int_N^{+\infty} f(t)dt < +\infty, \quad \text{þá er röðin} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty \quad \text{alsamleitin.}$$

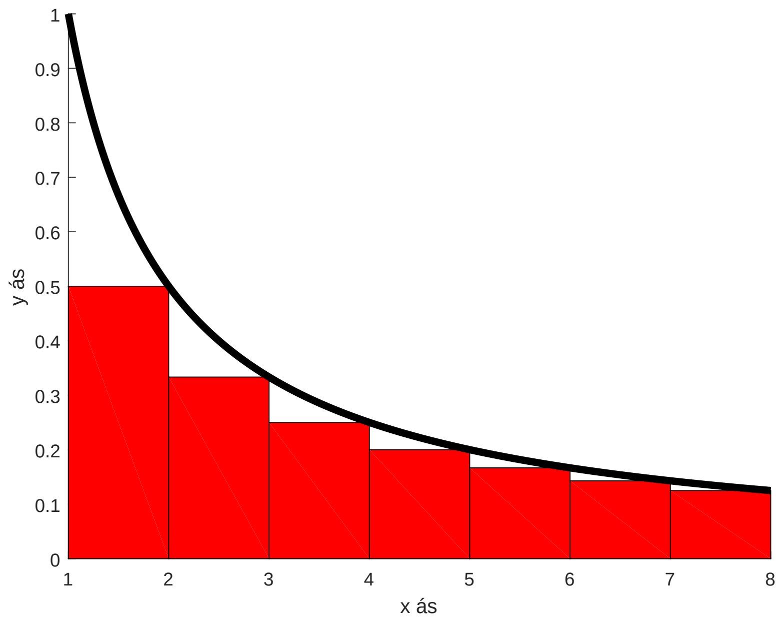
Sönnun. Sést best með því átta sig á því að
$$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=N-1}^{+\infty} a_k.$$

Skoðum til þess fyrst Mynd 7.1. Á henni hefur súlan lengst til vinstri hæðina a_1 og breiddina 1 og þar með flatarmálið a_1, næsta hefur hæðina a_2 og breiddina 1 og þar með flatarmálið a_2 og svo framvegis. Við sjáum að flatarmálið undir súlunum er stærra en flatarmálið undir grafi fallsins $y = f(x)$, táknað með feitu svörtu línunni. Ef við ímyndum okkur að myndin nái upp í óendanlega stór x, þá sést að flatarmálið undir súlunum $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er stærra en flatarmálið $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ undir grafinu $y = f(x)$. Ef við hliðrum súlunum um einn til vinstri eins og á Mynd 7.2, þá eru súlurnar undir grafi fallsins og á svipaðan hátt sjáum við að $\sum_{k=2}^{+\infty} a_k$ er minna en $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Á þessum myndum er $N = 1$, en það skiptir klárlega engu máli fyrir niðurstöðuna. ■

■ **Dæmi 7.14** Sýnið að röðin
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$$
er samleitin ef $p > 1$ og ósamleitin ef $0 < p \leq 1$.
Lausn: Við skilgreinum $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^p$. Þá er
$$f'(x) = -px^{-p-1} < 0$$
fyrir öll $x > 0$, svo f er samfellt og fallandi fall og augljóslega er $f(k) = 1/k^p$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Nú er, ef $p \neq 1$,
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^{x=+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$
og þar sem
$$\lim_{y\to+\infty} x^{-p+1} = 0 \quad \text{ef } p > 1 \text{ og þá } -p+1 < 0$$



Mynd 7.1: Graf minnkandi falls $y = f(x)$ og súlur með hæð $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, o.s.frv.



Mynd 7.2: Graf minnkandi falls $y = f(x)$ og súlur með hæð $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, o.s.frv.

og

$$\lim_{y\to+\infty} x^{-p+1} = +\infty \quad \text{ef } 0 < p < 1 \text{ og þá } -p+1 > 0$$

gefur Regla 7.3.1 að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$$

er samleitin ef $p > 1$ og ósamleitin ef $0 < p < 1$.

Fyrir $p = 1$ er

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \Big[\ln(x)\Big]_{x=1}^{x=+\infty} = +\infty,$$

svo skv. Reglu 7.3.1 er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}\bigg|_{p=1}$$

ósamleitin. ∎

Regla 7.3.2 — Samanburðarpróf. Látum $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ og $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runur af jákvæðum rauntölum og $K > 0$ vera fasta og gerum ráð fyrir að $a_k \le Kb_k$ að lokum, þ.e. til er $N \in \mathbb{N}$ þ.a. ef $k \ge N$, þá er $a_k \le Kb_k$. Þá gildir

$$0 \le \sum_{k=N}^{+\infty} a_k \le K \sum_{k=N}^{+\infty} b_k$$

svo:

(a) Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er samleitin, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin.

(b) Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er ósamleitin, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ ósamleitin.

Sönnun. Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er samleitin, þá er

$$0 \le \sum_{k=N}^{+\infty} a_k \le K \sum_{k=N}^{+\infty} b_k < +\infty$$

svo röðin $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$ er samleitin og þar með $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Ef röðin $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$ er ósamleitin, þá er

$$+\infty = \sum_{k=N}^{+\infty} a_k \le K \sum_{k=N}^{+\infty} b_k$$

svo við höfum

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty,$$

sem þýðir að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er ósamleitin. ∎

ATH Samanburðarprófið í Reglu 7.3.2 gefur enga niðurstöðu ef $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er samleitin eða ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er ósamleitin.

■ **Dæmi 7.15** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k+1}$$

samleitin?
Lausn: Við sjáum að

$$\left|\frac{(-1)^k}{2^k+1}\right| = \frac{1}{2^k+1} \leq \frac{1}{2^k}$$

fyrir öll $k = 1, 2, \ldots$ og þar sem

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty$$

segir Regla 7.3.2 okkur að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k+1}$ sé alsamleitin og þar með samleitin. ■

■ **Dæmi 7.16** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k+1}{k^3+1}$$

samleitin?
Lausn: Við sjáum að

$$0 < \frac{3k+1}{k^3+1} = \frac{3k}{k^3+1} + \frac{1}{k^3+1} < \frac{3k}{k^3} + \frac{1}{k^3} \leq 3\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = 4\frac{1}{k^2}$$

fyrir öll $k = 1, 2, \ldots$ og þar sem

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k+1}{k^3+1}$$

alsamleitin og þar með samleitin. Reyndar eru allir liðir raðarinnar jákvæðir svo enginn munur er á hugtakinu samleitni og alsamleitni. ■

■ **Dæmi 7.17** Er röðin

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(k)}$$

samleitin?
Lausn: Við sjáum að fyrir öll $k = 2, 3, \ldots$ er

$$0 < \frac{1}{k} < \frac{1}{\ln(k)}$$

og við vitum að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Þar með er röðin

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(k)}$$

ekki alsamleitin og þar með heldur ekki samleitin, því allir liðir hennar eru jákvæðir. Hún er sem sagt ósamleitin. ■

Regla 7.3.3 — Markgildispróf. Ef $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ og $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eru runur af jákvæðum rauntölum þ.a.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

þar sem $L \in \mathbb{R}$ eða $L = +\infty$. Þá gildir:

(a) Ef $L < +\infty$ og röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er samleitin, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin.

(b) Ef $L > 0$ og röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er ósamleitin, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ósamleitin.

Sönnun. Ef $L < +\infty$, þá er til $N \in \mathbb{N}$ þ.a. fyrir öll $k \geq N$ er $b_k > 0$ og

$$0 \leq \frac{a_k}{b_k} \leq L + 1.$$

En þá er

$$0 \leq a_k \leq (L+1)b_k$$

fyrir öll $k = N, N+1, N+2, \ldots$, svo skv. Reglu 7.3.2 er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin.

Ef $L > 0$, þá er til $M \in \mathbb{N}$ þ.a. fyrir öll $k \geq M$ er

$$\frac{a_k}{b_k} \geq \min\{1, \frac{L}{2}\}, \quad \text{þ.e.} \quad a_k \geq \min\{1, \frac{L}{2}\}b_k.$$

Ef nú

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty, \quad \text{þá er} \quad \sum_{k=M}^{+\infty} a_k \geq \min\{1, \frac{L}{2}\} \sum_{k=M}^{+\infty} b_k = +\infty$$

svo röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er ósamleitin. ■

ATH Regla 7.3.3 gefur enga niðurstöðu ef

- $L = +\infty$ og röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er ósamleitin.
- $L = 0$ og röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er samleitin.

■ **Dæmi 7.18** Er röðin
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{100}+\sqrt{k}}$$
samleitin?
Lausn: Við höfum
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1/(10^{100}+\sqrt{k})}{1/\sqrt{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{k})}{10^{100}+\sqrt{k}} = 1$$
og
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = +\infty.$$
Því er skv. Reglu 7.3.3 röðin ósamleitin. ■

■ **Dæmi 7.19** Er röðin
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+5}{k^3-2k+3}$$
samleitin?
Lausn: Við höfum
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(k+5)/(k^3-2k+3)}{1/k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^3+5k^2}{k^3-2k+3} = 1$$
og
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$
Því er skv. Reglu 7.3.3 röðin alsamleitin og þar með samleitin. ■

■ **Dæmi 7.20** Er röðin
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{1000}k+10^{100}}$$
samleitin?
Lausn: Nú er
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1/(10^{1000}k+10^{100})}{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{10^{1000}k+10^{100}} = 10^{-1000} > 0$$
og
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$
Því er skv. Reglu 7.3.3 röðin ósamleitin. ■

Ábending: Af síðustu dæmum ætti að vera ljóst að frekar auðvelt er að átta sig á alsamleitni raða af gerðinni
$$\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}, \tag{7.1}$$
þar sem
$$P(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + \ldots + a_rk^r \quad \text{og} \quad Q(k) = b_0 + b_1k + b_2k^2 + \ldots + b_sk^s$$

eru margliður af stigi r og s. Svo framarlega að $Q(k)$ sé ekki núll fyrir eitthvert $k = N, N+1, \ldots$ er nóg að athuga mismuninn $s - r$. Þá fæst með Reglu 7.3.3 og samanburði við röðina

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{s-r}} = \begin{cases} R < +\infty & \text{ef } \ s - r > 1 \\ +\infty & \text{ef } \ s - r < 1 \end{cases}$$

að:

$$\begin{cases} \text{ef } \ s - r > 1, & \text{þá er röðin (7.1) er alsamleitin,} \\ \text{ef } \ s - r \le 1, & \text{þá er röðin (7.1) er ekki alsamleitin.} \end{cases}$$

Athugið að ef $r - s = 1$ gæti röðin (7.1) verið skilyrt samleitin. Einnig er auðvelt að sjá að $P(k)$ og $Q(k)$ þurfa ekkert endilega að vera margliður, nóg er að þeir liðir í þeim sem vaxa hraðast vaxi eins og k í veldinu r og s, þ.e. $P(k) \sim k^r$ og $Q(k) \sim k^s$, og r og s þurfa ekkert endilega að vera heilar tölur

Regla 7.3.4 — Kvótapróf. Látum $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vera runu. Ef til er $N \in \mathbb{N}$ þ.a. $a_k > 0$ fyrir öll $k \ge N$ og markgildið

$$\rho := \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

er til eða

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = +\infty \quad \text{(í þessu tilfelli setjum við } \rho := +\infty\text{),}$$

þá gildir:

(a) Ef $0 \le \rho < 1$, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ alsamleitin.

(b) Ef $1 < \rho \le +\infty$, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ósamleitin.

(c) Ef $\rho = 1$, þá getur gefur prófið enga niðurstöðu.

Sönnun. Við sýnum þetta lið fyrir lið.

(a) Gerum ráð fyrir að $0 \le \rho < 1$. Við setjum $r := \frac{1+\rho}{2}$. Þá er $\rho < r < 1$. Af því að

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \rho$$

og $\rho < r$, þá er til $M \in \mathbb{N}$ þ.a. fyrir öll $k \ge M$ er $a_k > 0$ og

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le r.$$

En þá er $a_{M+1} \le r a_M$, $a_{M+2} \le r a_{M+1} \le r^2 a_M$, $a_{M+3} \le r a_{M+2} \le r^2 a_{M+1} \le r^3 a_M$ og almennt, fyrir öll $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{M+n} \le r^n a_M.$$

Frá því fæst

$$\sum_{k=M}^{+\infty} a_k \le \sum_{n=0}^{+\infty} r^n a_M = a_M \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = a_M \frac{1}{1-r} < +\infty$$

svo röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er alsamleitin skv. Reglu 7.3.3.

(b) Gerum ráð fyrir að $1 < \rho \leq +\infty$. Við setjum $r := \min\{(\rho+1)/2, 2\}$. Þá er til $M \in \mathbb{N}$ þ.a. fyrir öll $k \geq M$ er $a_k > 0$ og

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq r.$$

En þá er, svipað og í (a)-lið, $a_{n+M} \geq r^n a_M$, og þar með er

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty$$

svo röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er ósamleitin (muna, ef röðin er samleitin, þá gildir nauðsynlega $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$).

(c) Ef $\rho = 1$, þá gefur prófið enga niðurstöðu. T.d. gildir fyrir alsamleitnu röðina $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ að

$$\rho := \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+2k+1}{k^2} = 1$$

og fyrir ósamleitnu röðina $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ að

$$\rho := \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} = 1.$$

■

ATH Þegar liðir raðarinnar $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ eru k í einhverju veldi er yfirleitt best að nota Reglu 7.3.3, þ.e. Markgildisprófið, en ef liðirnir eru stærðir í veldi sem er háð k, t.d. $a_k = x^k$ fyrir einhverja tölu x, þá er yfirleitt best að nota Kvótaprófið í Reglu 7.3.4.

■ **Dæmi 7.21** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$$

samleitin?
Lausn: Nú er

$$a_k = \frac{k}{2^k} \quad \text{og} \quad \rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

svo samkvæmt Kvótaprófinu í Reglu 7.3.4 er röðin því alsamleitin. ■

Við setjum fram eitt próf í viðbót, Rótarprófið, sem hægt er að sanna mjög svipað og Reglu 7.3.4. Það er sjaldnar gagnlegt en Markgildisprófið eða Kvótaprófið, en ágætt að vita af því þegar hin prófin gefa enga niðurstöðu.

Regla 7.3.5 — Rótarpróf. Látum $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu. Ef til er $N \in \mathbb{N}$ þ.a. $a_k > 0$ fyrir öll $k \geq N$ og markgildið

$$\rho := \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

er til eða

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = +\infty \quad \text{(í þessu tilfelli setjum við } \rho := +\infty\text{),}$$

þá gildir:

(a) Ef $0 \leq \rho < 1$, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ alsamleitin.

(b) Ef $1 < \rho \leq +\infty$, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ósamleitin.

(c) Ef $\rho = 1$, þá getur gefur prófið enga niðurstöðu.

■ **Dæmi 7.22** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{k^k}$$

alsamleitin?

Lausn: Hér er bæði hægt að nota Kvótaprófið og Rótarprófið. Við höfum $a_k = 2^{k+1}/k^k$ og Kvótaprófið gefur með

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{k+2}}{2^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = 2 \lim_{k\to+\infty} \left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \frac{1}{k+1} \right] = 0 < 1$$

að röðin er alsamleitin. Fyrir Rótarprófið reiknum við

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{2^{k+1}}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \left(\sqrt[k]{2} \cdot \frac{2}{k} \right) = 0 < 1$$

að röðin er alsamleitin skv. Reglu 7.3.5. ■

Í næsta kafla um veldaraðir munum við sjá fjölmörg dæmi um Kvótaprófið og látum því þessi dæmi nægja hér.

Æfingar 7.3

Æfing 7.3.1 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið og vísið í viðeigandi reglur.

a) $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^\pi}{17.4+\sqrt{n}}$

■

Æfing 7.3.2 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið með viðeigandi prófi.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!}$

■

Æfing 7.3.3 Notið viðeigandi próf til að kanna samleitni raðarinnar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2+k+1}{k^2\sqrt{k}+1}.$$

■

Æfing 7.3.4 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið með viðeigandi prófi.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-3n+1}{-3n^4+2}$

■

7.4 Veldaraðir

Skilgreining 7.4.1 — Veldaröð. Röð af gerðinni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

er kölluð *veldaröð* um c (e. power series about c). Ath. að hér er $(x-c)^0 := 1$, jafnvel þegar $x-c=0$. Fastarnir $a_0, a_1, a_2, \dots$ eru kallaðir *stuðlar* (e. coefficients) veldaraðarinnar.

Fyrir veldaraðir hefur maður helst áhuga á því fyrir hvaða x röðin er samleitin og fyrir hvaða x hún er ósamleitin.

Regla 7.4.1 Fyrir veldaröð

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

gildir nákvæmlega eitt af þrennu:

(i) Röðin er alsamleitin þegar $x=c$ og ósamleitin fyrir öll önnur $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Röðin er alsamleitin fyrir hvaða $x \in \mathbb{R}$ sem er.
(iii) Það er til $R > 0$ þ.a. veldaröðin er alsamleitin fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ sem uppfylla $|x - c| < R$ og er ósamleitin fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ sem uppfylla $|x - c| > R$. Ef $|x - c| = R$, þ.e. $x = c + R$ eða $x = c - R$, þá getur veldaröðin verið alsamleitin, skilyrt samleitin eða ósamleitin.

ATH Fyrir tvinntalnaveldaraðir $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - c)^k$ þar sem $a_k, x, c \in \mathbb{C}$ gildir samsvarandi. Eini munurinn er að fyrir öll $x \in \mathbb{C}$ þ.a. $|x - c| = R$ getur röðin verið alsamleitin, skilyrt samleitin eða ósamleitin.

Sönnun. Ef $x = c$ er augljóslega

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k(x - c)^k|\Big|_{x=c} = |a_0|(c - c)^0 = |a_0| < +\infty$$

svo veldaröðin er alsamleitin fyrir $x = c$.

Til þess að sanna restina sýnum við: Ef veldaröðin er samleitin fyrir einhverja rauntölu $x = r$, þá er hún alsamleitin fyrir öll $x = y$ sem uppfylla $|y - c| < |r - c|$ (þ.e. öll x sem eru nær c en r).

Látum nú $r \neq c$ vera einhverja rauntölu og gerum ráð fyrir að veldaröðin sé samleitin fyrir $x = r$, þ.e. að röðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(r - c)^k$$

sé samleitin. Þá er

$$\lim_{k \to +\infty} a_k(r - c)^k = 0$$

og þar með er runan $\left(a_k(r - c)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ takmörkuð, þ.e. til er $K \in \mathbb{R}$ þ.a.

$$|a_k(r - c)^k| \leq K$$

fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Látum núna y vera rauntölu þ.a. $|y - c| < |r - c|$ og setjum $s := |y - c|/|r - c|$. Þá gildir $0 \leq s < 1$ og þá

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k(y - c)^k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k(r - c)^k| \left|\frac{y - c}{r - c}\right|^k \leq K \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} s^k = K \cdot \frac{1}{1 - s} < +\infty.$$

Skv. Reglu 7.3.2 er þá veldaröðin er alsamleitin fyrir $x = y$. Nú skilgreinir maður

$$R := \sup\{r : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(r - c)^k \quad \text{er alsamleitin}\}.$$

Ef $R = 0$ höfum við tilfelli (i), ef $R = +\infty$ tilfelli (ii) og ef $0 < R < +\infty$ tilfelli (iii). ∎

Ef veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

er alsamleitin fyrir öll $x \in]c-R, c+R[$, þar sem $R > 0$, og ósamleitin fyrir öll x þ.a. $|x-c| > R$, þá segjum við að R sé *samleitnigeisli* (e. radius of convergence) veldaraðarinnar. Ef veldaröðin er einungis samleitin fyrir $x = c$, þá segjum við að hún hafi samleitnigeislann $R = 0$, og ef hún er samleitin, og þar með alsamleitin, fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, þá segjum við að hún hafi samleitnigeislann $R = +\infty$. Rauntalan c er sögð vera *samleitnimiðja* veldaraðarinnar.
Oft er hægt að reikna samleitnigeisla veldaraðar með því að nota Kvótaprófið í Reglu 7.3.4. Látum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

vera veldaröð. Við reiknum, ef hægt er,

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L \quad \text{(við leyfum líka að } L = +\infty\text{)}.$$

Þá er

$$\rho = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}(x-c)^{k+1}}{a_k(x-c)^k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x-c| = |x-c|\cdot L,$$

og við vitum að ef $0 \leq \rho < 1$, þá er röðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

alsamleitin. Með öðrum orðum, veldaröðin er alsamleitin fyrir öll x sem uppfylla

$$1 > \rho = |x-c|\cdot L,$$

þ.e.

$$|x-c| < \frac{1}{L}.$$

Af því að við vitum líka að ef $\rho > 1$, þ.e.

$$|x-c| > \frac{1}{L},$$

að þá er veldaröðin ósamleitin, höfum við fundið einfalda aðferð til þess að reikna samleitnigeislann R:

Fyrir veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

gildir, ef markgildið

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

er til eða

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = +\infty \quad \text{(í þessu tilfelli setjum við } L = +\infty\text{)},$$

þá er samleitnigeisli veldaraðarinnar

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{ef } 0 < L < +\infty, \\ 0, & \text{ef } L = +\infty, \\ +\infty, & \text{ef } L = 0. \end{cases}$$

■ **Dæmi 7.23** Skoðum röðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x+5)^k}{(k^2+1)3^k}.$$

Við getum umritað hana sem veldaröð

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x+5)^k}{(k^2+1)3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{k^2+1} \left(x + \frac{5}{2}\right)^k,$$

þ.e. sem veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k$$

með $c = -5/2$ og

$$a_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{k^2+1}$$

fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Við reiknum núna

$$L = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{k^2+1}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2+1}{k^2+2k+2} = \frac{2}{3}.$$

Nú vitum við, $R = 1/L = 3/2$ er samleitnigeisli veldaraðarinnar og $c = -5/2$ er samleitnimiðjan. Það þýðir, fyrir öll $x \in]c-R, c+R[=]-4, -1[$ er veldaröðin alsamleitin og fyrir öll $x \in]-\infty, -4[$ og öll $x \in]-1, +\infty[$ er veldaröðin ósamleitin. ■

ATH Í raun sýndum við í lausn síðasta dæmis að veldaröðin $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x+5)^k}{(k^2+1)3^k}$ er samleitin fyrir allar tvinntölur x þ.a. $|x + 5/2| < 3/2$ og ósamleitin fyrir allar tvinntölur x þ.a. $|x + 5/2| > 3/2$. Með $x = a + ib$ höfum við sem sagt skilyrðin

$$\sqrt{\left(a + \frac{5}{2}\right)^2 + b^2} < \frac{3}{2} \quad \text{og} \quad \sqrt{\left(a + \frac{5}{2}\right)^2 + b^2} > \frac{3}{2}$$

fyrir samleitni og ósamleitni. Með $b = 0$ gefur þetta svo nákvæmlega niðurstöðuna sem við fengum fyrir rauntölur $x = a + i0$. Samkonar gildir í öllum öðrum dæmum.

■ **Dæmi 7.24** Skoðum veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Þetta er veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k,$$

með $c = 0$ og

$$a_k = \frac{1}{k!}$$

fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Við reiknum núna

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Nú vitum við að $R = +\infty$ er samleitnigeisli veldaraðarinnar og $c = 0$ er samleitnimiðjan. Það þýðir að fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ er veldaröðin alsamleitin. ■

■ **Dæmi 7.25** Skoðum veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k! x^k.$$

Þetta er veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k,$$

með $c = 0$ og

$$a_k = k!$$

fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Við reiknum núna

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{(k+1)!}{k!}\right| = \lim_{k\to+\infty} (k+1) = +\infty.$$

Nú vitum við að $R = 0$ er samleitnigeisli veldaraðarinnar og $c = 0$ er samleitnimiðjan. Það þýðir að fyrir $x = 0$ er veldaröðin alsamleitin og fyrir öll önnur x er veldaröðin ósamleitin.

■

Til loka þessa hluta einbeitum við okkur að veldaröðum með samleitnimiðju í 0.

Regla 7.4.2 Látum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

vera veldaröð með samleitnigeislann R_a,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

vera veldaröð með samleitnigeislann R_b og $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$. Þá gildir:

(i) Veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (Ca_k) x^k$$

hefur samleitnigeislann R_a og fyrir öll $x \in]-R_a, R_a[$ gildir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (Ca_k) x^k = C \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

(ii) Fyrir öll $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ gildir

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

Fyrir samleitnigeisla R veldaraðarinnar

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)x^k$$

gildir $R \geq \min\{R_a, R_b\}$. (Af hverju getur hann verið stærri?).

(iii) Ef við margföldum saman veldaraðirnar

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

þá fáum við út veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k,$$

þar sem

$$c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} \quad \text{fyrir öll } k \in \mathbb{N}.$$

Þessi veldaröð er kölluð *Cauchy-margfeldi* veldaraðanna

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

Fyrir samleitnigeisla R þessarar veldisraðar gildir $R \geq \min\{R_a, R_b\}$.

Fyrir öll $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ gildir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}\right)x^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right).$$

Til að átta sig á formúlinni

$$c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$$

fyrir stuðlum veldaraðarinnar, sem fæst þegar veldaraðirnar

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

eru margfaldaðar saman, er gagnlegt að skoða eftirfarandi töflu.

	a_0	$a_1\,x$	$a_2\,x^2$	$a_3\,x^3$	$a_4\,x^4$	$a_5\,x^5$	$\cdots$
b_0	a_0b_0	$a_1b_0\,x$	$a_2b_0\,x^2$	$a_3b_0\,x^3$	$a_4b_0\,x^4$	$a_5b_0\,x^5$	$\cdots$
$b_1\,x$	$a_0b_0\,x$	$a_1b_1\,x^2$	$a_2b_1\,x^3$	$a_3b_1\,x^4$	$a_4b_1\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$
$b_2\,x^2$	$a_0b_2\,x^2$	$a_1b_2\,x^3$	$a_2b_2\,x^4$	$a_3b_2\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$b_3\,x^3$	$a_0b_3\,x^3$	$a_1b_3\,x^4$	$a_2b_3\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$b_4\,x^4$	$a_0b_4\,x^4$	$a_1b_4\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$b_5\,x^5$	$a_0b_5\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Í henni höfum við skrifað liði veldaraðarinnar $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ í fyrstu línu og liði veldaraðarinnar $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ í fyrsta dálk. Inni í töflunni eru svo margfeldi fyrstu línu og fyrsta dálks og maður sér að stuðlana við mimunandi veldi af x fær maður með því að leggja saman yfir hornalínu. T.d. er stuðullinn við x^3 gefinn með

$$a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0.$$

Formúlan fyrir c_k tekur þessa aðferð saman í formúlu.

■ **Dæmi 7.26** Reiknið Cauchy-margfeldi veldaraðarinnar

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

við sjálfa sig.
Lausn: Athugum fyrst að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

með $a_k = b_k = 1$ fyrir öll $k = 0, 1, 2, \dots$. Því eru stuðlar Cauchy-margfeldisins auðreiknaðir:

$$c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} = \sum_{n=0}^{k} 1 \cdot 1 = k + 1$$

fyrir öll $k = 0, 1, \dots$. Því er

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k.$$

Þessi veldisröð hefur samleitnigeisla R sem er ekki minni en samleitnigeisli upphaflegu veldaraðarinnar, sem er 1. Með Kvótaprófi er svo auðvelt að sjá að hann er nákvæmlega 1. ■

■ **Dæmi 7.27** Látum y vera rauntölu, $|y| < 1$. Finnið einfalda formúlu fyrir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)y^k.$$

Lausn: Skv. síðasta dæmi er

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)y^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} y^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} y^k\right) = \left(\frac{1}{1-y}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{1}{(1-y)^2}.$$

■

Einstaklega auðvelt er að diffra og heilda veldaraðir, því það má gera lið fyrir lið.

Regla 7.4.3 — Diffrun og heildun veldaraða. Látum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

vera veldaröð með samleitnigeislann $R > 0$. Þá getum við skilgreint fall

$$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Fallið f er diffranlegt á öllu skilgreiningarmengi sínu $]-R, R[$ og

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1},$$

þ.e. við getum diffrað fallið með því að diffra veldaröðina lið fyrir lið.
Fyrir sérhvert $x \in]-R, R[$ gildir líka

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1},$$

þ.e. við getum heildað fallið f með því að heilda veldaröðina lið fyrir lið.

Sönnunin á Reglu 7.4.3 er svolítið snúnari en á þeim reglum sem við höfum sannað hingað til í kaflanum. Nokkuð ljóst virðist vera að ef $f(x)$ er diffranlegt, að þá hljóti $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$. Aftur á móti er langt því frá augljóst að $f(x)$ sé diffranlegt og að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ sé samleitin.

Frekar stutt og þægileg sönnun notar tvíliðunarregluna

$$(x+y)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} y^{\ell}, \quad \text{þar sem} \quad \binom{k}{\ell} := \frac{k!}{(k-\ell)!\ell!}.$$

Við þurfum að sýna að

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x+h)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

fyrir sérhvert $x \in]-R, R[$. Festum eitt slíkt x og veljum $H > 0$ þ.a. $|x| + H < R$. Þar sem $|x| + H$ er innan samleitnigeislans er röðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (|x| + H)^k$$

alsamleitin og við getum skilgreint

$$K := \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|(|x| + H)^k < +\infty.$$

Nú gildir fyrir $k \geq 1$ formúlan

$$(x+h)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} h^\ell = x^k + kx^{k-1} + \sum_{\ell=2}^{k} \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} h^\ell$$

og við sjáum að fyrir öll h þ.a. $|h| \leq H$ er

$$\begin{aligned}
\left|(x+h)^k - x^k - kx^{k-1}h\right| &= \left|\sum_{\ell=2}^{k} \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} h^\ell\right| \\
&= \sum_{\ell=2}^{k} \binom{k}{\ell} |x|^{k-\ell} \frac{|h|^\ell}{H^\ell} H^\ell \\
&\leq \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} |x|^{k-\ell} H^\ell \\
&= \frac{|h|^2}{H^2} (|x| + H)^k.
\end{aligned}$$

Einnig er ljóst að

$$\left|kx^{k-1}\right| \leq \frac{1}{H} \cdot k|x|^{k-1}H \leq \frac{1}{H} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} |x|^{k-\ell} H^\ell = \frac{1}{H}(|x| + H)^k$$

því $k|x|^{k-1}H$ er bara einn af liðunum í tvíliðunarformúlunni og liðirnir eru allir jákvæðir. Þetta gefur okkur nú að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|ka_k x^{k-1}\right| = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|(|x| + H)^k = \frac{K}{H} < +\infty$$

skv. skilgreiningunni á fastanum K. Sér í lagi er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k x^{k-1}$ alsamleitin.

Við getum því reiknað og metið upp á við með því sem við höfum áður sýnt:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x+h)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k(x+h)^k - a_k x^k - k a_k x^{k-1} h}{h}\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \cdot |(x+h)^k - a_k x^k - k a_k x^{k-1}| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \cdot \frac{|h|^2}{H^2}(|x|+H)^k \\
&= \frac{|h|}{H^2}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|(|x|+H)^k \\
&= \frac{|h|}{H^2} \cdot K.
\end{aligned}
$$

Nú er auðvelt að taka markgildið þegar $h \to 0$ og við sjáum

$$
\lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x+h)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}\right| = 0,
$$

sem er nákvæmlega það sem við ætluðum að sýna. Þar sem x var bara einhver tala á bilinu $]-R,R[$ gildir þessi niðurstaða fyrir öll $x \in]-R,R[$.

Nú, þegar að við vitum að það megi diffra veldaröð lið fyrir lið er mjög auðvelt að sýna að

$$
\int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.
$$

Röðin hægra megin er klárlega alsamleitin á bilinu $]-R,R[$ því

$$
\left|\frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right| \leq |x| \cdot |a_k x^k| \quad \text{fyrir öll } k = 0, 1, \ldots
$$

og því

$$
\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right| \leq |x| \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k x^k| < +\infty.
$$

Þar sem við megum diffra veldaröð lið fyrir lið innan samleitnigeislans er

$$
\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.
$$

Af þessu leiðir að

$$
\int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C
$$

og þar sem vinstri hliðin er núll þegar $t = 0$ er $C = 0$.

Í næstu tveimur dæmum leiðum við út veldisraðarframsetningar á föllum sem við þekkjum með hjálp Reglu 7.4.3.

■ **Dæmi 7.28** Við vitum að fyrir $|x| < 1$ gildir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Með $t = -x$ er þá

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k.$$

En þá er

$$\ln(x+1) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

og þessi formúla gildir fyrir öll x með $|x| < 1$. ■

■ **Dæmi 7.29** Við vitum að fyrir $|x| < 1$ gildir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Með $t^2 = -x$ er þá

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k}.$$

En þá er

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots$$

og þessi formúla gildir fyrir öll x með $|x| < 1$. ■

Stundum er hægt að reikna summu raðar með því að nota Reglu 7.4.3.

■ **Dæmi 7.30** Reiknum

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$

Lausn: Við vitum að fyrir $|x| < 1$ gildir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Við höfum áður reiknað, með því að nota Cauchy-margfeldi raða, að

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^k.$$

Önnur aðferð til að reikna það sama er

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^k.$$

Fyrir x þ.a. $|x| < 1$ er þá

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k.$$

Þessi veldaröð hefur líka samleitnigeislann 1 og með diffrun fáum við

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x)(-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

og með diffrun veldaraðinnar lið fyrir lið fáum við

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^{k-1},$$

þ.e.

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^{k-1}.$$

En þá er fyrir öll x þ.a. $|x| < 1$,

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^k$$

svo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} = \left.\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^3} = \frac{3/4}{1/8} = 6.$$

■

Æfingar 7.4

Æfing 7.4.1 Gefin er veldaröðin

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^n x^{2n}.$$

1. Finnið samleitnimiðju (e. centre of convergence) og samleitnigeisla (e. radius of convergence) veldaraðarinnar
2. Reiknið summuna fyrir $x = \pi$.
3. Reiknið summuna fyrir $x = 2\pi$.

■

Æfing 7.4.2 Finnið samleitnimiðju (e. centre of convergence) og samleitnigeisla (e. radius of convergence) veldaraðarinnar

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n+1}(\pi x + 4)^n.$$

■

Æfing 7.4.3 Veldaröðin
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3(3x-2)^n$$
er alsamleitin fyrir $x \in]a,b[$ og ósamleitin fyrir öll önnur x. Finnið fastana $a, b \in \mathbb{R}$. Notið kvótaprófið.

■

Æfing 7.4.4 Ákvarðið stærsta bilið fyrir x þannig að veldaröðin
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(1-3x)^n$$
er alsamleitin (e. absolutely convergent). Athugið að bilið gæti verið lokað eða hálf lokað (s.s. skoðið líka endapunkta bilsins).

■

Æfing 7.4.5 Ákvarðið hvort röðin er alsamleitin (e. absolutely convergent) eða ósamleitin (e. diverges) fyrir **öll** möguleg $x \in \mathbb{R}$. Sýnið alla útreikninga og tilgreinið hvaða próf eru notuð.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-4)^n}{2^{2n}(1+n^2)}$$

■

Æfing 7.4.6 Skoðum veldaröðina
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}\left(\frac{x}{2}-7\right)^n.$$

a) Finnið samleitnigeisla (e. radius of convergence) og samleitnimiðju (e. center of convergence) veldaraðarinnar.
b) Finnið summuna fyrir $x = 15$.
c) Finnið summuna fyrir $x = 5$.

■

Æfing 7.4.7 Skoðum veldaröðina
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\left(1-\frac{x}{3}\right)^n$$

a) Finnið samleitnimiðju (e. center of convergence) og samleitnigeisla (e. radius of convergence) veldaraðarinnar.
b) Finnið summuna ef $x = 6$.
c) Finnið summuna ef $x = 17.4$.

■

Æfing 7.4.8 Notið veldaröðina

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

til að finna veldaraðaframsetningu fyrir fallið

$$g(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$$

og gefið samleitnibil (e. interval of convergence) veldaraðarinnar.

■

Æfing 7.4.9 Vitað er að

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \text{fyrir öll } x \in]-1,1[.$$

Reiknið summu raðarinnar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \cdots$$

Ábending: Notið $f'(x)$.

■

7.5 Taylorraðir

Rita má mjög mörg nytsöm föll sem veldaraðir. Slík veldaröð kallast almennt Taylorröð fallsins og stundum Maclaurenröð ef samleitnimiðjan er í núlli. Fyrst ein gagnleg setning:

Regla 7.5.1 Látum

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

vera fall sem er skilgreint á bilinu $]c-R, c+R[$ (þá verður veldaröðin að vera alsamleitin á þessu bili). Þá er

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad \text{fyrir öll} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Sönnun. Við sýnum fyrst með þrepun að

$$(*) \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k(x-c)^{k-n}, \quad \text{fyrir } n = 0,1,2,\ldots$$

Upprifjun á þrepun:

Þrepun virkar á eftirfarandi hátt: Önnur leið til þess að lýsa menginu $\mathcal{A} := \{0,1,2,\ldots\}$

er:

(i) $0 \in \mathcal{A}$.

(ii) Ef $n \in \mathcal{A}$, þá er $n+1 \in \mathcal{A}$.

Svo ef við ætlum að sýna að einhver formúla gildi fyrir öll $n \in \mathcal{A} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, þá er nóg að sýna að $0 \in \mathcal{A}$ og að ef $n \in \mathcal{A}$, þá er $n+1 \in \mathcal{A}$.

(i) Jafnan $(*)$ er rétt fyrir $n = 0$ því

$$f^{(0)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n} \bigg|_{n=0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k!} a_k (x-c)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k = f(x).$$

(ii) Gerum ráð fyrir að jafnan $(*)$ sé rétt fyrir eitthvert $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Við sýnum að þá er jafnan líka rétt fyrir $n+1$.

Samkvæmt forsendu er

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n}.$$

Þá er skv. Reglu 7.4.3

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n} \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} (k-n) a_k (x-c)^{k-n-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-(n+1))!} a_k (x-c)^{k-(n+1)} \end{aligned}$$

svo jafnan $(*)$ er líka rétt fyrir $n+1$.

Þar með er sýnt að jafnan $(*)$ er rétt fyrir öll $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Nú er létt að sanna setninguna með því að nota jöfnuna $(*)$:

$$f^{(n)}(c) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n} \bigg|_{x=c} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (c-c)^{k-n} = \frac{n!}{(n-n)!} a_n = n! a_n,$$

svo

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

og þetta gildir fyrir öll $n = 0, 1, 2, \ldots$ ■

Athugasemd: Regla 7.5.1 segir að **ef** fallið f hefur *veldisraðarframsetningu* um c á bilinu $]c-R, c+R[$, þ.e.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k$$

fyrir öll $x \in]c-R, c+R[$, að þá er nauðsynlega

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad \text{fyrir öll} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sem þýðir ekkert annað en að

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

fyrir öll $x \in]c-R, c+R[$.

Við skilgreinum:

Skilgreining 7.5.1 Ef f er raungilt fall, sem er skilgreint á einhverju bili um $c \in \mathbb{R}$ og er óendanlega oft diffranlegt í c, þá er veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

kölluð *Taylorröð* fallsins f um punktinn c. Ef $c = 0$ er stundum talað um Maclaurenröð fallsins í staðinn fyrir Taylorröð.

■ **Dæmi 7.31** Við höfum áður sagt að veldisvísisfallið $\exp$ hefur veldaraðarframsetningu um núll,

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Hér ætlum við að skoða þetta betur. Við vitum að

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x),$$

og þar með að

$$\frac{d^n}{dx^n}\exp(x) = \exp(x) \quad \text{fyrir öll } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

og að $\exp(0) = 1$. Því er Taylorröð $\exp$ um núll

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{með} \quad a_k = \frac{\exp(0)}{k!} \quad \text{fyrir öll } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

þ.e.

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Samleitnigeisla veldaraðarinnar getum við nú reiknað út með Kvótaprófinu. Við reiknum

$$L := \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} = 0,$$

svo samleitnigeisli veldaraðarinnar er $R = +\infty$.

Nú er freistandi að draga þá ályktun að nauðsynlega sé

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!},$$

en, eins og við munum sjá síðar í öðru dæmi, er þessi ályktun á þessu stigi málsins ekki nauðsynlega rétt! Það sem við vitum er: **Ef** fallið $\exp$ hefur veldaraðarframsetningu, þá er þessi veldaröð

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Vandamálið er þetta ef! ■

Við sýnum að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) \qquad \text{fyrir öll } x \geq 0,$$

sem er jafngilt

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - x = 0 \qquad \text{fyrir öll } x \geq 0.$$

Ath. að þessi formúla er líka rétt fyrir $x < 0$, en til þess að sýna það þyrftum við fyrst að sýna að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} > 0 \qquad \text{fyrir öll } x < 0,$$

en það viljum við spara okkur.

Oft er náttúrulegi lógariþminn, þ.e. fallið $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, innleitt með skilgreiningunni

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t},$$

og síðan veldisvísisfallið, þ.e. fallið $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$, sem andhverfa fallsins $\ln$, þ.e. $\ln(\exp(x)) = x$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

Við diffrum núna, með hjálp Keðjureglunnar,

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - x\right) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} k x^{k-1} - 1 = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

þetta þýðir að fallið $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - x,$$

er fastafall. Með því að setja $x = 0$ sjáum við að

$$f(0) = \ln(1) - 0 = 0,$$

svo $f(x) = 0$ fyrir öll $x \geq 0$. En þá er

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

fyrir öll $x \geq 0$.

Vel þekkt staðreynd um Taylor-margliður er að ef fall $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er $(n+1)$-sinni diffranlegt á opnu bili $\mathcal{I}$ og $c \in \mathcal{I}$, þá er fyrir sérhvert $x \in \mathcal{I}$ til s á milli c og x þ.a.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Liðurinn

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

er kallaður villuliðurinn. Til þess að sýna að fall hafi veldaraðarframsetningu, þá er stundum hægt að sýna að villuliðurinn $E_n(x)$ stefni á 0 þegar n stefnir á $+\infty$ óháð x.

■ **Dæmi 7.32** Önnur aðferð til þess að sýna að

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

er að notfæra sér þetta. Sú röksemdafærsla gildir líka strax fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.
Við vitum að

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x),$$

þar sem

$$E_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!}x^{n+1}$$

fyrir eitthvert s á milli 0 og x. Þá er fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$ til eitthvert s_n á milli 0 og x þ.a.

$$|E_n(x)| = \left|\frac{e^{s_n}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \left|\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = e^{|x|}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Þá gildir

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = |E_n(x)| \leq e^{|x|}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

og við sjáum auðveldlega að fyrir fast $x \in \mathbb{R}$ gildir

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Þ.e.

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

■

Diffurjafnan

$$y''(t) + y(t) = 0$$

hefur almennu lausnina

$$y(t) = A\sin(t) + B\cos(t).$$

Sér í lagi gildir að lausn upphafsgildisverkefnissins

$$y''(t) + y(t) = 0, \qquad y(0) = 0 \ \text{ og } \ y'(0) = 1,$$

er $y(t) = \sin(t)$. Við ætlum að nota þetta til þess að sýna að föllin $\sin$ og $\cos$ hafa bæði veldisraðarframsetningu.

Við vitum frá Reglu 7.5.1 að ef $\sin$ hefur veldisraðarframsetningu, að þá er hún nauðsynlega Taylorröð $\sin$,

$$T_{\sin}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

Þessa formúlu fyrir Taylorröðinni getur maður séð á eftirfarandi hátt. Með $f(x) = \sin(x)$ er

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \sin(x).$$

Sem sagt er

$$f^{(k)}(x) = \sin(x), \quad f^{(k+1)}(x) = \cos(x), \quad f^{(k+2)}(x) = -\sin(x) \ \text{ og } \ f^{(k+3)}(x) = -\cos(x)$$

fyrir $k = 0, 4, 8, \dots$. Þar sem $\sin(0) = 0$ og $\cos(0) = 1$ fæst formúlan

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{og} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad \text{fyrir } k = 0, 1, \dots.$$

Því hefur $f(x) = \sin(x)$ Taylorröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

um núllpunkt. Þessi veldaröð er alsamleitin fyrir öll $t \in \mathbb{R}$, því samkvæmt kvótaprófinu er

$$\begin{aligned}
\rho &:= \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!} t^{2(k+1)+1}}{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}} \right| \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{(2k+1)!\, t^{2k+3}}{(2k+3)!\, t^{2k+1}} \right| \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{t^2}{(2k+3)(2k+2)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

sama hvaða rauntala t er. Við getum því diffrað fallið $T_{\sin}$ með því að diffra veldaröð þess lið fyrir lið,

$$T'_{\sin}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}.$$

Þessi veldaröð er þá líka alsamleitin fyrir öll $t \in$ og við getum diffrað aftur með því að diffra lið fyrir lið

$$\begin{aligned}
T''_{\sin}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)(2k)t^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}t^{2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)-1)!}t^{2(k+1)-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}t^{2k+1} \\
&= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1},
\end{aligned}$$

svo

$$T''_{\sin}(t) + T_{\sin}(t) = 0, \quad T_{\sin}(0) = 0 \quad \text{og} \quad T'_{\sin}(0) = 1.$$

En þá uppfyllir fallið $T_{\sin}$ upphafsgildisverkefnið

$$y''(t) + y(t) = 0, \qquad y(0) = 0 \ \text{ og } \ y'(0) = 1,$$

svo $T_{\sin}(t) = \sin(t)$ fyrir öll $t \in \mathbb{R}$. Af því að $\sin'(t) = \cos(t)$ er þá líka

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}.$$

(Af hverju er þetta Taylorröð $\cos$?)

Við gefum hér dæmi um fall $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sem hefur Taylorröðina

$$T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

um núllpunkt. Taylorröðin hefur samleitnigeislann $R = +\infty$, en $f(x) \neq T(x)$ fyrir öll $x \neq 0$.

Við skilgreinum

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right), & \text{ef } x \neq 0, \\ 0, & \text{ef } x = 0. \end{cases}$$

Við höfum séð að fyrir hvaða $n \in \mathbb{N}$ sem er gildir (með breytuskiptunum $t = 1/x^2$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{2n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{x^{2n}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\exp(-t)}{t^{-n}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^n}{\exp(t)} = 0.$$

Út frá þessu má sýna að fallið f er óendanlega oft diffranlegt í núlli og að $f^{(k)}(0) = 0$ fyrir öll $k = 0, 1, 2, \ldots$. T.d. er

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(h)}{h} \right| \leq \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h^2} = 0,$$

svo $f'(0) = 0$ og fyrir $x \neq 0$ er

$$f'(x) = \exp(-x^{-2}) 2x^{-3} = \frac{2f(x)}{x^3}.$$

En þá er

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2f(h)}{h^4} = 0,$$

og með hliðstæðri röksemdarfærslu getur maður sýnt að $f^{(k)}(0) = 0$ fyrir öll $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Því er

$$T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ og af því að $f(x) \neq 0$ fyrir öll $x \neq 0$ er ljóst að $f(x) \neq T(x)$ fyrir öll $x \neq 0$.

■ **Dæmi 7.33** Mjög miklvægt fall, meðal annars í tölfræði, er heildi Gauss-dreifingarinnar

$$E(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Taylorröð þessa falls er

$$T_E(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)k!} \right]_{t=0}^{t=x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^{2k+1}.$$

■

Veldisraðarframsetningar nokkurra miklvægra falla ásamt samleitnibili eru

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots & x &\in]-\infty, \infty[\\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots & x &\in]-\infty, \infty[\\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots & x &\in]-\infty, \infty[\\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots & x &\in]-1, 1] \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots & x &\in]-1, 1[\\
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots & x &\in [-1, 1].
\end{aligned}
$$

Skoðum sambandið á milli veldisvísisfallsins og hornafallanna:

Við vitum að

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ og að veldaröðin er alsamleitin fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Athugum fyrst að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Það er hægt að sýna fram á, þó að við gerum það ekki hér, að veldaraðir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,$$

þar sem z og a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, eru tvinntölur, eru nánast alveg eins og veldaraðir þar sem bara rauntölur koma fyrir. Útleiðslan er í raun alveg eins, nema hvað þá er $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ lengd tvinntölunnar $z = a + ib$ en ekki tölugildið, sem ekki er skilgreint fyrir tvinntölur.
Prófum nú að setja $x = iy$, þar sem $y \in \mathbb{R}$ og i er tvinntölu i-ið með $i^2 = -1$. Þá

fáum við

$$\begin{aligned}\exp(iy) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k}y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k+1}y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} \\ &= \cos(y) + i\sin(y),\end{aligned}$$

þ.e. raunhluti $\exp(iy)$ er $\cos(y)$ og þverhluti $\exp(iy)$ er $\sin(y)$.

Látum $c \in \mathbb{R}$ vera fasta og

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k$$

vera fall skilgreint á $]c-R, c+R[$, þar sem $R > 0$ er samleitnigeisli veldaraðarinnar. Við vitum frá Reglu 7.4.3 að við megum diffra veldaröðina lið fyrir lið á bilinu $]c-R, c+R[$, svo fallið f er diffranlegt á $]c-R, c+R[$. Af því að diffranleg föll eru samfelld, er fallið f samfellt á $]c-R, c+R[$. Það þýðir að fyrir sérhvert $y \in]c-R, c+R[$ gildir

$$\lim_{x\to y} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (y-c)^k.$$

Þetta er oft hægt að nota til þess að reikna markgildi, sem annars væri erfitt að reikna.

■ **Dæmi 7.34** Reiknið

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Lausn: Við vitum að

$$\sin(x) = T_{\sin}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

svo

$$x - \sin(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots\ .$$

En þá er

$$\begin{aligned}\frac{x-\sin(x)}{x^3} &= \frac{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}{x^3}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1-3}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2(k-1)}\\ &= \frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots\end{aligned}$$

og það er auðvelt að ganga úr skugga um að þessi síðasta veldaröð er alsamleitin fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Þar með er

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2(k-1)} = \frac{1}{3!}-\frac{0^2}{5!}+\ldots = \frac{1}{6}.$$

■

■ **Dæmi 7.35** Reiknið

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2}.$$

Laun: Með því að nota nokkra fyrstu liði Taylorraða, þar sem hærri liðir detta hvort hið er út þegar við látum x stefna á 0, sjáum við að

$$1-\cos(3x) = 1-1+\frac{(3x)^2}{2}-\frac{(3x)^4}{4!}+\ldots = \frac{9}{2}x^2-\frac{81}{24}x^4+\ldots$$

og þá

$$(1-\cos(3x))^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 x^4 - 2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{81}{24}x^6+\ldots = x^4\left[\frac{81}{4}-\frac{9\cdot 81}{24}x^2+\ldots\right].$$

Þessi röð hefur samleitnigeislann $R=+\infty$.

Við sjáum líka að

$$e^{2x}-1 = -1+e^{2x} = -1+1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+\ldots = 2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\ldots$$

og að

$$\ln(1+x^3) = x^3-\frac{x^6}{2}+\ldots$$

svo

$$(e^{2x}-1)\ln(1+x^3) = 2x^4+2x^5+\ldots = x^4\left[2+2x+\ldots\right].$$

Þessi röð hefur a.m.k. samleitnigeislann $R=1$.

Því gildir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4\left[2+2x+\dots\right]}{x^4\left[\left(\frac{9}{2}\right)^2-\frac{9\cdot 81}{24}x^2+\dots\right]}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2+2x+\dots}{\frac{81}{4}-\frac{9\cdot 81}{24}x^2+\dots}\\
&= \frac{2}{81/4}\\
&= \frac{8}{81}.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 7.36** Við ætlum að sýna að fyrir $n=1,2,3,\dots$ gildi

$$(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k,$$

þar sem a og x eru einhverjar rauntölur og

$$\binom{n}{k}:=\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Við skilgreinum fallið $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x)=(a+x)^n.$$

Ljóst er að fallið f er n-ta stigs margliða í x. Þ.e.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,$$

þar sem $a_0,a_1,\dots,a_n$ eru einhverjir fastar (sem eru háðir tölunni a).

Við notum nú Taylorröð f um núll til þess að reikna út hér að neðan að

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\binom{n}{k}a^{n-k}\quad\text{fyrir } k=0,1,2,\dots,n.$$

Athugið að fyrir öll $k>n$ hljóta stuðlar Taylorraðarinnar a_k að vera 0, því $f(x)$ er n-ta stigs margliða í x.

Nú er

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (a+x)^n=\frac{n!}{(n-0)!}(a+x)^{n-0},\\
f^{(1)}(x) &= n(a+x)^{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!}(a+x)^{n-1},\\
f^{(2)}(x) &= \frac{n!}{(n-1)!}(n-1)(a+x)^{n-2}=\frac{n!}{(n-2)!}(a+x)^{n-2},\\
f^{(3)}(x) &= \frac{n!}{(n-2)!}(n-2)(a+x)^{n-3}=\frac{n!}{(n-3)!}(a+x)^{n-3},\\
&\ \vdots\\
f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(n-(n-1))!}(n-(n-1))(a+x)^{n-n}=\frac{n!}{(n-n)!}(a+x)^{n-n},
\end{aligned}$$

svo

$$f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k} \quad \text{fyrir } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

En þá er

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k} = \binom{n}{k} a^{n-k} \quad \text{fyrir } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

og við höfum sýnt að

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k.$$

■

Þægileg aðferð til þess að reikna út

$$\binom{n}{k}$$

ef n og k eru ekki mjög stórar tölur er hinn svokallaði Pascal-þríhyrningur.

Fyrst athugar maður að

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1 = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \binom{n}{n}$$

og að fyrir $0 < k \leq n$ er

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)\cdot(n-k)!k!} + \frac{k\cdot n!}{(n-(k-1))!\cdot k\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)!k!} + \frac{k\cdot n!}{(n-(k-1))!k!} \\
&= \frac{(n-k+1+k)\cdot n!}{((n+1)-k)!k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!k!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Þetta notar maður til þess að reikna út stuðlana með svokölluðum Pascal-þríhyrning:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Í þríhyrninginum les maður k frá 0 til n frá vinstri til hægri, jafnan

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

svarar til þess að gildi tölu í n-tu línu fæst með því að leggja saman tölurnar á ská fyrir ofan til hægri og vinstri, nema þá fyrstu og síðustu sem báðar eru 1 og svarar til

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Æfingar 7.5

Æfing 7.5.1 Finnið Taylorröð fallsins $\ln(1+2x)$ um 1. Notið að við þekkjum Taylorröð fallsins $\ln(1+x)$ um 0. ■

Æfing 7.5.2 Finnið fyrstu þrjá liði í Taylorröð fallsins $g(x) = 2 + x^2 \ln(x)$. ■

Æfing 7.5.3 Notið að $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ fyrir $|x| < 1$ til að finna Taylorröð fallins

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

um 0. Tilgreinið samleitnigeisla raðarinnar sem þið reiknið og ákvarðið að lokum gildi hennar í $x = 1/2$. ■

7.6 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 7.1.1 Skoðum hina frægu Fibonacci runu, sem er skilgreind með $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

a) Sýnið að runan er vaxandi.
b) Sýnið að runan er ósamleitin.

Ábending: Í lið b) er t.d. hægt að gera ráð fyrir að runan sé samleitin að $L \in \mathbb{R}$ og sýna svo að það leiðir til mótsagnar.

■ **Lausn** Reiknum fyrst nokkra fyrstu liði í rununni

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots).$$

Runan er jákvæð og við sjáum að $a_1 \le a_2 \le a_3$ og að almennt er $a_{n+2} = a_{n+1}+a_n \ge a_{n+1}$ því $a_n > 0$, svo runan er vaxandi fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

Sýnum nú að runan sé ósamleitin. Gerum ráð fyrir að runan sé samleitin að rauntölunni L, þ.e. að $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. Þá gildir að

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_{n+2} = L$$

svo við fáum

$$L = \lim_{n\to+\infty} a_{n+2} = \lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} + a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} + \lim_{n\to+\infty} a_n = L + L = 2L.$$

Sem sagt höfum við að $L = 2L$ sem er aðeins uppfyllt ef $L = 0$. Markgildi rununnar getur ekki verið 0 þar sem hún byrjar í 1 og er vaxandi, svo þetta er mótsögn. Forsendan sem við byrjuðum með hlýtur því að vera röng. Því getur markgildið ekki verið til og runan er því ósamleitin.
Regla 7.1.1 liður 4 segir okkur nú að þar sem runan er vaxandi að lokum og ósamleitin, þá er nauðsynlega $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Athugið að þetta er ekki í mótsögn við það sem við sýndum því $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Æfing 7.1.2 Skoðum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sem er skilgreind með $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n - 2$ fyrir öll $n \ge 1$.

a) Reiknið a_3, a_4 og a_5 og dragið ályktun um halla rununnar.
b) Sannið með þrepun að runan sé minnkandi.

Ábending. Í b)-lið hentar betur að sanna að $a_{n+1} - a_n \le 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

■ **Lausn** Sjáum fyrst að

$$a_3 = 2a_2 - a_1 - 2 = -2, \quad a_4 = 2a_3 - a_2 - 2 = -7, \quad a_5 = 2a_4 - a_3 - 2 = -14$$

og runan virðist vera minnkandi. Nú skulum við sanna það.
Sanna skal að $a_{n+1} \le a_n$, sem er jafngilt $a_{n+1} - a_n \le 0$ fyrir öll gildi á $n \in \mathbb{N}$.

- Þegar $n = 1$ fæst $a_2 - a_1 = -1 \le 0$ þannig að ójafnan er sönn þegar $n = 1$.

- Gerum ráð fyrir að $a_{n+1} - a_n \leq 0$ (þrepunarforsenda) og sýnum fram á að $a_{n+2} - a_{n+1} \leq 0$. Fáum:
$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= 2a_{n+1} - a_n - 2 - a_{n+1} \quad \text{(skv. skilgreiningu á rununni)} \\ &= a_{n+1} - a_n - 2 \\ &\leq -2 \quad \text{(skv. þrepunarforsendunni)} \end{aligned}$$
Af því fæst $a_{n+2} - a_{n+1} \leq -2 \leq 0$.
- Skv. grundvallarsetningu um þrepun er $a_{n+1} \leq a_n$ fyrir öll n og runan er minnkandi.

Æfing 7.1.3 Skoðum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem $a_n = \dfrac{n-4}{n+1}$.

a) Finnið efra mat ef runan er takmörkuð að ofan og neðra mat ef runan er takmörkuð að neðan.
b) Er runan jákvæð eða neikvæð að lokum?
c) Er runan vaxandi eða minnkandi? Munið að rökstyðja.
d) Er runan samleitin eða ósamleitin?

■ **Lausn** a) Prófum fyrst að gera ráð fyrir því að runan sé takmökuð að ofan með efra mat 5. Þá fæst
$$a_n \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-4}{n+1} \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{9}{6},$$
sem er rétt því $n \in \mathbb{N}$ og við höfum sýnt að runan er takmörkuð að ofan. Prófum næst að gera ráð fyrir því að runun sé takmörkuð að neðan með neðra mat -5. Þá fæst
$$a_n \geq -5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-4}{n+1} \leq -5 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{1}{6},$$
sem er líka rétt því $n \in \mathbb{N}$. Runan er því takmörkuð að ofan og að neðan og þar með takmörkuð.

b) Allir liðir í rununni eru augljóslega jákvæðir fyrir $n > 4$ skv. formúlunni svo runan er jákvæð að lokum.
c) Búum til tilsvarandi fall $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$; þá er $f(n) = a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Fallið er stranglega vaxandi því
$$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$$
og þá vitum við að runan er einnig stranglega vaxandi.
d) Runan er samleitin því
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-4}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-4/n}{1+1/n} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Æfing 7.3.1 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið og vísið í viðeigandi reglur.

a) $\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^\pi}{17.4+\sqrt{n}}$

■ **Lausn** a) $\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$

(i) Við höfum að $\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2} = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n}$ sem er p-röð með $p = 1$ svo hún er ósamleitin.

(ii) Einnig getum við notað að $\frac{1}{n-2} > \frac{1}{n}$ fyrir öll $n > 2$ og við vitum að $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ er ósamleitin (p-röð með $p = 1$), svo skv. Samanburðarprófi er röðin $\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$ ósamleitin.

b) Látum $a_n = \frac{e^n}{(n+1)!}$ og reiknum

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+2} = 0$$

svo skv. Kvótaprófi er $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$ samleitin.

c) Við vitum að röðin $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ er ósamleitin (p-röð með $p = 1/2$). Látum $a_n = \frac{\pi^\pi}{17.4+\sqrt{n}}$ og $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ og reiknum

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^\pi\sqrt{n}}{17.4+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^\pi}{17.4/\sqrt{n}+1} = \pi^\pi > 0$$

svo skv. Markgildisprófinu er röðin $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^\pi}{17.4+\sqrt{n}}$ ósamleitin.

Æfing 7.3.2 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið með viðeigandi prófi.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!}$

■ **Lausn** a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$. Þetta er kvótaröð með kvóta $0 < r = \dfrac{1}{\pi} < 1$ svo röðin er samleitin.

b) Athugum að $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, svo röðin er ósamleitin.

c) Röðin er ósamletin skv. Markgildisprófi því $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ er ósamleitin og

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{1+n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n} = 1 > 0.$$

d) Röðin er samleitin skv. Kvótaprófi því

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{k+1}}{(2(k+1)+1)!} \cdot \frac{(2k+1)!}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(2k+3)(2k+2)} = 0.$$

Æfing 7.3.3 Notið viðeigandi próf til að kanna samleitni raðarinnar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2+k+1}{k^2\sqrt{k}+1}.$$

■ **Lausn** Við notum Markgildispróf. Látum $a_k = \dfrac{3k^2+k+1}{k^2\sqrt{k}+1}$ og $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Fáum

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{(3k^2+k+1)/(k^2\sqrt{k}+1)}{1/\sqrt{k}} = \frac{3k^2\sqrt{k}+k\sqrt{k}+\sqrt{k}}{k^2\sqrt{k}+1} = \frac{3+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{1}{k^2\sqrt{k}}}$$

sem stefnir á 3 þegar $k \to +\infty$. Nú er röðin $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ ósamleitin. Skv. Markgildisprófinu er þá $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ líka ósamleitin.

Æfing 7.4.3 Veldaröðin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3(3x-2)^n$$

er alsamleitin fyrir $x \in]a, b[$ og ósamleitin fyrir öll önnur x. Finnið fastana $a, b \in \mathbb{R}$. Notið kvótaprófið.

■ **Lausn** Við látum $a_n = n^3(3x-2)^n$ og reiknum

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^3(3x-2)^{n+1}}{n^3(3x-2)^n}\right| = |3x-2|.$$

Nú segir Kvótaprófið okkur að röðin sé alsamleitin ef

$$\rho < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |3x-2| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < 3x-2 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{3} < x < 1.$$

Nú er gefið í dæminu að röðin er alsamleitin á opnu bili $]a,b[$ en ósamleitin þar fyrir utan. Kvótaprófið gaf okkur að röðin er alsamleitin á bilinu $\frac{1}{3} < x < 1$ svo $a = \frac{1}{3}$ og $b = 1$.

Æfing 7.4.4 Ákvarðið stærsta bilið fyrir x þannig að veldaröðin

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}(1-3x)^n$$

er alsamleitin (e. absolutely convergent). Athugið að bilið gæti verið lokað eða hálf lokað (s.s. skoðið líka endapunkta bilsins).

■ **Lausn** Byrjum á að umrita:

$$\frac{1}{n^2}(1-3x)^n = \frac{1}{n^2}\left(-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)^n = \frac{(-3)^n}{n^2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Nú sést að þetta er veldaröð um $c = 1/3$ með $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n^2}$. Reiknum svo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}/(n+1)^2}{(-3)^n/n^2}\right| = \left|-3\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|$$

Þar sem $\dfrac{n^2}{(n+1)^2}$ stefnir á 1 þegar n stefnið á óendanlegt fæst

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3,$$

þannig að samleitnigeisli raðarinnar er $R = 1/3$. Samleitnisbilið er þá á milli $1/3 - 1/3 = 0$ og $1/3 + 1/3 = 2/3$.
Við skoðum endapunktana sérstaklega. Ef $x = 0$ er $1 - 3x = 1$ og við fáum röðina

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

sem er alsamleitin. Sömuleiðis, ef $x = 2/3$ er $1 - 3x = -1$ og við fáum röðina

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

sem er einnig alsamleitin því tölugildi $(-1)^n/n^2$ er $1/n^2$.
Samantekið fæst að veldaröðin er alsamleitin á bilinu $[0, 2/3]$.

Æfing 7.4.6 Skoðum veldaröðina

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} \left(\frac{x}{2} - 7\right)^n.$$

a) Finnið samleitnigeisla (e. radius of convergence) og samleitnimiðju (e. center of convergence) veldaraðarinnar.
b) Finnið summuna fyrir $x = 15$.
c) Finnið summuna fyrir $x = 5$.

■ **Lausn** (a) Við byrjum á að umrita

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} \left(\frac{x}{2} - 7\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} \left(\frac{1}{2}(x-14)\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n 2^n} (x-14)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n} (x-14)^n$$

og sjáum nú að samleitnimiðjan er $c = 14$. Reiknum nú L til að finna geislann:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n+2}\, 4^n}{4^{n+1}\, 3^{n+1}} = \frac{3}{4}$$

svo samleitnigeilsinn er $R = \dfrac{1}{L} = \dfrac{4}{3}$. Við vitum þá að röðin okkar er alsamleitin fyrir $x \in]14 - \frac{4}{3}, 14 + \frac{4}{3}[=]\frac{38}{3}, \frac{46}{3}[$ og að röðin er ósamleitin þegar $x < \frac{38}{3}$ og þegar $x > \frac{46}{3}$.

(b) Látum nú $x = 15$ og fáum kvótaröð svo við getum reiknað summuna

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n} (15-14)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 \cdot 3^n}{4^n} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3 \cdot \frac{1}{1 - 3/4} = 12.$$

(c) Við sjáum að $x = 5$ er fyrir utan samleitnibilið og röðin er því ekki samleitin fyrir þetta gildi og ekki hægt að reikna summuna sem rauntölu. Þar sem liðirnir eru plús og mínus á víxl og vaxandi að tölugildi er summan heldur ekki $-\infty$ eða $+\infty$.

Æfing 7.4.7 Skoðum veldaröðina

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^n$$

a) Finnið samleitnimiðju (e. center of convergence) og samleitnigeisla (e. radius of convergence) veldaraðarinnar.
b) Finnið summuna ef $x = 6$.
c) Finnið summuna ef $x = 17.4$.

■ **Lausn** a) Byrjum á að umskrifa,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\left(1-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6^n}(3-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(x-3)^n,$$

og þá sjáum við að samleitnimiðjan er $c = 3$. Svo finnum við geislann með Kvótaprófi; við reiknum

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{6^n}{6^{n+1}}\right| = \frac{1}{6}$$

og sjáum að geislinn er $R = 1/L = 6$. Röðin er s.s. (al)samleitin á bilinu $x \in]3-6, 3+6[=]-3, 9[$.

b) $x = 6$ er innan samleitnibilsins og hægt er að reikna summuna með kvótaröð.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(6-3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

c) $x = 17.4$ er fyrir utan samleitnibilið, svo röðin er ekki samleitin fyrir $x = 17.4$ og ekki hægt að reikna summuna sem rauntölu því hún er ekki skilgreind. Aftur á móti er ljóst að

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(17.4-3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{14.4}{6}\right)^n = +\infty.$$

Æfing 7.4.8 Notið veldaröðina

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

til að finna veldaraðarframsetningu fyrir fallið

$$g(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$$

og gefið samleitnibil (e. interval of convergence) veldaraðarinnar.

■ **Lausn** Við þekkjum veldaröðina

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

og við byrjum á að diffra báðum megin við jafnaðarmerkið og fáum

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

Athugið að samleitinibilið breytist ekki þegar við diffrum. Nú gerum við breytuskiptin $x = 2t$ og fáum

$$\frac{1}{(1-2t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^n t^n.$$

Samleitnibilið fyrir þessa röð er $-1 < 2t < 1$ þ.e.a.s. $-1/2 < t < 1/2$.

Æfing 7.4.9 Vitað er að

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \text{fyrir öll } x \in]-1,1[.$$

Reiknið summu raðarinnar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots$$

Ábending: Notið $f'(x)$.

■ **Lausn 7.1** Veldaröðina má diffra lið fyrir lið á samleitnabilinu $]-1,1[$ og þá er

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$$

og ef við setjum $x = 1/2$ fæst

$$f'(1/2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Einnig gildir

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

þannig að

$$f'(1/2) = \frac{1}{(1-1/2)^2} = \frac{1}{1/4} = 4.$$

Tekið saman fæst

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4.$$

Æfing 7.5.1 Finnið Taylorröð fallsins $\ln(1+2x)$ um 1. Notið að við þekkjum Taylorröð fallsins $\ln(1+x)$ um 0.

■ **Lausn** Við vitum að

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1$$

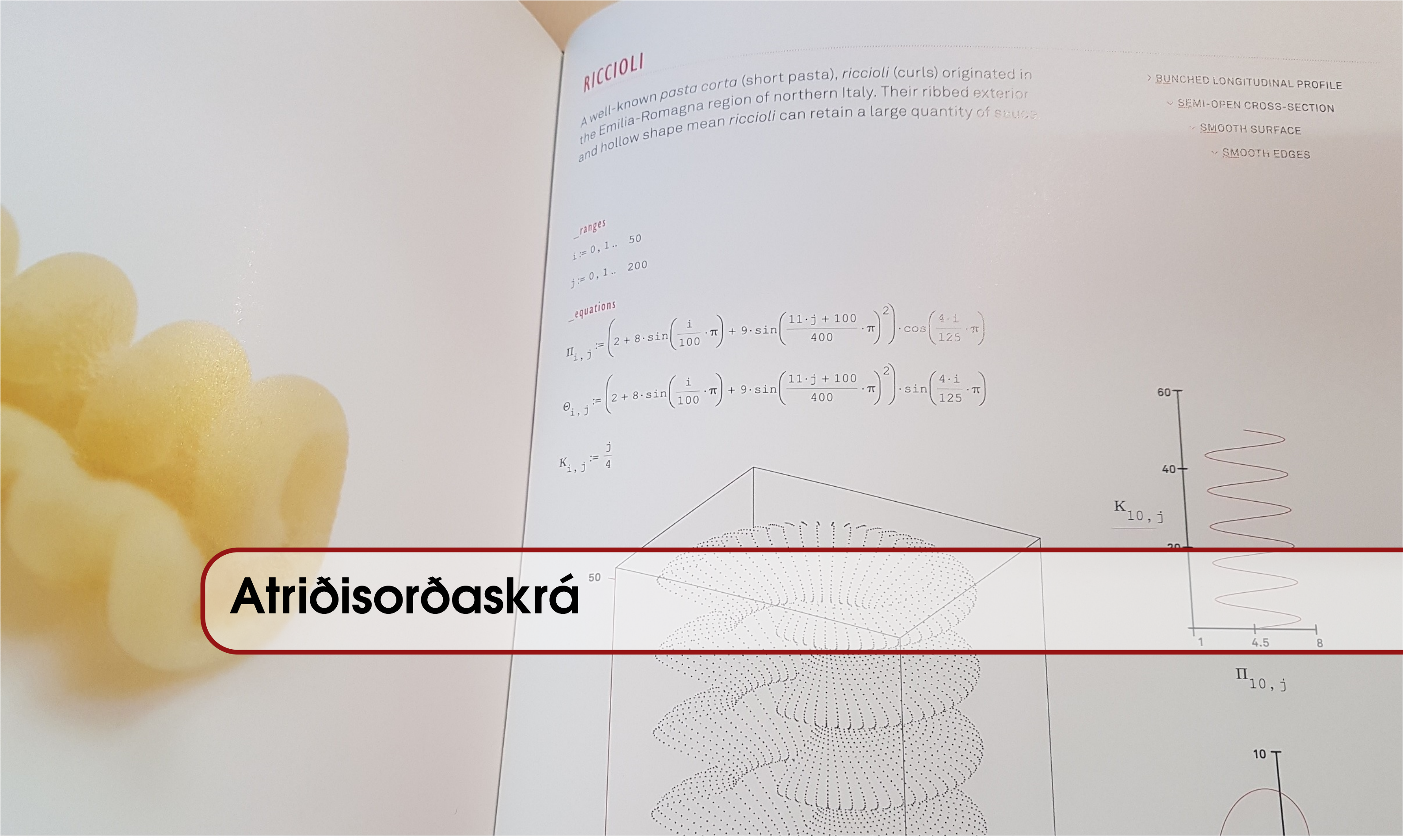
Þetta er Taylorröðin um 0 en við viljum finna Taylorröð um 1. Við byrjum á því á að umskrifa fallið sem

$$\begin{aligned}
\ln(1+2x) &= \ln(1+2(x-1)+2) \\
&= \ln(3+2(x-1)) \\
&= \ln(3\left(1+\frac{2(x-1)}{3}\right)) \\
&= \ln(3) + \ln\left(1+\frac{2(x-1)}{3}\right)
\end{aligned}$$

svo nú getum við gert breytuskipti í röðinni fyrir $\ln(1+x)$ og fáum

$$\ln(1+2x) = \ln(3) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{2(x-1)}{3}\right)^n = \ln(3) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{3^n n} (x-1)^n .$$

Þetta er Taylorröð fallsins fyrir $-1 < \dfrac{2(x-1)}{3} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1/2 < x \leq 5/2$ (s.s. er þetta samleitnibil Taylorraðarinnar).



Atriðisorðaskrá